Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ИЗГИБАЮЩЕЙ НАГРУЗКЕ

В. С. Чернина
(Ленинград)

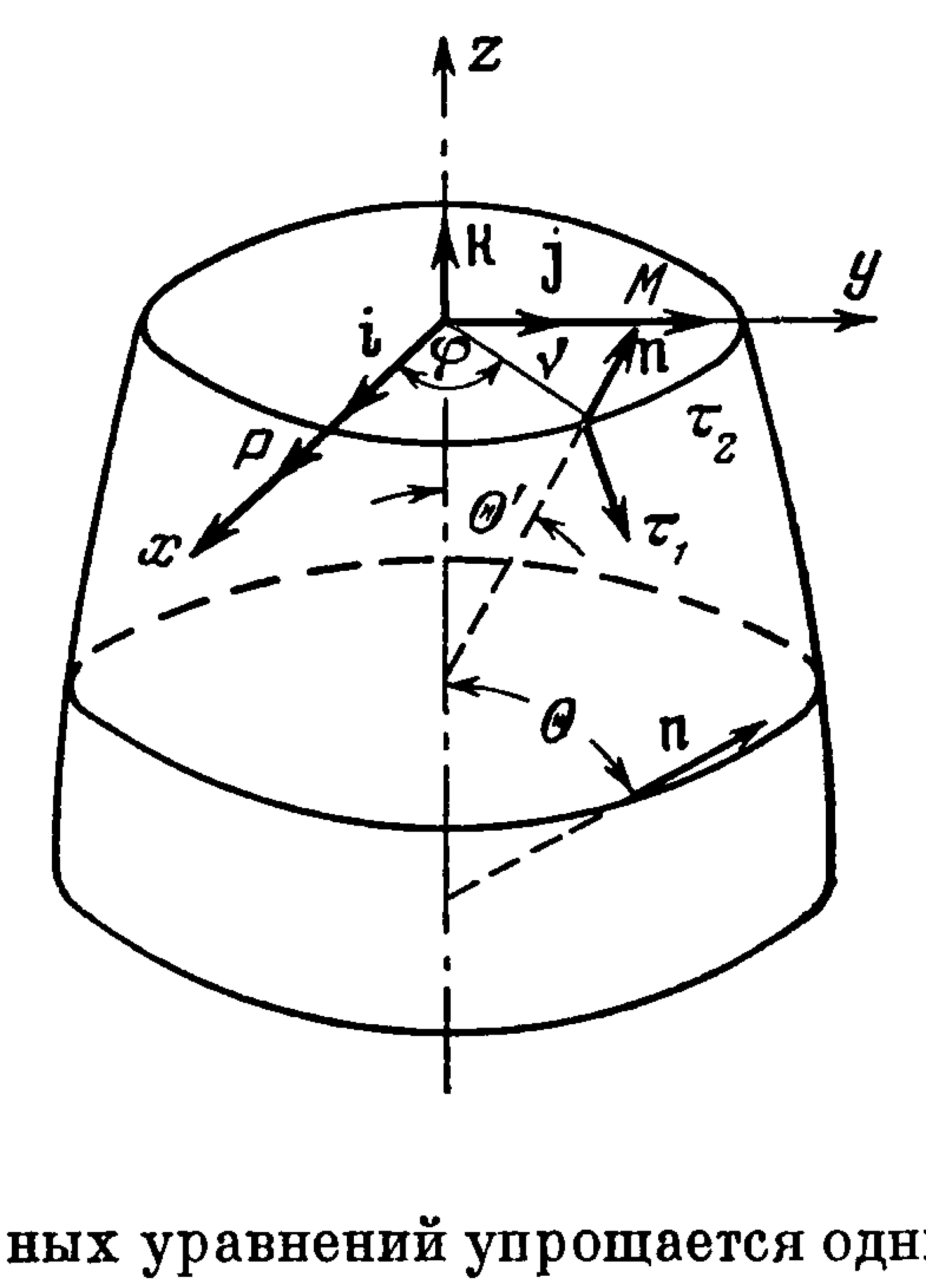
Изгибающей, или ветровой, называется нагрузка, имеющая следующий закон изменения по угловой координате φ (см. фигуру)

$$q_1 = q_{11}\cos\varphi, \qquad q_2 = q_{21}\sin\varphi, \qquad q_n = q_{n1}\cos\varphi \tag{1}$$

Все усилия, моменты и перемещения в оболочке изменяются в зависимости от φ по тому же закону:

$$\begin{gathered} T_1 = t_1\cos\varphi, \qquad T_2 = t_2\cos\varphi, \qquad S = s\sin\varphi \\ M_1 = m_1\cos\varphi, \quad M_2 = m_2\cos\varphi, \quad H = h_1\sin\varphi \\ u = u_1\cos\varphi, \qquad v = v_1\sin\varphi, \qquad w = w_1\cos\varphi \\ N_1 = n_1\cos\varphi; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}\cos\varphi, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{21}\cos\varphi, \quad \omega = \omega_1\sin\varphi \\ N_2 = n_2\sin\varphi, \quad \varkappa_1 = \varkappa_{11}\cos\varphi, \quad \varkappa_2 = \varkappa_{21}\cos\varphi, \quad \tau = \tau_1\sin\varphi \end{gathered} \tag{2}$$

поэтому система дифференциальных уравнений оболочки вращения при изгибающей нагрузке является системой в обыкновенных производных, но имеет, как и в общем случае нагружения, восьмой порядок.



Возможность понижения порядка системы была впервые обнаружена Шверином на примере сферической оболочки. Известно также, что расчет цилиндрической оболочки на изгибающую нагрузку приводится к решению уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами [1].

В. В. Новожилов при помощи введенного им комплексного преобразования основных уравнений теории оболочек свел задачу о расчете оболочки вращения произвольной формы при ветровой нагрузке к решению одного уравнения второго порядка относительно неизвестной комплексной функции. Таким образом, порядок исходной вещественной системы оказался пониженным вдвое. Однако при проведении комплексного преобразования В. В. Новожилова исходная система дифференциальных уравнений упрощается одним из следующих способов: 1) коэффициент Пуассона μ считается равным нулю; 2) при $\mu \neq 0$ отбрасывается ряд членов в уравнениях совместимости (формулы (16.5), стр. 71 монографии [3]).

В настоящей заметке показано, что порядок системы может быть понижен с восьмого до четвертого и без каких-либо упрощающих изменений в исходной системе.

В качестве исходной системы возьмем пять уравнений равновесия оболочки (уравнения (1.5) работы [2]), три уравнения неразрывности (уравнения (5.1), стр. 29 [3]) и шесть соотношений упругости (уравнения (12.1), стр. 56 [3]).

После выполнения дифференцирования по координате φ уравнения статики (уравнения (1.5) [2]) принимают вид:

$$\frac{d}{d\theta}(t_1 R_2 \sin\theta) + R_1\left(s + \frac{h_1}{R_2}\right) - t_2 R_1 \cos\theta + n_1 R_2 \sin\theta + q_{11} R_1 R_2 \sin\theta = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[R_2 \sin\theta\left(s + \frac{h_1}{R_2}\right)\right] + R_1 \cos\theta\left(s + \frac{h_1}{R_1}\right) - \tag{3}$$

$$- t_2 R_1 + n_2 R_1 \sin\theta + q_{21} R_1 R_2 \sin\theta = 0$$

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}(n_1 R_2 \sin\theta) + R_1 n_2\right] - \frac{t_1}{R_1} - \frac{t_2}{R_2} + q_{n1} = 0 \tag{4}$$

$$n_1 = \frac{1}{R_1 R_2 \sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}(m_1 R_2 \sin\theta) + R_1 h_1 - R_1 \cos\theta m_2\right]$$

$$n_2 = \frac{1}{R_1 R_2 \sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}(h_1 R_2 \sin\theta) - R_1 m_2 + R_1 \cos\theta h_1\right]$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки. Умножая первое и третье уравнения (3) на $-\cos\theta$ и $-\sin\theta$ соответственно и складывая со вторым, получим

$$-\frac{d}{d\theta}(t_1 R_2 \sin\theta\cos\theta) - \frac{d}{d\theta}(n_1 R_2 \sin^2\theta) + \frac{d}{d\theta}\left[R_2 \sin\theta\left(s + \frac{h_1}{R_2}\right)\right] +$$

$$+ (-q_{11}\cos\theta + q_{21} - q_{n1}\sin\theta) R_1 R_2 \sin\theta = 0 \tag{5}$$

Интегрируя (5), находим первый интеграл системы (3):

$$-t_1 R_2 \sin\theta\cos\theta - n_1 R_2 \sin^2\theta + R_2 \sin\theta\left(s + \frac{h_1}{R_2}\right) +$$

$$+ \int\limits_{\theta'}^{\theta} (-q_{11}\cos\theta + q_{21} - q_{n1}\sin\theta) R_1 R_2 \sin\theta d\theta = C_1 \tag{6}$$

Исключая из уравнений (4) и третьего уравнения (3) величины m_2 и n_2, с учетом (6) получим еще один интеграл уравнений статики:

$$n_1 R_2^2 \sin^2\theta\cos\theta + h_1 R_2 \sin\theta\cos\theta - t_1 R_2^2 \sin^3\theta - m_1 R_2 \sin\theta +$$

$$+ \int\limits_{\theta'}^{\theta} R_1 \sin\theta\left[\int\limits_{\theta'}^{\theta} (-q_{11}\cos\theta + q_{21} - q_{n1}\sin\theta) R_1 R_2 \sin\theta d\theta\right] d\theta +$$

$$+ \int\limits_{\theta'}^{\theta} (q_{n1}\cos\theta - q_{11}\sin\theta) R_1 R_2^2 \sin^2\theta d\theta = C_2 + C_1 \int\limits_{\theta'}^{\theta} R_1 \sin\theta d\theta \tag{7}$$

Интегралы (6) и (7) представляют собой условия равновесия конечного элемента оболочки, заключенного между двумя параллельными сечениями θ' и θ. Составляя эти условия, непосредственно найдем значения постоянных C_1 и C_2.

Система напряжений в сечении $\theta = \text{const}$ статически эквивалентна усилию $\mathbf{K}_1 \nu d\varphi$ и моменту $\mathbf{M}_1 \nu d\varphi \, (\nu = R_2 \sin\theta)$: (8)

$$\mathbf{K}_1 = T_1 \boldsymbol{\tau}_1 + T_{12} \boldsymbol{\tau}_2 + Q_1 \mathbf{n} = (T_1 \cos\theta \cos\varphi - T_{12} \sin\varphi + Q_1 \sin\theta \cos\varphi)\, \mathbf{i} + \\ + (T_1 \cos\theta \sin\varphi + T_{12} \cos Q + Q_1 \sin\theta \sin\varphi)\, \mathbf{j} + (-T_1 \sin\theta + Q_1 \cos\theta)\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_1 = M_1 \boldsymbol{\tau}_2 - H_{12} \boldsymbol{\tau}_1 = (-H_{12} \cos\theta \cos\varphi + M_1 \sin\varphi)\, \mathbf{i} + \\ + (-H_{12} \cos\theta \sin\varphi + M_1 \cos\varphi)\, \mathbf{j} + (-H_{12} \sin\theta + M_1 \cos\theta)\, \mathbf{k}$$

Перерезывающая сила Q_1, усилия T_{12}, T_{21} и крутящие моменты H_{12}, H_{21} связаны с величинами S, H и N_1 формулами вида [2]

$$S = T_{12} - \frac{H_{21}}{R_2} = T_{21} - \frac{H_{12}}{R_1}, \qquad 2H = H_{21} + H_{12} \tag{9}$$

$$Q_1 = N_1 + \frac{1}{R_2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{H_{21} - H_{12}}{2} \right)$$

Приравняем нулю главный вектор и главный момент внешних и внутренних сил в сечении $\theta = \text{const}$:

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{K}_1 \nu d\varphi + \boldsymbol{P}\boldsymbol{i} + \int_{\theta'}^{\theta} \int_0^{2\pi} (q_1 \boldsymbol{\tau}_1 + q_2 \boldsymbol{\tau}_2 + q_n \boldsymbol{n}) R_1 R_2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = 0 \tag{10}$$

$$\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{M}_1 \nu + \boldsymbol{r}_0 \times \nu \boldsymbol{K}_1) \, d\varphi + \int_{\theta'}^{\theta} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{r} \times (q_1 \boldsymbol{\tau}_1 + q_2 \boldsymbol{\tau}_2 + q_n \boldsymbol{n}) R_1 R_2 \sin\theta \, d\theta d\varphi + \\ + \left(M - P \int_{\theta'}^{\theta} R_1 \sin\theta \, d\theta \right) \boldsymbol{j} = 0 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{r}_0 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \qquad x = R_2 \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R_2 \sin\theta \sin\varphi \tag{12}$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \int_{\theta'}^{\theta} R_1 \sin\theta d\theta$$

Учитывая (1), (2), (8), (9), выполним интегрирование по φ в (10) и (11), в результате чего получим

$$t_1 R_2 \sin\theta \cos\theta - s R_2 \sin\theta - h_1 \sin\theta + n_1 R_2 \sin^2\theta + \\ + \int_{\theta'}^{\theta} (q_{11} \cos\theta - q_{21} + q_{n_1} \sin\theta) R_1 R_2 \sin\theta d\theta = -\frac{P}{\pi} \tag{13}$$

$$-m_1 R_2 \sin\theta - t_1 R_2^2 \sin^3\theta + n_1 R_2^2 \sin^2\theta \cos\theta + h_1 R_2 \sin\theta \cos\theta + \\ + \int_{\theta'}^{\theta} (-q_{11} \sin\theta + q_{n1} \cos\theta) R_1 R_2^2 \sin^2\theta d\theta - \\ - \int_{\theta'}^{\theta} (q_{11} \cos\theta - q_{21} + q_{n1} \sin\theta) R_1 R_2 \sin\theta \left[\int_{\theta'}^{\theta} R_1 \sin\theta \, d\theta \right] d\theta = \\ = \frac{M}{\pi} + \frac{P}{\pi} \int_{\theta'}^{\theta} R_1 \sin\theta \, d\theta \tag{14}$$

Из сравнения (6), (7) и (13), (14) ясно, что

$$C_1 = \frac{P}{\pi}, \qquad C_2 = \frac{M}{\pi} \tag{15}$$

т. е. постоянные интегрирования C_1 и C_2 пропорциональны силе и моменту, приложенным к крайнему сечению оболочки.

После того как получены два интеграла уравнений статики, нетрудно получить и два интеграла уравнений неразрывности. Для этого следует воспользоваться статико-геометрической аналогией, т. е. в данном случае тем обстоятельством, что уравнения неразрывности, записанные в компонентах деформации (уравнения (5.1), стр. 29, (8.2), стр. 39 [3]), и однородные уравнения статики после исключения из них величин N_1 и N_2 содержат одни и те же дифференциальные операторы и величины

$$\begin{array}{lll} T_1,\ \varkappa_2; & M_1,\ (-\varepsilon_2); & S,\ (-\tau) \\ T_2,\ \varkappa_1; & M_2,\ (-\varepsilon_1); & H,\ ({}^1/_2\omega) \end{array} \tag{16}$$

входят в эти уравнения одинаковым образом.

Полагая в уравнениях (6), (7), преобразованных с учетом (4), $q_{11} = q_{21} = q_{n1} = 0$ и заменяя переменные $(t_1, t_2, \ldots)$ на $(\varkappa_{21}, \varkappa_{11}, \ldots$ и т. д.$)$ по схеме (16), получим

$$R_2 \sin\theta\,(\varkappa_{21}\cos\theta + \tau_1) - \frac{R_2}{R_1}\sin^2\theta\,\frac{d\varepsilon_{21}}{d\theta} - (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11})\sin\theta\cos\theta + C_3 = 0 \tag{17}$$

$$-\frac{R_2\sin\theta\cos\theta}{R_1}\frac{d\varepsilon_{21}}{d\theta} + \omega\cos\theta + \varepsilon_{21}\sin^2\theta + \varepsilon_{11}\cos^2\theta - \varkappa_{21}R_2\sin^2\theta =$$
$$= \frac{1}{R_2\sin\theta}\left(C_4 + C_3\int_{\theta'}^{\theta} R_1\sin\theta\, d\theta\right) \tag{18}$$

Подставляя в уравнения (17), (18) выражения для компонентов деформации через перемещения

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\frac{du_1}{d\theta} + \frac{w_1}{R_1}, \qquad \varepsilon_{21} = \frac{w_1\sin\theta + v_1 + u_1\cos\theta}{R_2\sin\theta} \\
\omega_1 = \frac{1}{R_1}\frac{dv_1}{d\theta} - \frac{u_1 + v_1\cos\theta}{R_2\sin\theta} \\
\varkappa_{11} = \frac{-1}{R_1}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{R_1}\frac{dw_1}{d\theta} - \frac{u_1}{R_1}\right) \\
\varkappa_{21} = \frac{1}{R_2\sin\theta}\left[\frac{w_1 + v_1\sin\theta}{R_2\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{R_1}\left(\frac{dw_1}{d\theta} - u_1\right)\right] \\
\tau_1 = \frac{1}{R_2\sin\theta}\left[\frac{1}{R}\frac{dw_1}{d\theta} - \frac{u_1}{R_1} - \frac{\cos\theta\,(w_1 + v_1\sin\theta)}{R_2\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{R_1}\frac{dv_1}{d\theta}\right]
\end{gathered} \tag{19}$$

и учитывая, что при этом (17), (18) должны тождественно удовлетворяться, убеждаемся, что

$$C_3 = C_4 = 0$$

В результате отыскания четырех интегралов исходной системы дифференциальных уравнений порядок ее понижается вдвое.

Для того чтобы убедиться в этом, выпишем полученную систему:

$$\nu t_1 - \nu s\cos\theta - 2h_1\sin\theta\cos\theta + m_1\sin\theta =$$

$$= \nu\left[f_0(q_{11}, q_{21}, q_{n1}) + f_1(P, M)\right] + \cos\theta\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta \tag{20}$$

$$\frac{1}{R_1\nu}\left[\frac{d}{d\theta}(m_1\nu) + R_1h_1 - m_2R_1\cos\theta\right] - s\sin\theta + \frac{h_1}{\nu}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \tag{21}$$

$$- \frac{m_1\cos\theta}{\nu} = F_0(q_{11}, q_{21}, q_{n1}) + F_1(P, M) + \frac{\sin\theta}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta$$

$$\nu\varkappa_{21} + \nu\tau_1\cos\theta - \varepsilon_{21}\sin\theta - \omega\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{22}$$

$$\frac{1}{R_1}\frac{d\varepsilon_{21}}{d\theta} - \tau_1\sin\theta - \frac{\omega\cos^2\theta}{\nu} - \frac{\varepsilon_{11}\cos\theta}{\nu} = 0 \tag{23}$$

$$\nu\frac{ds}{d\theta} + 2sR_1\cos\theta + 2\frac{dh_1}{d\theta}\sin\theta + 2h_1\cos\theta - R_1t_2 + \tag{24}$$

$$+ 2h_1\frac{R_1\sin\theta\cos\theta}{\nu} - m_2\frac{R_1\sin\theta}{\nu} + q_{21}R_1R_2\sin\theta = 0$$

$$- R_1\varkappa_{11} - \nu\frac{d\tau}{d\theta} - 2R_1\cos\theta\tau + \omega\cos\theta + \sin\theta\frac{d\omega}{d\theta} + \tag{25}$$

$$+ \frac{R_1\sin\theta\cos\theta}{\nu}\omega + \frac{R_1\sin\theta}{\nu}\varepsilon_{11} = 0$$

$$f_0(q_{11}, q_{21}, q_{n1}) = f_0(q) = -\frac{\cos\theta}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta}(q_{11}\cos\theta + q_{n1}\sin\theta)R_1R_2\sin\theta\, d\theta +$$

$$+ \frac{\sin\theta}{\nu^2}\left\{\int_{\theta'}^{\theta}(-q_{11}\sin\theta + q_{n1}\cos\theta)R_1R_2^2\sin^2\theta\, d\theta -\right.$$

$$\left. - \int_{\theta'}^{\theta}(q_{11}\cos\theta - q_{21} + q_{n1}\sin\theta)R_1R_2\sin\theta\left[\int_{\theta'}^{\theta}R_1\sin\theta\, d\theta\right]d\theta\right\}$$

$$f_1(P, M) = -\frac{P\cos\theta}{\pi\nu} - \left(\frac{M}{\pi} + \frac{P}{\pi}\int_{\theta'}^{\theta}R_1\sin\theta\, d\theta\right)\frac{\sin\theta}{\nu^2} \tag{26}$$

$$F_0(q_{11}, q_{21}, q_{n1}) = F_0(q) = -\frac{\sin\theta}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta}(q_{11}\cos\theta + q_{n1}\sin\theta)R_1R_2\sin\theta\, d\theta -$$

$$- \frac{\cos\theta}{\nu^2}\left\{\int_{\theta'}^{\theta}(-q_{11}\sin\theta + q_{n1}\cos\theta)R_1R_2^2\sin^2\theta\, d\theta -\right.$$

$$\left. - \int_{\theta'}^{\theta}(q_{11}\cos\theta - q_{21} + q_{n1}\sin\theta)R_1R_2\sin\theta\left[\int_{\theta'}^{\theta}R_1\sin\theta\, d\theta\right]d\theta\right\}$$

$$F_1(P, M) = -\frac{P\sin\theta}{\pi\nu} + \left(\frac{M}{\pi} + \frac{P}{\pi}\int_{\theta'}^{\theta}R_1\sin\theta\, d\theta\right)\frac{\cos\theta}{\nu^2}$$

Уравнение (20) получено в результате исключения из интегралов (13) и (14) величины n_1, уравнение (21) получено из тех же интегралов исключением t_1, (22) и (23) представляют собой уравнения неразрывности, полученные из выписанных ранее интегралов (17), (18) исключением величин $d\varepsilon_{21}/d\theta$ и $\varkappa_{21}$ соответственно, (24) — второе уравнение статики после исключения из него n_2, (25) — второе уравнение неразрывности. Заметим, что уравнения совместности (22), (23), (25) при помощи соотношений упругости можно было бы записать в усилиях и моментах и тогда система состояла бы из шести уравнений, достаточных для определения шести неизвестных величин t_1, t_2, s, m_1, m_2, h_1. Однако эта система, несмотря на понижение порядка дифференциальных уравнений, все же была бы очень сложной.

С целью приведения ее к более простому виду употребим прием, аналогичный приему Мейсснера при преобразовании системы уравнений осесимметричной задачи.

Из соотношений (19) непосредственно следует

$$\varkappa_{11} = \frac{1}{R_1}\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{\psi\cos\theta}{\nu} + \frac{\varepsilon_{21}\sin\theta}{\nu}, \qquad \tau_1 = -\frac{\psi}{\nu} + \frac{\omega_1\sin\theta}{\nu}$$

$$\varkappa_{21} = \frac{\psi\cos\theta}{\nu} + \frac{\varepsilon_{21}\sin\theta}{\nu} \tag{27}$$

где

$$\psi = -\frac{1}{R_1}\left(\frac{dw_1}{d\theta} - u_1\right) + \frac{w_1\cos\theta - u_1\sin\theta}{\nu} \tag{28}$$

Нетрудно проверить, что после исключения ψ из трех уравнений (27) получаются два соотношения, совпадающие с (22) и (25). Таким образом один из интегралов и второе уравнение совместности с помощью представления (27) тождественно удовлетворяются.

Аналогично представим усилия через некоторую функцию плюс нагрузочные члены, подобранные так, чтобы удовлетворить двум неоднородным уравнениям статики

$$t_2 = -\frac{1}{R_1}\frac{dV}{d\theta} + \frac{V\cos\theta}{\nu} - \frac{m_2\sin\theta}{\nu} - \frac{\cos\theta}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta$$

$$t_1 = \frac{V\cos\theta}{\nu} - \frac{m_1\sin\theta}{\nu} + f_0(q) + f_1(P, M) \tag{29}$$

$$s = \frac{V}{\nu} - \frac{2h_1}{\nu}\sin\theta - \frac{1}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta$$

Исключая из (29) функцию V, можно убедиться, что получаемые при этом два уравнения совпадают с (20) и (24).

Чтобы получить уравнения для определения введенных функций ψ и V, остается использовать уравнения (21) и (23) и соотношения упругости, при помощи которых все усилия и моменты могут быть выражены через ψ и V.

Действительно, из (27), (29) и соотношений упругости (уравнения (12.1) [3]), пренебрегая при проведении выкладок величинами порядка

h^2/ν^2 по сравнению с единицей, получим

$$\frac{1}{D}m_1 = \frac{1}{R_1}\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{(1+\mu)\psi\cos\theta}{\nu} + \frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{V\sin\theta\cos\theta}{\nu^2} + \\ + \frac{\sin\theta}{Eh\nu}(1-\mu^2)[f_0(q)+f_1(P,M)]$$

$$\frac{1}{D}m_2 = \frac{\mu}{R_1}\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{(1+\mu)\psi\cos\theta}{\nu} + \frac{\sin\theta(1-\mu^2)}{Eh\nu}\left[\frac{V\cos\theta}{\nu} + \frac{1}{R_1}\frac{dV}{d\theta}\right] - \\ - \frac{(1-\mu^2)\sin\theta\cos\theta}{Eh\nu^2}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta, \tag{30}$$

$$\frac{h_1}{D} = -\frac{\psi(1-\mu)}{\nu} + \frac{2(1-\mu^2)}{Eh}\frac{V\sin\theta}{\nu^2} - \frac{2(1-\mu^2)\sin\theta}{Eh\nu^2}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta$$

$$t_1 = \frac{V\cos\theta}{\nu} - \frac{\sin\theta D}{\nu}\left[\frac{1}{R_1}\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{(1+\mu)\psi\cos\theta}{\nu}\right] + f_0(q) + f_1(P,M)$$

$$t_2 = \frac{1}{R_1}\frac{dV}{d\theta} + \frac{V\cos\theta}{\nu} - \frac{\sin\theta D}{\nu}\left[\frac{\mu}{R_1}\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{(1+\mu)\psi\cos\theta}{\nu}\right] - \\ - \frac{-\cos\theta}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta$$

$$s = \frac{V}{\nu} + \frac{2(1-\mu)\sin\theta D}{\nu}\frac{\psi}{\nu} - \frac{1}{\nu}\int_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\, d\theta$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Подставляя выражения для усилий и моментов (формулы (30)) в уравнение (21) и в уравнение (23), записанное в усилиях и моментах:

$$\frac{1}{R_1}\frac{d}{d\theta}(t_2-\mu t_1) - \frac{12(1+\mu)}{h^2}h_1\sin\theta - \frac{2(1+\mu)s\cos^2\theta}{\nu} - (t_1-\mu t_2)\frac{\cos\theta}{\nu} = 0 \tag{31}$$

получим два уравнения относительно функций ψ и V:

$$\frac{D}{R_1^2}\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{D}{R_1\nu}\frac{d\psi}{d\theta}\left[-\frac{\nu}{R_1^2}\frac{dR_1}{d\theta} + \cos\theta\right] + \frac{D\psi}{R_1\nu}\left[-(1+\mu)\sin\theta - \right. \\ \left. - \frac{2(1-\mu)R_1}{\nu} - \frac{2(1+\mu)R_1\cos^2\theta}{\nu}\right] + V\left[-\frac{\sin\theta}{\nu} + \frac{\sin\theta}{\nu}\frac{h^2}{12\nu^2}\cos^2\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{R_1}\frac{h^2}{12\nu^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right] = F_0(q) + F_1(P,M) \tag{32}$$

$$\frac{1}{R_1^2}\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{dV}{d\theta}\left(-\frac{1}{R_1^3}\frac{dR_1}{d\theta} + \frac{\cos\theta}{R_1\nu}\right) + V\left[-\frac{(1-\mu)\sin\theta}{R_1\nu} - \frac{2(1-\mu)}{\nu^2} - \right. \\ \left. - \frac{2(1-\mu)\cos^2\theta}{\nu^2}\right] + (1-\mu^2)D\psi\left[\frac{12}{h^2}\frac{\sin\theta}{\nu} - \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\nu^3} + \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{R_1\nu^2}\right] = \\ = \frac{\mu}{R_1}\frac{d[f_0(q)+f_1(P,M)]}{d\theta} + \frac{\cos\theta}{\nu}[f_0(q)+f_1(P,M)] + f(q_{21}) \tag{33}$$

где

$$f(q_{21}) = \frac{1}{R_1}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\cos\theta}{\nu}\int\limits_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\,d\theta\right] +$$

$$+ [\mu\cos^2\theta - 2(1+\mu)]\frac{1}{\nu^2}\int\limits_{\theta'}^{\theta} q_{21}R_1R_2\sin\theta\,d\theta$$

Введем новые функции v и ψ_1, связанные с V и ψ соотношениями:

$$v = \frac{V}{R_1{}^2}, \qquad \psi_1 = \frac{Eh\psi}{R_1} \tag{34}$$

и обозначим

$$\frac{12(1-\mu^2)R_1{}^2}{h^2} = 4\gamma^4$$

Умножая (32) на $R_1 12(1-\mu^2)/h^2$ и (33) на $(-2i\gamma^2)$, в результате почленного сложения полученных уравнений придем к одному уравнению относительно комплексной функции $\sigma = \psi_1 - 2i\gamma^2 v$:

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \frac{d\sigma}{d\theta}\left(-\frac{1}{R_1}\frac{dR_1}{d\theta} + \frac{R_1\cos\theta}{\nu}\right) + \sigma\left(-\frac{R_1\sin\theta}{\nu} - \frac{2R_1{}^2}{\nu^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{2R_1{}^2\cos^2\theta}{\nu^2}\right) + \bar{\sigma}\mu\left(-\frac{R_1\sin\theta}{\nu} + \frac{2R_1{}^2}{\nu^2}\sin^2\theta\right) + \tag{35}$$

$$+ 2i\gamma^2\left[-\frac{R_1\sin\theta}{\nu} + \frac{R_1\sin\theta}{\nu}\frac{h^2}{12\nu^2}\cos^2\theta + \frac{h^2}{12\nu^2}(1 - 2\sin^2\theta)\right]\sigma = \Phi(q, P, M)$$

где

$$\Phi(q, P, M) = [F_0(q) + F_1(P, M)]\frac{12(1-\mu^2)R_1}{h^2} -$$

$$- 2i\gamma^2\left[\frac{\mu}{R_1}\frac{d(f_0 + f_1)}{d\theta} + \frac{\cos\theta}{\nu}(f_0 + f_1) + f(q_{21})\right] \tag{36}$$

Оставаясь в пределах точности теории тонких оболочек, отбросим в коэффициенте при неизвестной функции σ в уравнении (35) члены, имеющие порядок h/R_1 и h^2/ν^2 по сравнению с единицей, тогда получим окончательно

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \frac{d\sigma}{d\theta}\left(-\frac{1}{R_1}\frac{dR_1}{d\theta} + \frac{R_1\cos\theta}{\nu}\right) - 2i\gamma^2\frac{R_1\sin\theta}{\nu}\sigma = \Phi(q, P, M) \tag{37}$$

Поступила 14 X 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошутин М. П. Задачи изгиба цилиндрической оболочки. Тр. ЛПИ, № 192, Машгиз, 1958.
2. Лурье А. И. Об уравнениях общей теории упругих оболочек. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.