Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В. А. Свекло
(Петрозаводск)

Рассматривается задача, соответствующая динамическому воздействию на упругую полуплоскость системы штампов при отсутствии трения и сцепления.

Предполагается, что читатель знаком с результатами С. Л. Соболева, помещенными в § 3—4 главы XII книги [1].

§ 1. Теорема единственности. Ставится следующая основная смешанная динамическая задача: на совокупности $L = L_1 + \ldots + L_n$ отрезков $a_k b_k$, расположенных по оси x в положительном направлении так, что концы отрезков образуют последовательность $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$, заданы смещения

$$u(x,\ 0,\ t) = f_1(x,\ t) + d_1(x,\ t), \qquad v(x,\ 0,\ t) = f_2(x, t) + d_2(x,\ t) \tag{1.1}$$

где $d_i(x,\ t) = d_i(t)$ $(i = 1,\ 2)$ на L, и задан главный вектор $(X^\circ,\ Y^\circ)$ внешних усилий, приложенных к L (задача A), или $d_i(x,\ t) = d_{ik}(t)$ $(k = 1, \ldots,\ n)$ на участках L_k и заданы главные векторы $(X_k{}^\circ,\ Y_k{}^\circ)$ внешних сил, приложенных к каждому отрезку L_k (задача B). На остальной части L' границы заданы напряжения

$$\sigma_y(x,\ 0,\ t) = A(x,\ t), \qquad \tau_{xy}(x,\ 0,\ t) = B(x,\ t) \tag{1.2}$$

Кроме того, задаются массовые силы X, Y и начальные условия

$$\begin{aligned} u(x,\ y,\ 0) &= u_0(x,\ y), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = u_0{}'(x,\ y) \\ v(x,\ y,\ 0) &= v_0(x,\ y), \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = v_0{}'(x,\ y) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Поставленные задачи A и B легко сводятся к системе интегральных уравнений относительно напряжений σ_y и τ_{xy} на участке L оси $0x$. Для этого на основании [1] запишем

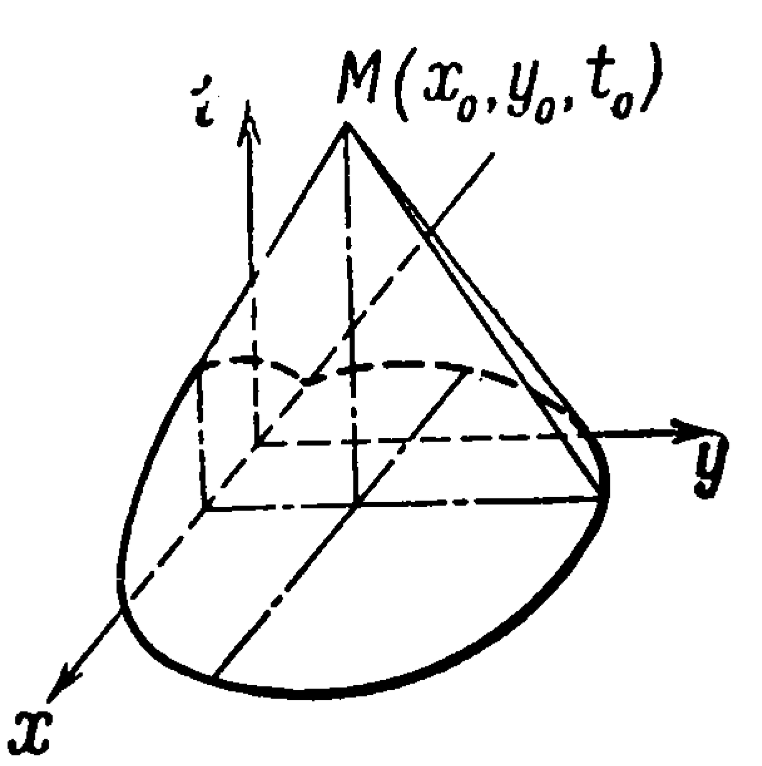
$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{t_0} (t_0 - t) \left(\sigma_{y_0} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x_0}\right) dt &= M(x_0,\ y_0,\ t_0) \\ 2\pi \int_0^{t_0} (t_0 - t) \left(\tau_{x_0 y_0} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) dt &= N(x_0,\ y_0,\ t_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$M(x_0,\ y_0,\ t_0) = -\iiint_T (u_1{}^\circ X + v_1{}^\circ Y)\, d\tau + \iint_S (u_1{}^\circ \tau_{xy} + v_1{}^\circ \sigma_y)\, dx dt +$$
$$+ \rho \iint_{S_1} \left(u \frac{\partial u_1{}^\circ}{\partial t} + v \frac{\partial V_1{}^\circ}{\partial t} - u_1{}^\circ \frac{\partial u}{\partial t} - v_1{}^\circ \frac{\partial v}{\partial t}\right) dx dy$$

а выражение для N получим из M заменой фундаментального решения продольного типа u_1°, v_1° на фундаментальное решение поперечного типа u_2°, v_2°. T — объем, ограниченный поверхностью характеристического конуса и плоскостями $y = 0$ и $t = 0$, так как это указано на фигуре. В равенстве (1.4) устремим y_0 к нулю и, вводя обозначения $P(x, t) = \sigma_y(x, 0, t)$, $Q(x, t) = \tau_{xy}(x, 0, t)$, получим

$$
\begin{aligned}
2\pi \int_0^{t_0} (t_0 - t) P(x_0, t)\, dt &= \iint_S [u_1^\circ|_{y_0=0} Q(x, t) + \\
&+ v_1^\circ|_{y_0=0} P(x, t)]\, dx dt + \Phi_1(x_0, t_0) \\
2\pi \int_0^{t_0} (t_0 - t) Q(x_0, t)\, dt &= \iint_S [u_2^\circ|_{y_0=0} Q(x, t) + \\
&+ v_2^\circ|_{y_0=0} P(x, t)]\, dx dt + \Phi_2(x_0, t_0)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$



Здесь $\Phi_i(x_0, t_0)$ объединяют известные количества. Покажем, что решение уравнений (1.5) единственно. В самом деле, предположим, что эта система имеет два решения P_1, Q_1 и P_2, Q_2. Тогда им соответствуют два решения u_1, v_1 и u_2, v_2 уравнений движения для полуплоскости. Разностному решению $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ отвечают нулевые значения начальных данных, массовых сил, напряжений на участке L', а также главного вектора (X°, Y°) на L в задаче А и вектора (X_k°, Y_k°) на L_k в задаче В. На L_k оно зависит только от времени:

$$
u, v = \begin{cases} d_i(t) & \text{на } L \text{ в задаче А} \\ d_{ik}(t) & \text{на } L_k \text{ в задаче В} \end{cases}
$$

и соответствуя разностным напряжениям $P = P_1 - P_2$, $Q = Q_1 - Q_2$, выражается через эти последние по формулам [1]

$$
2\pi\rho u(x_0, y_0, t_0) = \frac{\partial M}{\partial x_0} + \frac{\partial N}{\partial y_0}, \qquad 2\pi\rho v(x_0, y_0, t_0) = \frac{\partial M}{\partial y_0} - \frac{\partial N}{\partial x_0} \tag{1.6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
M &= \iint_S [u_2^\circ Q(x, t) + v_1^\circ P(x, t)]\, dx dt, \\
N &= \iint_S [u_2^\circ Q(x, t) + v_2^\circ P(x, t)]\, dx dt
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Фундаментальные решения позволяют несколько расширить область интегрирования S и сделать ее не зависящей от x_0 и y_0. Поэтому легко обосновать возможность внесения в (1.6) знака производной под знак интеграла. Получим

$$
\begin{aligned}
2\pi\rho u &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial u_2^\circ}{\partial y_0}\right) Q(x, t) + \left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0}\right) P(x, t)\right] dx\, dt \\
2\pi\rho v &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_0}\right) Q(x, t) + \left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial v_2^\circ}{\partial x_0}\right) P(x, t)\right] dx\, dt
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Область интегрирования S можно заменить совокупностью прямоугольников высотой $\vartheta_0 = t_0 - r_0/a$, где a — скорость распространения продольной волны, построенной на отрезках L_k, и (1.8) примет вид:

$$2\pi\rho u = \int_0^{\vartheta_0} \left\{ \int_L \left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial u_2^\circ}{\partial y_0} \right) Q(x,\ t) + \left(\frac{\partial v_1^\circ}{\partial x_0} + \frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0} \right) P(x,\ t) \right] dx \right\} dt$$

$$2\pi\rho v = \int_0^{\theta_0} \left\{ \int_L \left[\left(\frac{\partial u_1^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_0} \right) Q(x,\ t) + \left(\frac{\partial v_2^\circ}{\partial y_0} - \frac{\partial v_2^\circ}{\partial x_0} \right) P(x,\ t) \right] dx \right\} dt \tag{1.9}$$

Отметим, что в момент t_0 во всех точках полуплоскости, где $r_0 > at_0$, разностное решение u, v и производные от него по всем аргументам равны нулю.

Пусть B — конечная область на плоскости x, y, L — контур ее ограничивающий, а n — внешняя нормаль к L; тогда

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \iint_B \left(X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} \right) dxdy + \int_L \left(X_n \frac{\partial u}{\partial t} + Y_n \frac{\partial v}{\partial t} \right) de \tag{1.10}$$

Здесь T — кинетическая, V — потенциальная энергия упругой среды:

$$T = \frac{1}{2} \iint_B \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dx\, dy$$

$$V = \iint_B \left[\frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\gamma^2_{xy}) \right] dxdy \tag{1.11}$$

Построим в рассматриваемой полуплоскости $y \geqslant 0$ область B_R следующим образом. Из начала координат, как из центра, опишем полукруг L_R настолько большого радиуса R, чтобы все отрезки L_k лежали на его диаметре строго внутри полукруга. Применяя (1.10) к области B_R и к разностному решению, получим

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \int_{L_R} \left(X_n \frac{\partial u}{\partial t} + Y_n \frac{\partial v}{\partial t} \right) dl \tag{1.12}$$

Покажем, что, каково бы ни было t:

$$\lim \int_{L_k} \left(X_n \frac{\partial u}{\partial t} + Y_n \frac{\partial v}{\partial t} \right) dl = 0 \qquad \text{при } R \to \infty \tag{1.13}$$

Действительно, подынтегральное выражение в (1.13) равно нулю во всех точках полуплоскости, где $R > c + at_0$ (здесь c — наибольшее из чисел $|a_1|$, $|b_n|$). Следовательно, равенство (1.13) подавно имеет место и в любой момент во всех точках полуплоскости $T + V = \text{const}$.

Но так как для разностного решения начальные данные равны нулю, то $T + V = 0$. Таким образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \tag{1.14}$$

т. е. разностное решение отвечает жесткому перемещению тела. Напряжения, соответствующие этому решению, равны нулю; следовательно, равны нулю разностные напряжения в точках границы полуплоскости:

$$P = P_1 - P_2 = 0, \qquad Q = Q_1 - Q_2 = 0 \tag{1.15}$$

Теорема единственности доказана.

§ 2. Интегральное уравнение задачи. В дальнейшем ограничимся рассмотрением задачи при следующих краевых условиях: на всей границе $y=0$ заданы касательные напряжения τ_{xy}; на части границы L заданы смещения v, а на L' — напряжения σ_y. Второе из равенств (1.4) запишем в виде (2.1)

$$2\pi\int_0^{t_0}(t_0-t)\left(\tau_{xy}-2\mu\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)dt = \iint_S (\overset{\circ}{u}_2\tau_{xy}+\overset{\circ}{v}_2\sigma_y)\,dxdt + N_1(x_0, y_0, t_0)$$

где

$$N_1(x_0, y_0, t_0) = -\iiint_T (\overset{\circ}{u}_2X+\overset{\circ}{v}_2Y)\,d\tau +$$

$$+\rho\iint_{S_1}\left(u\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial t}+v\frac{\partial \overset{\circ}{v}_2}{\partial t}-\overset{\circ}{u}_2\frac{\partial u}{\partial t}-\overset{\circ}{v}_2\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdy$$

Устремляя точку M_0 в некоторой точке P_0, лежащей внутри области $\{y=0,\ x\in L,\ 0\leqslant t<\infty\}$, где заданы τ_{xy} и v, получим для σ_y интегральное уравнение

$$\iint_{S_0}\sigma_y(x, t)\lim_{y_0\to 0}\overset{\circ}{v}_2\,dxdt = N_2(x_0, 0, t_0) \tag{2.2}$$

где N_2 объединяет известные количества, вычисляемые по начальным и граничным условиям, а S_0 — предельное значение общей части области S и области D, являющейся совокупностью прямоугольников высотой t_0, построенных на отрезках L_k. Легко подсчитывается ядро уравнения (2.2):

$$\lim\overset{\circ}{v}_2 = K_0(x-x_0, t_0-t) = \frac{4}{b^2}\operatorname{Re}\int_0^{\theta}\frac{i\xi\sqrt{a^{-2}-\xi^2}}{F(\xi)}\,d\xi \qquad \left(\theta=\frac{t_0-t}{x_0-x}\right) \tag{2.3}$$

где b — скорость распространения поперечных волн, $F(\xi)$ — функция Релея. Укажем на некоторые свойства ядра (2.3). Оно сингулярно с особенностью порядка $(x-x_0)^{-1}$ в окрестности x_0, обращается в логарифмическую бесконечность при значениях θ, равных корням функции Релея, и равно нулю на границе и вне области S°. Последнее обстоятельство позволяет записать уравнение (2.2) в виде

$$\int_0^{t_0}\int_L\frac{K_1(|x-x_0|, t_0-t)}{x-x_0}P(x, t)\,dxdt = N_2(x_0, 0, t_0) \tag{2.4}$$

где ограниченное в окрестности x_0 ядро

$$K_1(|x-x_0|, t_0-t) = \begin{cases}(x-x_0)K_0(x-x_0, t_0-t) & \text{в } S^\circ\\ 0 & \text{в } D-S^\circ\end{cases} \tag{2.5}$$

Уравнение типа Вольтерра (2.4) является основным для данной задачи.

§ 3. Сведение к сингулярному уравнению. Законность всех последующих операций отнесем за счет искомой функции, что влечет за собой необходимость последующей проверки. Уравнение (2.4) перепишем так:

$$\int_L\frac{1}{x-x_0}\int_0^{t_0}K_1(|x-x_0|, t_0-t)P(x, t)\,dtdx = N_2 \tag{3.1}$$

Подвергая это равенство преобразованию Лапласа, пользуясь теоремой свертки, получим эквивалентное сингулярное уравнение задачи

$$\int\limits_L \frac{K_1(|x-x_0|,\ s)}{x-x_0} P(x,\ s)\,dx = f(x_0,\ s) \quad (s=\sigma+i\tau,\ \sigma \geqslant \sigma_0 > 0) \tag{3.2}$$

Здесь $K_1(|x-x_0|,\ s)$, $P(x,\ s)$, $f_1(x_0,\ s)$ — изображения функций $K_1(|x-x_2|,\ t)$, $P(x,\ t)$, $N_2(x_0,\ 0,\ t)$. Легко проверить, что $K_1(0,\ s) = Ms^{-2}$, M — известная постоянная, значение которой легко устанавливается. Равенство (3.2) перепишем в виде

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{P(x,\ s)}{x-x_0}\,dx + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L K(x_0,\ x,\ s)P(x,\ s)\,dx = f(x_0,\ s) \tag{3.3}$$

Здесь

$$K(x_0,\ x,\ s) = \frac{K_1(|x-x_0|s) - K_1(0,\ s)}{K_1(0,\ s)(x-x_0)}$$

В том случае, когда $\lambda=\mu$ (гипотеза Пуассона), можно дать следующее представление ядра ($u=|x-x_0|$):

$$K(x_0,\ x,\ s)K(0,\ s) = \operatorname{sign}(x-x_0)\Big\{\sum_{i=1}^{2} A_0{}^i \int\limits_{\vartheta}^{\infty} \frac{u\chi(t)-t}{u}\,e^{-st}dt +$$

$$+\sum_{i,k=1}^{2} A_{ik}\int\limits_{\vartheta_i}^{\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi(t)}{g_{ik}}\,e^{-st}\,dt + \sum_{i=1}^{2} A_3{}^i \int\limits_{\vartheta_i}^{\infty} \ln\left|\frac{\chi(t)-h}{\chi(t)+h}\right| e^{-st}dt -$$

$$-\sum_{i=1}^{2} A_0{}^i \int\limits_0^{\vartheta} te^{-st}\,dt\Big\} \qquad \left(\theta_i = \frac{u}{a_i}\right) \tag{3.4}$$

$$\chi_i(t) = \sqrt{\frac{t^2}{u^2} - \frac{1}{a_i^2}}\,. \qquad h_i = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a_i^2}}\,, \qquad g_{k} = \sqrt{\frac{1}{a_i^2} - \frac{1}{\alpha_k^2}}$$

Здесь $A_0{}^i$, A_{ik}, $A_3{}^i$ — известные постоянные, c — скорость распространения волны Релея, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, α^{-2}, β^{-2} — вещественные корни функции

$$F_1(\xi) = 4\xi^2\sqrt{a^{-2}-\xi^2}\sqrt{b^{-2}-\xi^2} - (b^{-2}-2\xi^2)^2$$

Нетрудно убедиться, что

$$K(x_0,\ x_0,\ s) = \lim \frac{K_1(u,\ s) - K_1(0,\ s)}{(x-x_0)K(0,\ s)} = 0 \quad \text{при } x\to x_0 \tag{3.5}$$

и показать, пользуясь представлением (3.4), что ядро $K(x_0,\ x,\ s)$ удовлетворяет на L условию Гельдера с некоторым показателем $\nu<1$.

Подвергая (3.3) регуляризации, получим [2]

$$P(x_0,\ s) + K^*KP(x,\ s) = K^*f + P_{n-1}(x_0,\ s)Z(x_0) \tag{3.6}$$

Здесь $Z(x_0)$ — каноническое решение данного класса, $P_{n-1}(x_0,\ s)$ — полином степени $n-1$ с коэффициентами, зависящими от s_1:

$$K^*f = \frac{Z(x_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f\,dx}{Z^+(x)(x-x_0)}\,, \qquad K^*KP = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L N(x_0,\ x,\ s)P(x,\ s)\,dx$$

$$N(x_0,\ x,\ s) = \frac{Z(x_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(x_1,\ x,\ s)\,dx_1}{Z^+(x_1)(x_1-x_0)} \tag{3.7}$$

Однородное уравнение (3.5) не имеет отличных от нуля решений (это вытекает из доказанной теоремы единственности). Следовательно, существует одно и только одно решение уравнения (3.5), которое, если ввести резольвенту $R(x_0, x, s)$, может быть записано в виде

$$P(x_0, s) = \Big[K^*f + \int_L R_1(x_0, x, s)\, K^*f dx + C_1(s)\Big(x_0^{n-1} +$$

$$+ \int_L R_1(x_0, x, s)\, x^{n-1} Z(x)\, dx\Big) + \ldots + C_n(s)\Big(1 + \int_L R_1(x_0, x, s)\, Z(x)\, dx\Big)\Big] Z(x_0)$$

$$R_1(x_0, x, s) = \frac{R(x_0, x, s)}{Z(x_0)} \tag{3.8}$$

Постоянные $C_k(s)$ найдем из дополнительных условий, имеющихся в задачах A и B. В задаче B на каждом L_k заданы силы $P_k(t)$. В пространстве изображений получим

$$P_k(s) = \int_{L_k} P(x, s)\, dx \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.9}$$

В задаче A все d_{2k} в формуле (1.1), взятые на участках L_k, должны быть одинаковы:

$$d_{21}(s) = d_{22}(s) = \ldots = d_{2n}(s) \tag{3.10}$$

и задано суммарное давление на всех участках:

$$P(s) = \int_L P(x, s)\, dx \tag{3.11}$$

Подставляя (3.8) в (3.9) или используя (как в статическом случае) условия (3.10) и (3.11), получим в обеих задачах систему уравнений относительно неизвестных $C_k(s)$. Эта система однозначно разрешима, что следует из доказанной теоремы единственности.

Резольвента $R_1(x_0, x, s)$ как функция s не имеет особенностей, отличных от особенностей ядра:

$$N_1(x_0, x, s) = \frac{N(x_0, x, s)}{Z(x_0)}$$

Она, следовательно, голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ и ограничена на бесконечности, так как этим свойством обладает ядро N_1. Действительно, как видно из выражения для N_1, поведение этой функции s определяется поведением ядра:

$$K(x_0, x, s) = \frac{s^2 M^{-1} K_1(u, s) - 1}{x - x_0}, \qquad u = |x - x_0|$$

где согласно (3.3)

$$K_1(u, s) = -u \exp\frac{-su}{a} \int_0^\infty \int_{a^{-1}}^{\tau_1} \frac{\xi m(\xi, a)\, n(\xi, b)}{FF_1}\, d\xi e^{-s}\, dt -$$

$$- u \exp\frac{-su}{b} \int_0^\infty \int_{b^{-1}}^{\tau_2} \frac{4\xi^2 m^2(\xi, a)\, m(\xi, b)}{FF_1}\, d\xi e^{-st}\, dt \tag{3.12}$$

Здесь

$$m(\xi, r) = \sqrt{\xi^2 - \frac{1}{r^2}}, \qquad \eta(\xi, r) = \frac{1}{r^2} - 2\xi^2$$

$$\tau_1 = \frac{1}{a} + \frac{t}{u}, \qquad \tau_2 = \frac{1}{b} + \frac{t}{u}$$

Если $u=0$, т. е. $x=x_0$, то $K_1=Ms^2$ и $K(x_0,\ x_0,\ s)=0$ при любом s. Пусть $u\neq 0$. Покажем, что функция

$$\Pi_1(s,\ u)=s^2u\int\limits_0^\infty\int\limits_{a^{-1}}^{t_1}\frac{\xi m(\xi,\ a)\,n^2(\xi,\ b)}{FF_1}\,d\xi e^{-st}\,dt \tag{3.13}$$

оставаясь равномерно ограниченной, стремится к нулю с возрастанием $|s|$. Действительно, полагая $t_1=st$, получим (3.14)

$$\Pi_1(s,\ u)=su\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_{a^{-1}}^{\vartheta_1}\frac{\xi m(\xi,\ a)\,n^2(\xi,\ b)}{FF_1}\,d\xi\right]e^{-t}\,dt \qquad \left(\vartheta_1=\frac{1}{a}+\frac{t}{su}\right)$$

Здесь интеграл надо брать вдоль луча $\arg t_1=\arg s=\varphi=\mathrm{const}\neq 0$. Однако легко показать, что этот путь интегрирования может быть заменен лучом, идущим вдоль действительной оси, если только F_1 не имеет мнимых корней. Полагая $\zeta=s$, оценим $|\Pi_1(\zeta^{-1},\ u)|$ при малых ζ. Выбирая в качестве пути интегрирования отрезок луча, выходящего из начала, длиной

$$\frac{t}{u}|\zeta|=\frac{t}{u}\rho,\qquad \rho=|\zeta|,\qquad \zeta_1=\zeta-\frac{1}{a}$$

имеем (3.15)

$$\left|\int\limits_0^{tu^{-1}\zeta}\frac{(\zeta_1+a^{-1})\,[b^{-2}-2(\zeta_1+a^{-1})^2]^2\sqrt{\zeta_1^2-2a^{-1}\zeta_1}}{F(a^{-1}+\xi_1)\,F_1(a^{-1}+\xi_1)}\,d\xi_1\right|\leqslant\max|(\ldots)|\left|\frac{t}{u}\right||\zeta|$$

скобки $(\ldots)$ означают подынтегральное выражение, и берется наибольшее значение его модуля на упомянутом отрезке. Так как (3. 16)

$$\max|(\ldots)|\leqslant\max\left|\frac{(tu^{-1}\xi_1+a^{-1})\,[b^{-2}-2(tu^{-1}\xi_1+a^{-1})^2]^2}{F(tu^{-1}\xi_1+a^{-1})\,F_1(tu^{-1}\xi_1+a^{-1})}\sqrt{\frac{t}{u}}\sqrt{\frac{t}{u}\xi_1+\frac{1}{a}}\right|\sqrt{\rho}$$

и выражение, стоящее под знаком модуля, ограничено и не превосходит некоторого числа L, то

$$\left|\Pi_1\left(\frac{1}{\zeta},\ u\right)\right|\leqslant L\sqrt{\rho}\int\limits_0^\infty te^{-t}\,dt=L\sqrt{\rho} \tag{3.17}$$

и модуль $\Pi_1(\zeta^{-1},\ u)$ исчезает вместе с $\sqrt{\rho}$, оставаясь равномерно ограниченным. Тем же свойством обладает коэффициент при $\exp(-sb^{-1}u)$ во втором слагаемом выражения (3.12), а следовательно, и функция $K_1(u,\ s)$. В силу сказанного в интеграле, определяющем N_1, можем перейти к пределу под знаком интеграла, и так как получаемое в пределе выражение конечно, то ограниченность ядра $N_1(x_0,\ x,\ s)$ при $s=\infty$ доказана. Первые два слагаемых в формуле (3.6) в силу ограниченности резольвенты R_1 вместе с K^*F принадлежат к классу функций, представимых интегралом Лапласа, откуда также следует принадлежность к этому классу всех $C_k(s)$. Таким образом, $P(x_0,\ s)$, определяемая формулой (3.8), представима интегралом Лапласа и мы можем, пользуясь формулой обращения Меллина, найти оригинал:

$$P(x_0,\ t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}P(x_0,\ s)\,e^{st_0}ds \tag{3.18}$$

Проверим, что так найденная функция $P(x_0, t_0)$ есть решение (2.4). В самом деле, функция $P(x_0, s)$, будучи решением уравнения (3.5), является решением эквивалентного ему уравнения (3.2).

Пусть $C_j\,(j = q+1, \ldots, m)$ — концы, на которых $Z(x)$ обращается в бесконечность. Положим

$$Z(x) = Z_1(x)\,Z_0(x), \quad \left(Z_1(x) = \sum_{j=q+1}^{m} (x - c_j)^{\gamma_j} \qquad (-1 < \operatorname{Re}\gamma_j < 0)\right)$$

где $Z_0(x)$ — ограниченная функция вблизи концов. Тогда $P(x, s) = Z_1(x)\,P_1(x, s)$, где $P_1(x, s)$ — ограниченная вблизи концов функция, принадлежащая к классу H_ε^*. Уравнение (3.2) запишем в виде

$$\int_L \frac{Z_1(x)\,K_1(|x - x_0|, s)}{x - x_0}\, P_1(x, s)\,dx = f_1(x, s) \tag{3.19}$$

Покажем равномерную сходимость интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} K_1(|x - x_0|, s')\,P_1(x_1\ s)\,e^{st}\,ds \; (s = \sigma_0 + i\tau,\ \sigma_0 > 0) \qquad 3.20)$$

Имеем после сокращения на множитель $e^{\sigma_0 t}$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} K_1(|x - x_0|, s)\,P_1(x, s)\,e^{i\tau t}\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s^2K_1(|x - x_0|, s)|\,|P_1(x_1\ s)|}{|s^2|}\,d\tau \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(s)\,B(s)}{|s|^2}\,d\tau \tag{3.21}$$

так как $|s^2k_1(|x - x_0|, s)| \leqslant A(s)$, $|P_1(x, s)| < B(s)$, где $A(s)$, $B(s)$ — ограниченные неотрицательные функции. Следовательно, взяв от обеих частей равенства (3.20) интеграл Меллина и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_L \frac{Z_1(x)}{x - x_0}\int_0^{t_0} K_1(|x - x_0|, t_0 - t)\,P_1(x, t)\,dxdt = N_2(x_0, 0, t_0) \tag{3.22}$$

или

$$\int_0^{t_0}\int_L \frac{K_1(|x - x_0|, t_0 - t)\,P_1(x, t)}{x - x_0}\,dxdt = N_2(x_0, 0, t_0) \tag{3.23}$$

Таким образом, функция (3.18) действительно является решением поставленной задачи. Теорема существования доказана.

В заключение отметим, что если $t \to \infty$ и если при этом заданные функции стремятся к определенным пределам, то из равенства (3.8) получаем в пределе известное решение статической задачи о давлении штампов на упругую полуплоскость.

Поступила 15 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, гл. XII, 1957.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1953.