

## СВЯЗЬ МЕЖДУ ДИСЛОКАЦИЯМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

К. Ф. Черных

(Ленинград)

Вводятся величины, непосредственно характеризующие деформацию нормального элемента, связанного с данной произвольной линией срединной поверхности (в [7], [8] они были введены для линий кривизны).

Через введенные величины вектор смещений определяется при помощи одного (в отличие от [4]) контурного интеграла. Это дает возможность построить (аналогично тому, как это делается в плоской задаче) теорию дислокаций и выделить из функций напряжения неоднозначные части, связанные с несамоуравновешенностью нагрузок на контурах многосвязной области. Намечается дислокационный подход к задачам о действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку.

1. Срединную поверхность оболочки отнесем к линиям главных кривизн  $\alpha_1, \alpha_2$ . При этом  $A_1, A_2, R_1, R_2$  — соответствующие параметры Ляме и главные радиусы кривизны. Относительно граничного контура  $L$  предположим, что он состоит из нескольких замкнутых гладких контуров  $L_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), могущих не совпадать с линиями главных кривизн. Наряду с основной системой ортов  $\{e_1, e_2, e_n\}$  введем систему [1], связанную с данной линией  $L'$   $\{e_v, e_t, e_n\}$  (фиг. 1). Очевидно (фиг. 2),  $e_v = \cos \gamma e_1 + \sin \gamma e_2, e_t = -\sin \gamma e_1 + \cos \gamma e_2$

$$(\gamma = \gamma(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = e_1 \cdot e_v) \quad (1.1)$$

Введем также

$$\frac{1}{R_v} = \frac{\cos^2 \gamma}{R_1} + \frac{\sin^2 \gamma}{R_2}, \quad \frac{1}{R_t} = \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \quad \frac{1}{R_{vt}} = \sin \gamma \cos \gamma \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.2)$$

С линией  $L'$  свяжем вектор смещений

$$\mathbf{U} = \xi e_v + \eta e_t + \omega e_n = u e_1 + v e_2 + \omega e_n \quad (1.3)$$

и вектор углов поворота

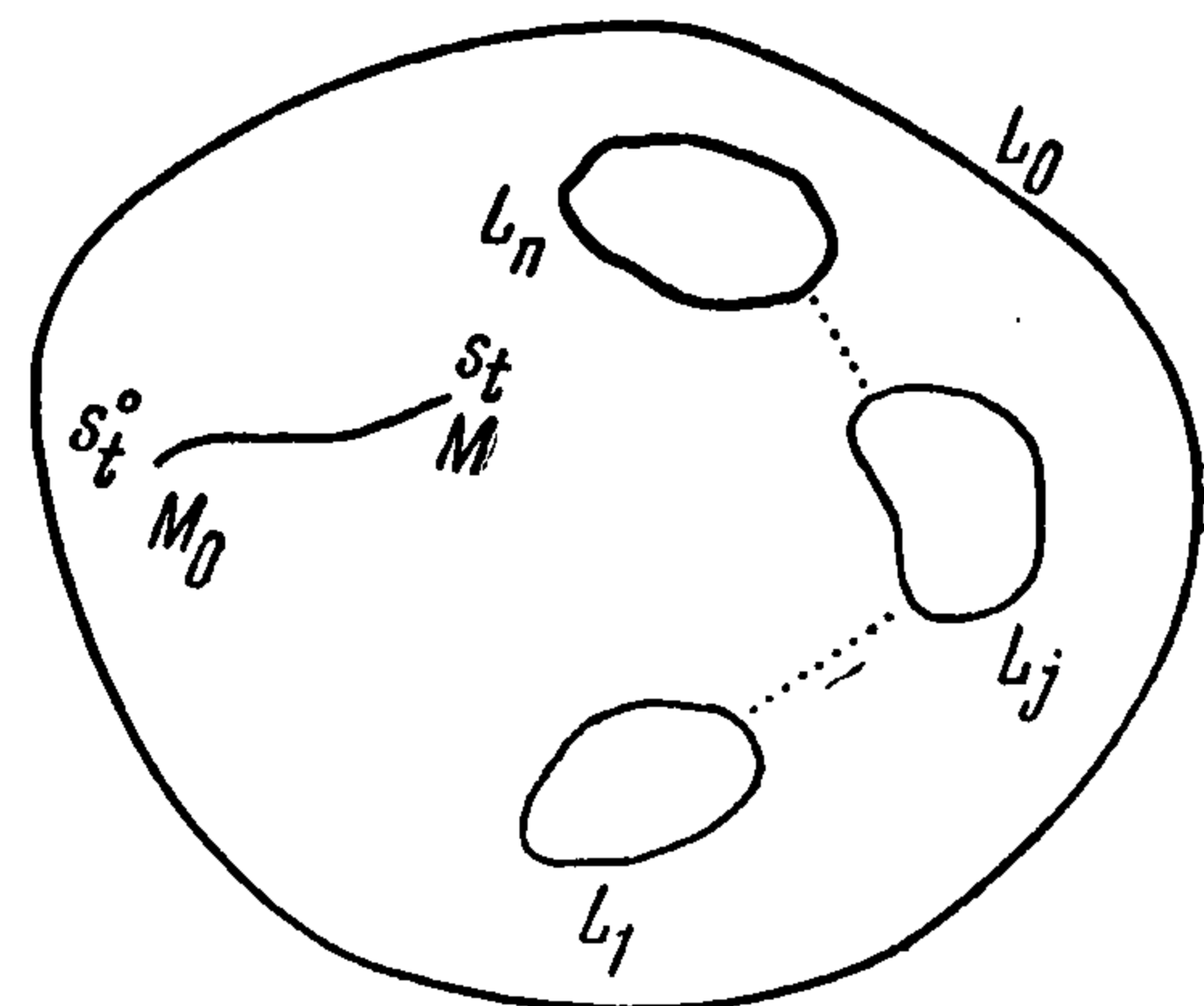
$$\Omega_t = -\omega_t e_v + \omega_v e_t - \omega_{tv} e_n = -\phi e_1 + \vartheta e_2 - \omega_{tv} e_n \quad (1.4)$$

Нетрудно установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_v &= \cos \gamma \vartheta + \sin \gamma \phi, & \omega_t &= -\sin \gamma \vartheta + \cos \gamma \phi \\ \omega_{tv} &= \cos^2 \gamma \omega_2 + \sin \gamma \cos \gamma (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \sin^2 \gamma \omega_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Деформацию нормального элемента, срединной линией которого является  $L'$ , характеризуют растяжение срединной линии

$$\varepsilon_t = \cos^2 \gamma \varepsilon_2 - \sin \gamma \cos \gamma \omega + \sin^2 \gamma \varepsilon_1 \quad (1.6)$$



Фиг. 1

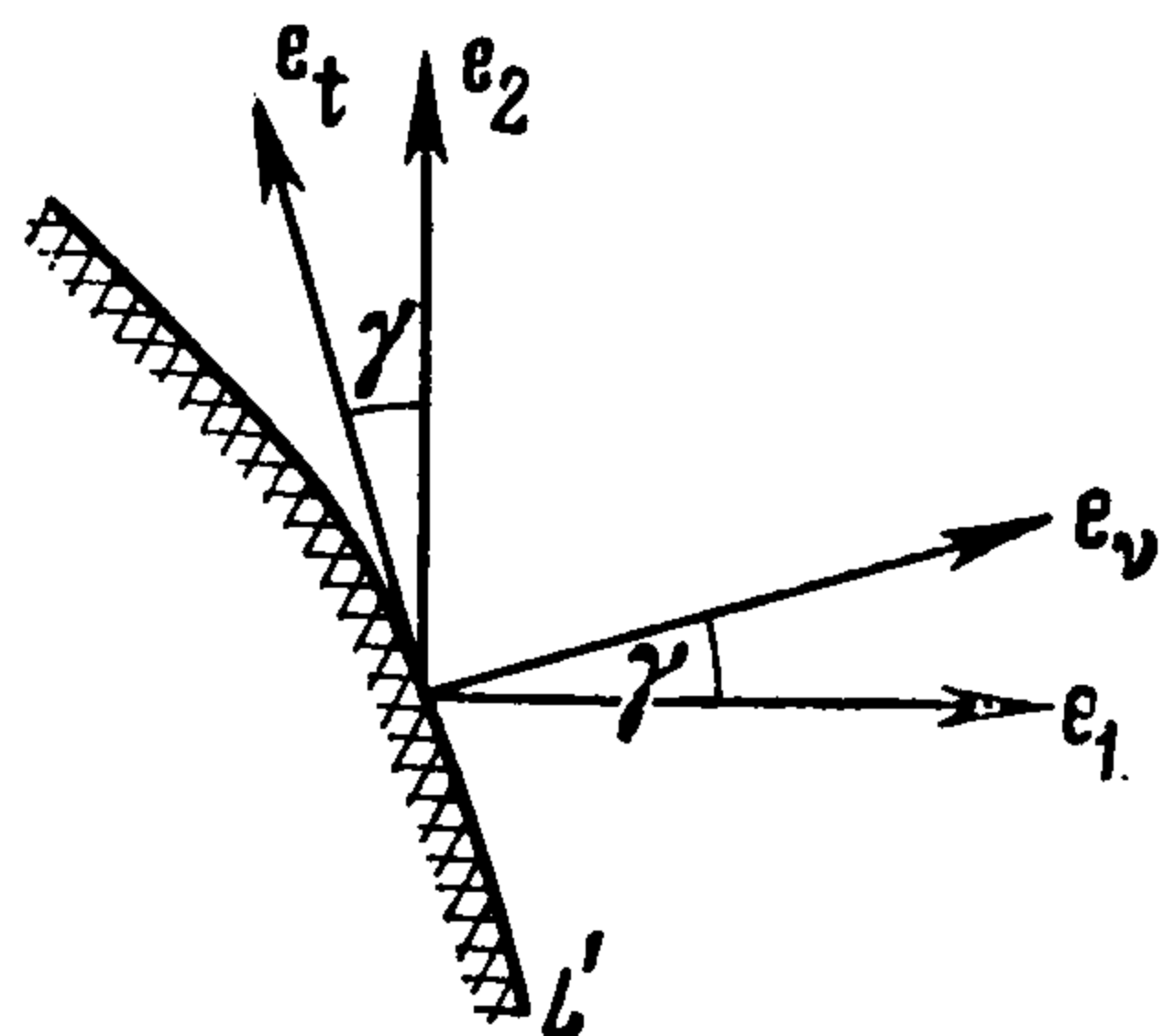
и вектор изменения кривизны

$$\kappa_t = -\kappa_{tt}\mathbf{e}_v + \kappa_{tv}\mathbf{e}_t - \kappa_{tn}\mathbf{e}_n \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{tt} &= \cos^2 \gamma \kappa_2 - 2 \sin \gamma \cos \gamma \tau + \sin^2 \gamma \kappa_1 + \sin \gamma \cos \gamma \left( \frac{\omega}{R_t} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_{vt}} \right) \\ \kappa_{tv} &= \sin \gamma \cos \gamma (\kappa_2 - \kappa_1) + (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \tau - \\ &\quad - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{R_t} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \left( \frac{\sin^4 \gamma}{R_1} - \frac{\cos^4 \gamma}{R_2} \right) \omega \\ \kappa_{tn} &= -\frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 \omega}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varepsilon_1 \right) - \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1 \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \omega}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varepsilon_2 \right) + \\ &\quad + \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \sin \gamma \cos \gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \cos^2 \gamma \omega \right] - \\ &\quad - \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[ \sin \gamma \cos \gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \sin^2 \gamma \omega \right] \end{aligned}$$

Пользуясь выписанными соотношениями и известными правилами дифференцирования ортов [2], можно установить два основных соотношения:



Фиг. 2

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial s_t} = \omega_{tv} \mathbf{e}_v + \varepsilon_t \mathbf{e}_t - \omega_t \mathbf{e}_n = \varepsilon_t \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{e}_t \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_t}{\partial s_t} = \kappa_t \quad (1.9)$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial s_t} = -\frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}$$

производная по касательной к  $L'$ . При этом

$$\begin{aligned} \kappa_{tt} &= \frac{\partial \omega_t}{\partial s_t} + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \omega_v - \frac{\omega_{tv}}{R_{vt}}, \quad \kappa_{tn} = \frac{\partial \omega_{tv}}{\partial s_t} + \frac{\omega_t}{R_{vt}} + \frac{\omega_v}{R_t} \\ \kappa_{tv} &= \frac{\partial \omega_v}{\partial s_t} - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \omega_t - \frac{\omega_{tv}}{R_t} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Имеем также и следующее соотношение:

$$\omega_v = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial s_v} \cdot \mathbf{e}_n \quad \left( \frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{\cos \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \quad (1.11)$$

производная по нормали к  $L'$ .

С рассматриваемым элементом связаны: вектор усилий

$$\mathbf{T}_v' = T_{vv}' \mathbf{e}_v + T_{vt}' \mathbf{e}_t + T_{vn}' \mathbf{e}_n \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} T_{vv}' &= T_{vv} - \frac{M_{vt}}{R_{vt}} = T_1 \cos^2 \gamma + 2S \sin \gamma \cos \gamma + T_2 \sin^2 \gamma + \\ &\quad + \left( \frac{2H}{R_t} + \frac{M_1 - M_2}{R_{vt}} \right) \sin \gamma \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{vt}' &= T_{vt} + \frac{M_{vt}}{R_t} = (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) S + \sin \gamma \cos \gamma (T_2 - T_1) + \\ &\quad + \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{R_t} (M_2 - M_1) + \left( -\frac{\sin^4 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^4 \gamma}{R_2} \right) 2H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{vn}' = T_{vn} + \frac{\partial M_{vt}}{\partial s_t} = \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 2H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + \\
 + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 2H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) - \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [\sin \gamma \cos \gamma (M_2 - M_1) + \\
 + \cos^2 \gamma 2H] + \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [\sin \gamma \cos \gamma (M_2 - M_1) - 2H \sin^2 \gamma]
 \end{aligned}$$

и изгибающий момент

$$M_v = M_1 \cos^2 \gamma + 2H \sin \gamma \cos \gamma + M_2 \sin^2 \gamma. \quad (1.13)$$

Получим выражение вектора смещений через компоненты деформации. Из (1.8)

$$U = U_0 + \int_{s_{t_0}}^{s_t} \{\varepsilon_t \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{e}_t\} ds_t$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{e}_t = \frac{\partial (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\partial s_t} \quad (1.14)$$

( $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_0$  — соответственно радиусы-векторы текущей точки  $L'$  и ее начала), и учитывая (1.9), получим после интегрирования по частям

$$U = U_0 + \boldsymbol{\Omega}_{t_0} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{s_{t_0}}^{s_t} \{\varepsilon_t \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\kappa}_t \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\} ds_t + \left( \int_{s_{t_0}}^{s_t} \boldsymbol{\kappa}_t ds_t \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.15)$$

2. Дислокациями, следуя Ляву ([3], стр. 232), будем называть неоднозначные (в многосвязной области) смещения, отвечающие однозначным компонентам деформации. Полагая, следовательно, что  $\boldsymbol{\kappa}_t$  и  $\varepsilon_t$  однозначны, исследуем характер возможной неоднозначности смещений.

Рассмотрим контур  $L_j'$ , начинающийся и заканчивающийся (фиг. 3) в точке  $M_j$  и охватывающий  $L_j$ . Начальное значение вектора смещений

$$U^- = U_0 + \boldsymbol{\Omega}_{t_0} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

Обходя контур  $L_j$ , мы можем согласно (1.15) вернуться в  $M$  с другим значением вектора смещения:

$$U^+ = U_0 + \boldsymbol{\Omega}_{t_0} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + \oint_{L_j'} \{\varepsilon_t \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\kappa}_t \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)\} ds_t + \left( \oint_{L_j'} \boldsymbol{\kappa}_t ds_t \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

Таким образом, приращение вектора смещения при обходе  $L_j'$  дается выражением

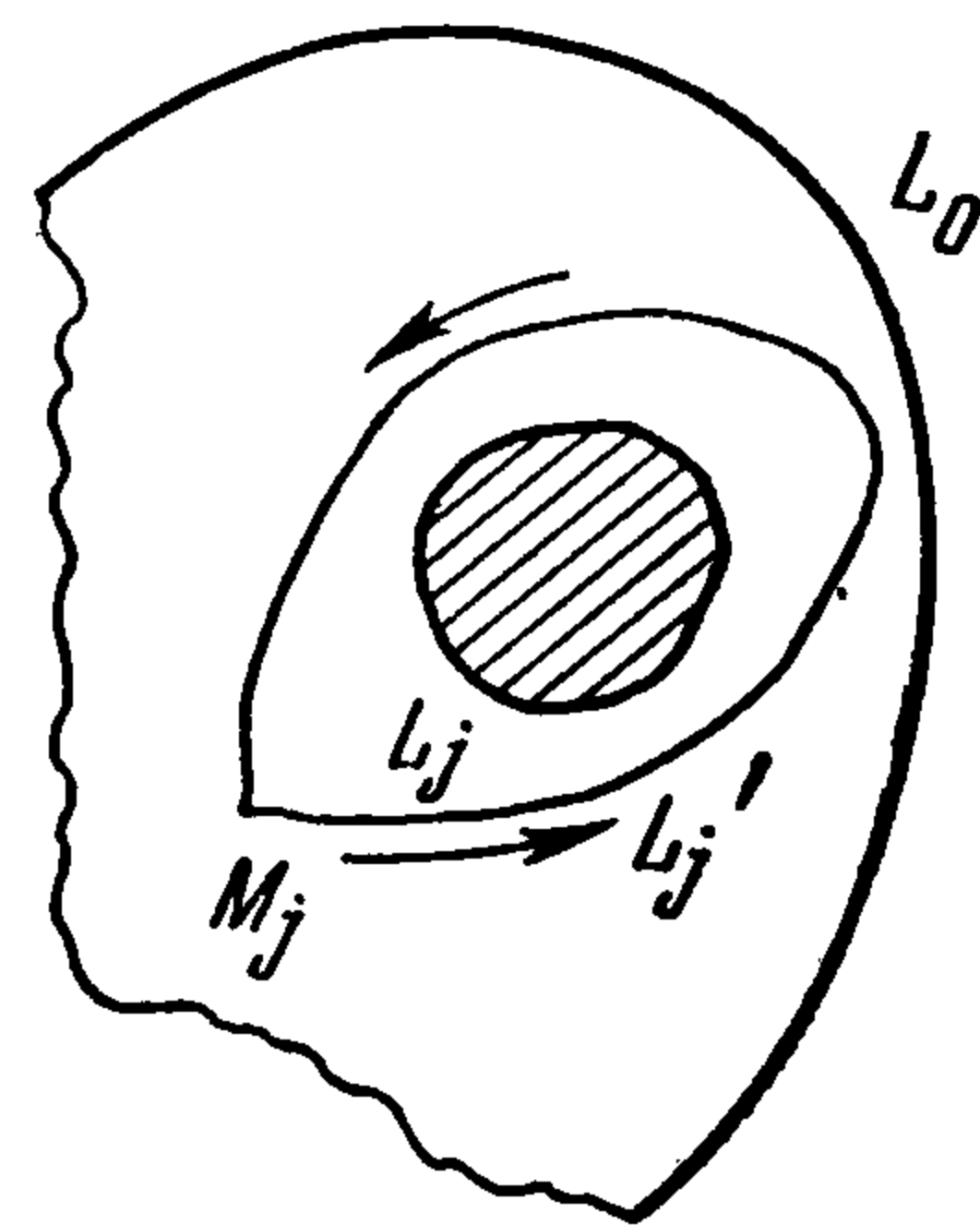
$$U^+ - U^- = U_j + \boldsymbol{\Omega}_j \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (2.1)$$

Постоянные

$$U_j = \oint_{L_j'} \{\varepsilon_t \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\kappa}_t \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)\} ds_t, \quad \boldsymbol{\Omega}_j = \oint_{L_j'} \boldsymbol{\kappa}_t ds_t \quad (2.2)$$

будем называть параметрами дислокации.

Отметим, что они не зависят от вида контура, охватывающего  $L_j$ . В этом легко убедиться, рассмотрев интеграл по суммарному контуру, образуемому двумя какими-либо контурами  $L_j'$  и  $L_j''$ , охватывающими  $L_j$ . Преобразуя при помощи (1.1), (1.6) и (1.7) контурный интеграл по области, заключенной внутри этого контура, убедимся, что подынтегральное



Фиг. 3

выражение в силу уравнений неразрывности срединной поверхности обратится в нуль. А это и доказывает независимость  $U_j$  и  $\Omega_j$  от вида  $L_j'$ .

Можно предложить сравнительно простой прием построения дислокационной части вектора смещений. Для этого рассмотрим выражение

$$\{U_j + \Omega_j \times (r - r_j)\} \Phi_j \quad (2.3)$$

Относительно  $\Phi_j(\alpha_1, \alpha_2)$  предположим, что она:

- 1) дает при обходе  $L_j$  приращение 1, а при обходе остальных — нуль;
- 2) производные от нее по любому направлению — однозначные функции.

Тогда нетрудно убедиться, что выражение (2.3) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к дислокации. Примеры построения дислокационных функций будут рассмотрены ниже.

К дислокационным смещениям приводят задачи о расчете оболочек, из которых вырезан (или добавлен) малый кусок, а затем один край путем перемещения как жесткого целого совмещен с другим. При этом предполагается, что края разреза конгруэнтны.

Будем считать, что величины параметров дислокации известны. Тогда искомому дислокационному смещению можно придать вид:

$$U = \sum_j \{U_j + \Omega_j \times (r - r_j)\} \Phi_j + U^{\circ\circ} \quad (2.4)$$

где  $U^{\circ\circ}$  — однозначная часть, дающая возможность удовлетворить граничным условиям и поверхностной нагрузке, имеющим место в рассматриваемой задаче. Из (1.8) следует

$$\varepsilon_t = \frac{\partial U}{\partial s_t} \cdot e_t, \quad \omega_{tv} = \frac{\partial U}{\partial s_t} \cdot e_v, \quad \omega_t = - \frac{\partial U}{\partial s_t} \cdot e_n$$

Используя эти соотношения, а также (1.10), (1.14) и очевидное равенство  $\partial(r - r_j) / \partial s_v = e_v$ , получим выражение для компонент деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ttj} &= -W_j \cdot e_n \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s_t^2} + \left[ -W_j \cdot \frac{e_t}{R_t} - 2\Omega_j \cdot e_v \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} - \\ &\quad - W_j \cdot e_n \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_v} \\ \varepsilon_{tvj} &= -W_j \cdot e_n \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s_t \partial s_v} + \left[ -W_j \cdot \frac{e_t}{R_t} + W_j \cdot \frac{e_v}{R_{vt}} - \Omega_j \cdot e_v \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_v} + \\ &\quad + \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) W_j \cdot e_n - W_j \cdot \frac{e_v}{R_t} + \Omega_j \cdot e_t \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} \\ \varepsilon_{tnj} &= W_j \cdot e_v \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s_t^2} + \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) W_j \cdot e_t - \right. \\ &\quad \left. - 2\Omega_j \cdot e_n \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} - W_j \cdot \frac{e_n}{R_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_v} \\ \varepsilon_{tj} &= W_j \cdot e_t \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} \quad (W_j = U_j + \Omega_j \times (r - r_j)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Иллюстрируем сказанное выше на примере оболочки вращения (фиг. 4), из которой был удален кусок, ограниченный двумя близкими меридианами, а затем края совмещены.

Имеем ([<sup>1</sup>], стр. 241)

$$\alpha_1 = \theta, \quad \alpha_2 = \varphi, \quad A_1 = R_1(\theta), \quad A_2 = \rho = R_2(\theta) \sin \theta, \quad \frac{d\rho}{d\theta} = R_1 \cos \theta$$

Положим

$$U_1 = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_{z1} e_z, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \varphi$$

Так как

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \rho \mathbf{e}_s + z \mathbf{e}_z, \quad u^s = w^s = 0, \quad v^s = \frac{1}{2\pi} \Omega_{z1} \rho \varphi \quad (2.6)$$

Наконец, из (2.6) получим, используя (1.6) и (1.7):

$$\varepsilon_1 = \omega = \kappa_1 = \tau = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2\pi} \Omega_{z1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2\pi} \Omega_{z1} \frac{1}{R_2} \quad (2.7)$$

По этим выражениям нетрудно при помощи соотношений, связывающих усилия-моменты с компонентами деформации, получить выражения для усилий-моментов, а по ним определить статические граничные условия и поверхностную нагрузку, отвечающую смещениям (2.6).

В предыдущих рассуждениях мы ничего не предполагали о величине контура  $L_j$ . Важно было лишь его существование. Отсюда следует справедливость полученных соотношений и в случае, когда  $L_j$  стянут в точку, если не рассматривать ближайшей окрестности выродившегося контура, в которой полученные величины могут терять смысл и обращаться в бесконечность.

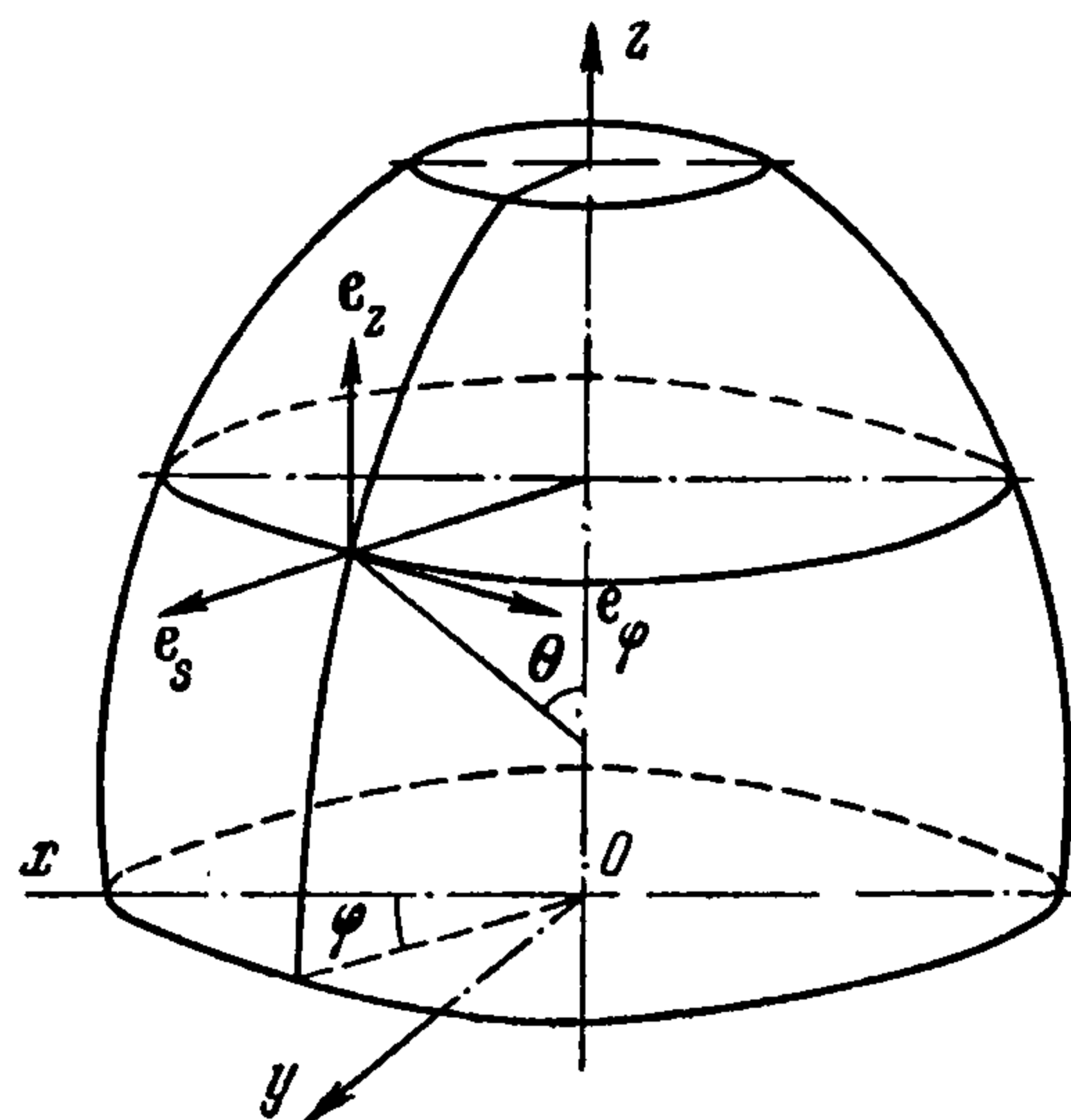
3. Пользуясь подобием систем уравнений равновесия и непрерывности срединной поверхности [<sup>2</sup>], введем функции напряжения  $u^\circ, v^\circ, w^\circ$  следующими дифференциальными соотношениями:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1^* + Ehc\kappa_2^\circ (u^\circ, v^\circ, w^\circ), & M_1 &= M_1^* - Ehc\varepsilon_2^\circ \\ T_2 &= T_2^* + Ehc\kappa_1^\circ, & M_2 &= M_2^* - Ehc\varepsilon_1^\circ \\ S &= S^* - Ehc\tau^\circ, & H &= H^* + Ehc \frac{1}{2} \omega^\circ \end{aligned} \quad \left( c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \right) \quad (3.1)$$

Здесь и ниже нолик над какой-нибудь величиной обозначает, что последняя построена по функциям напряжения.  $(T_1^*, T_2^*, S^*, M_1^*, M_2^*, H^*)$  — некоторое решение неоднородной системы уравнений равновесия. Нетрудно показать, что написанные выражения дают общее решение системы уравнений равновесия. Соотношения (3.1) естественным образом обобщают функции Лурье — Гольденвейзера [<sup>4</sup>], [<sup>5</sup>] на случай неоднородной задачи теории оболочек. Пользуясь введенными функциями при помощи (1.12), (1.13), (1.6) и (1.7), вектору усилий и изгибающему моменту, приложенным к данному контуру, можно придать следующий вид:

$$T_v' = T_v'^* - Ehc\kappa_t^\circ \quad \left( \begin{array}{l} T_{vv}' = T_{vv}'^* + Ehc\kappa_{tt}^\circ \\ T_{vt}' = T_{vt}'^* - Ehc\kappa_{tv}^\circ \\ T_{vn}' = T_{vn}'^* + Ehc\kappa_{tn}^\circ \end{array} \right) \quad (3.2)$$

$$M_v = M_v'^* - Ehc\varepsilon_t^\circ \quad (3.3)$$



Фиг. 4

Величины, снабженные звездочками сверху, отвечают системе функций  $(T_1^*, \dots, H^*)$ .

4°. Рассмотрим участок контура  $s_{t_0}s_t$  (фиг. 5). Главный вектор всех сил, приложенных к дуге  $s_{t_0}s_t$ :

$$\mathbf{F} = \int_{s_{t_0}}^{s_t} \mathbf{T}_v' ds_t = \int_{s_{t_0}}^{s_t} \mathbf{T}_v'^* ds_t - Ehc \int_{s_{t_0}}^{s_t} \kappa_t^\circ ds_t$$

Вспоминая (1.9), получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* - Ehc \{ \Omega_t^\circ - \Omega_{t_0}^\circ \} \quad (3.4)$$

Главный момент всех сил и моментов, приложенных к  $s_{t_0}s_t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{s_{t_0}}^{s_t} M_v \mathbf{e}_t ds_t + \int_{s_{t_0}}^{s_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_v') ds_t = \\ &= \int_{s_{t_0}}^{s_t} M_v^* \cdot \mathbf{e}_t ds_t + \int_{s_{t_0}}^{s_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_v'^*) ds_t - Ehc \left\{ \int_{s_{t_0}}^{s_t} \varepsilon_t^\circ \cdot \mathbf{e}_t ds_t + \int_{s_{t_0}}^{s_t} (\mathbf{r} \times \kappa_t^\circ) ds_t \right\} \end{aligned}$$

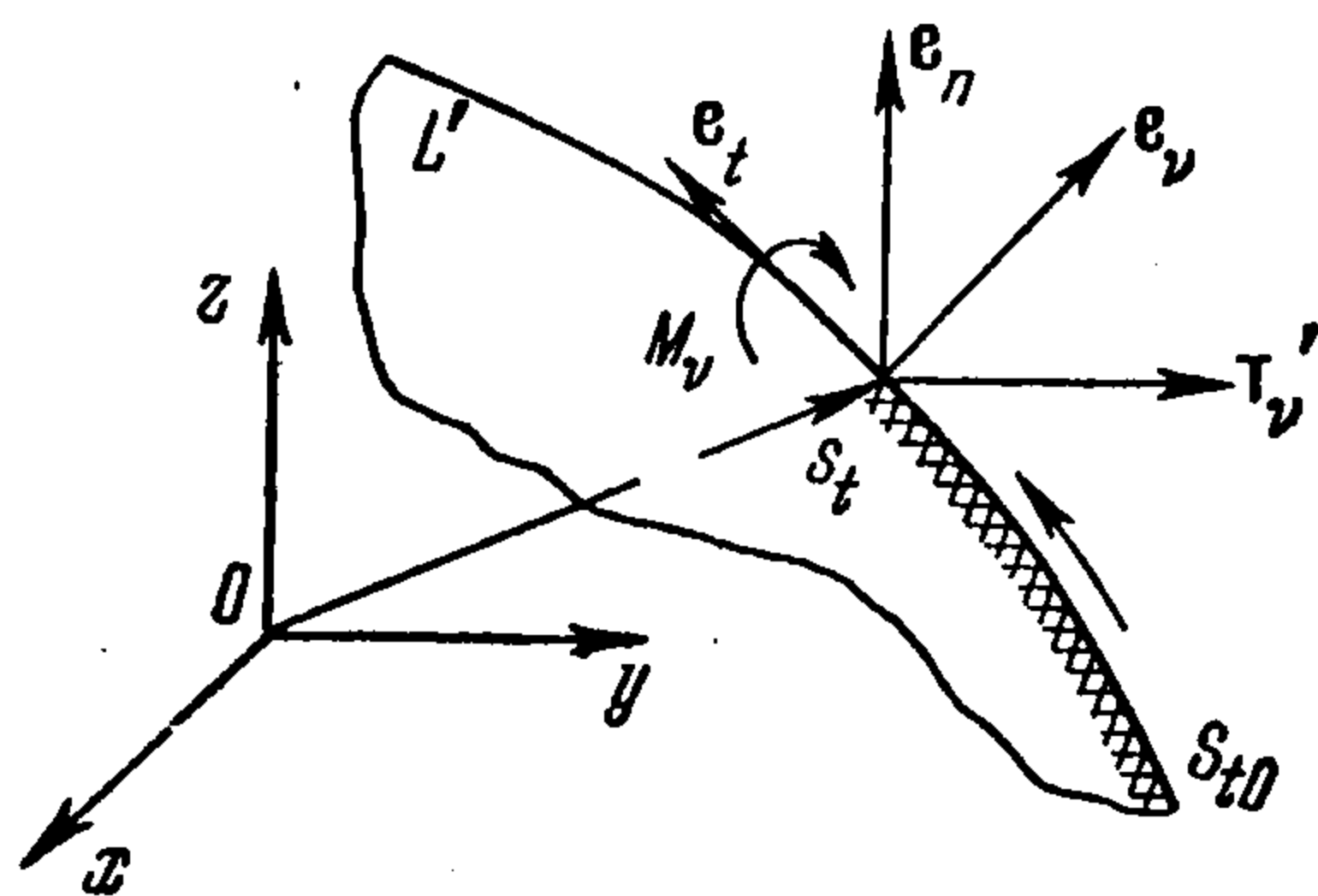
Заменяя в последнем интеграле  $\kappa_t$  его выражением из (1.9) и интегрируя полученный интеграл по частям, получим с учетом (1.8) и (1.14)

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^* - Ehc \{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \Omega_t^\circ + \mathbf{U}^\circ - \mathbf{U}_0^\circ \} \quad (3.5)$$

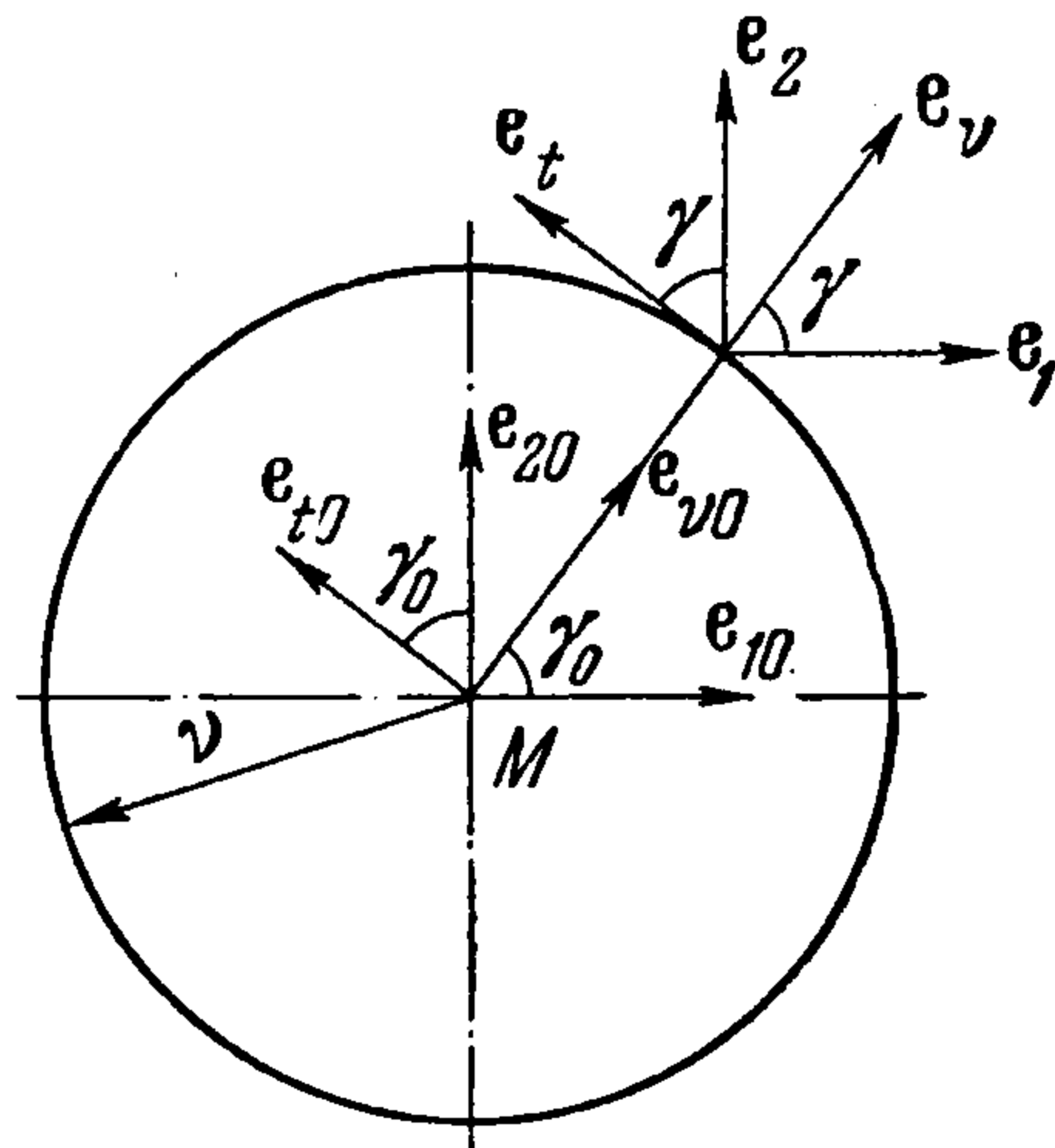
Разрешая (3.4) — (3.5) относительно  $\mathbf{U}^\circ$ , получим

$$\mathbf{U}^\circ = \mathbf{U}_0^\circ + \Omega_{t_0}^\circ \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{1}{Ehc} \{ (\mathbf{M} - \mathbf{M}^*) + (\mathbf{F} - \mathbf{F}^*) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \} \quad (3.6)$$

Последнее соотношение по форме аналогично выражению для вектора смещений (1.15). Поэтому совершенно так же, как это было сделано



Фиг. 5



Фиг. 6

для дислокаций, можно показать, что при обходе  $L_j$  вектор функций напряжения получает приращение

$$\mathbf{U}^{\circ+} - \mathbf{U}^{\circ-} = \mathbf{U}_j^\circ + \Omega_j^\circ \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad \left( \mathbf{U}_j^\circ = -\frac{\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^*}{Ehc}, \Omega_j^\circ = -\frac{\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_j^*}{Ehc} \right) \quad (3.7)$$

Здесь  $\mathbf{F}_j$  и  $\mathbf{M}_j$  — главный вектор и главный момент всех усилий и моментов, приложенных к  $L_j$ .

Далее любой вектор функций напряжения можно представить в виде

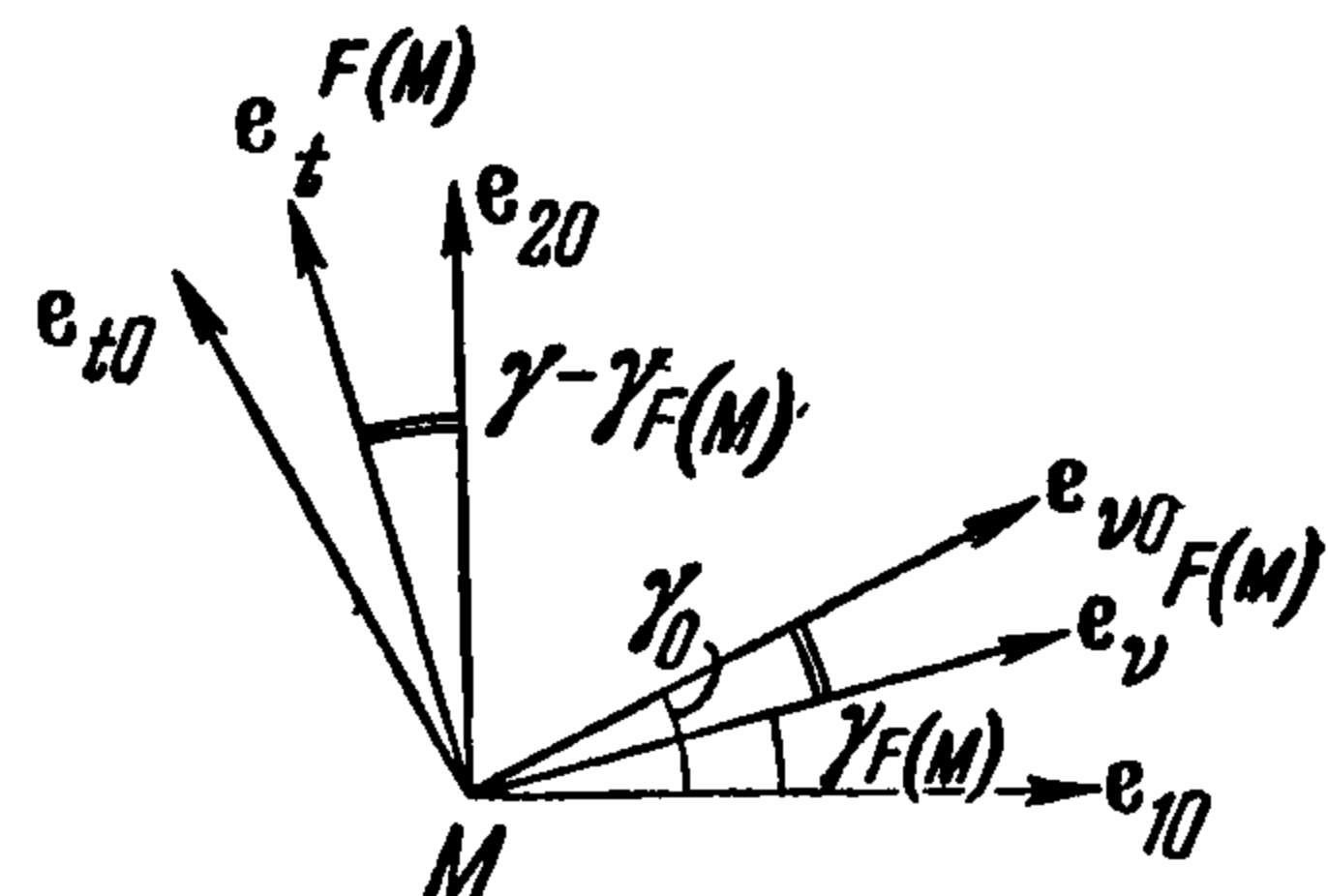
$$\mathbf{U}^\circ = \Sigma_j \{ \mathbf{U}_j^\circ + \Omega_j^\circ \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \} \Phi_j + \mathbf{U}^{\circ\circ} \quad (3.8)$$

где  $\Phi_j$  — та же дислокационная функция, а  $U^{\circ\circ}$  — однозначная часть, обеспечивающая удовлетворение построенных по (3.8) усилий и моментов уравнениям неразрывности.

Будем предполагать, что  $F_j$  и  $M_j$  известны. Величины  $F_j^*$  и  $M_j^*$  также следует считать известными, ибо они построены по выбранному нами частному решению системы уравнений равновесия. Таким образом,  $U_j^\circ$  и  $\Omega_j^\circ$  предполагаются известными. Основная трудность при нахождении неоднозначной части заключается в построении дислокационных функций  $\Phi_j$ . Коль скоро последние построены, при помощи (2.5), (3.2), (3.3) и (3.7) получим следующие выражения для усилий-моментов:

$$\begin{aligned}
 T_{vj}' &= W_j' \cdot e_n \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s_t^2} + \left[ W_j^\circ \cdot \frac{e_t}{R_t} + 2(F_j - F_j^*) \cdot e_v \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) W_j^\circ \cdot e_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_v} \\
 T_{vtj}' &= -W_j^\circ \cdot e_n \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s_t \partial s_v} + \left[ -W_j^\circ \cdot \frac{e_t}{R_t} + W_j^\circ \frac{e_v}{R_{vt}} - (F_j - F_j^*) \cdot e_v \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_v} + \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) W_j^\circ \cdot e_n - W_j^\circ \cdot \frac{e_v}{R_t} + (F_j - F_j^*) \cdot e_t \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} \\
 T_{vnj}' &= -W_j^\circ \cdot e_v \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial s_t^2} + \left[ - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin \gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) W_j^\circ \cdot e_t + \right. \\
 &\quad \left. + 2(F_j - F_j^*) \cdot e_n \right] \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} + W_j^\circ \frac{e_n}{R_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_v} \\
 M_{vj} &= W_j^\circ \cdot e_t \frac{\partial \Phi_j}{\partial s_t} \quad (W_j^\circ = \{(M_j - M_j^*) + (F_j - F_j^*) \times (r - r_j)\}) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Как и раньше, совершенно несущественны размеры внутренних контуров. Если стянуть какой-либо из них (например,  $L_j$ ) в точку, сохраняя величины главного вектора и главного момента, то (3.9) дают значения усилий-моментов для сосредоточенного воздействия с заданной интенсивностью. Исследуем характер особенности решения (3.9) в окрестности приложения сосредоточенного воздействия (предполагая, что рассматриваемая точка не является особенной для срединной поверхности).



Фиг. 7

Введем локальную полугеодезическую систему координат с полюсом в рассматриваемой точке ([6], стр. 445). С точностью до малых величин высшего порядка при  $\nu \ll 1$  можно положить (фиг. 6, 7) (значок  $j$  опустим)

$$\Phi \approx \frac{1}{2\pi} \gamma_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\nu}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s_v} \approx \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_v \partial s_t} \approx \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_t^2} \approx 0 \quad (r - r_0) \approx \nu e_{v0}$$

$$e_v = e_{v0} + \nu \left\{ \left[ -\frac{\cos \gamma_0}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right)_0 + \frac{\sin \gamma_0}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)_0 \right] e_{t0} - \frac{e_{n0}}{R_{v0}} \right\}$$

$$e_t = e_{t0} + \nu \left\{ \left[ \frac{\cos \gamma_0}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right)_0 + \frac{\sin \gamma_0}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)_0 \right] e_{v0} - \frac{e_{n0}}{R_{vt0}} \right\}$$

$$e_n = e_{n0} + \nu \left\{ \frac{e_{v0}}{R_{v0}} - \frac{e_{t0}}{R_{vt0}} \right\}$$

Индекс 0 означает, что отмеченные им величины вычислены в полюсе.

Разложим главный вектор и главный момент на тангенциальную и нормальную к поверхности составляющие:

$$\mathbf{F} = F_T \cdot \mathbf{e}_v^F + F_n \mathbf{e}_{n0}, \quad \mathbf{M} = M_T \cdot \mathbf{e}_v^M + M_n \mathbf{e}_{n0}$$

Очевидно,

$$\mathbf{e}_{v0} = \cos(\gamma_0 - \gamma_F) \mathbf{e}_v^F + \sin(\gamma_0 - \gamma_F) \mathbf{e}_t^F = \cos(\gamma_0 - \gamma_M) \mathbf{e}_v^M + \sin(\gamma_0 + \gamma_M) \mathbf{e}_t^M$$

$$\mathbf{e}_{t0} = -\sin(\gamma_0 - \gamma_F) \mathbf{e}_v^F + \cos(\gamma_0 - \gamma_F) \mathbf{e}_t^F = -\sin(\gamma_0 - \gamma_M) \mathbf{e}_v^M + \cos(\gamma_0 - \gamma_M) \mathbf{e}_t^M$$

При помощи этих соотношений, сохраняя в (3.9) лишь члены, имеющие особенности, получим

$$\mathbf{T}'_v \sim \frac{1}{2\pi} \{ \alpha^T F_T + \alpha^n F_n + \beta^T M_T + \beta^n M_n \}$$

где

$$\alpha^T = \frac{2 \cos^2(\gamma_0 - \gamma_F)}{v} \mathbf{e}_v^F + \frac{\sin 2(\gamma_0 - \gamma_F)}{v} \mathbf{e}_t^F, \quad \alpha^n = \frac{1}{v} \mathbf{e}_{n0} \quad (3.10)$$

$$\beta^T = \frac{\cos 2\gamma_0}{v} \left( \frac{1}{R_{10}} - \frac{1}{R_{20}} \right) \mathbf{e}_t^M + \left\{ \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_M)}{v^3} - \frac{1}{v} \left[ \frac{\cos(2\gamma_0 - \gamma_M)}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)_0 + \frac{\sin(2\gamma_0 - \gamma_M)}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right)_0 \right] \right\} \mathbf{e}_{n0}$$

$$\beta^n = \left\{ -\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_M)}{v^2} + \frac{1}{v} \left[ \frac{\cos(2\gamma_0 - \gamma_M)}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right)_0 - \frac{\sin(2\gamma_0 - \gamma_M)}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)_0 \right] \right\} \mathbf{e}_v^M + \left\{ \frac{\cos(\gamma_0 - \gamma_M)}{v^2} + \frac{1}{v} \left[ \frac{\sin(2\gamma_0 - \gamma_M)}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right)_0 + \frac{\cos(2\gamma_0 - \gamma_M)}{A_{10} A_{20}} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right)_0 \right] \right\} \mathbf{e}_t^M$$

$$M_v = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_M)}{v} M_T \right\} \quad (3.11)$$

Если сохранить в выражениях (3.10) только главные особенности, то

$$2\pi \mathbf{T}'_v \sim \left[ \frac{2 \cos^2(\gamma_0 - \gamma_F)}{v} \mathbf{e}_v^F + \frac{\sin 2(\gamma_0 - \gamma_F)}{v} \mathbf{e}_t^F \right] F_T + \frac{1}{v} \mathbf{e}_{n0} F_n + \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_M)}{v^2} \mathbf{e}_{n0} M_T + \left[ -\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_M)}{v^2} \mathbf{e}_v^M + \frac{\cos(\gamma_0 - \gamma_M)}{v^2} \mathbf{e}_t^M \right] M_n \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) видно, что характер главной особенности не зависит от вида срединной поверхности и выбора координации.

4. Все сказанное выше носит статико-геометрический характер и не зависит от вида связи между усилиями-моментами и компонентами деформации срединной поверхности. Нами выделены лишь особенности решения, проявляющие себя статически. Отсутствуют, в частности, хорошо известные логарифмические особенности.

Последние появятся, если, приняв обобщенный закон Гука, мы будем определять периодическую часть вектора функций напряжения  $U^{\infty}$ .

Подробное рассмотрение этого вопроса требует привлечения дополнительного аппарата и будет приведено в отдельной статье.

Здесь же мы ограничимся рассмотрением простого иллюстративного примера, поясняющего сказанное выше. Рассмотрим круглую пластину, нагруженную в центре нормальной силой  $P$  (фиг. 8). Для нее

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0, \quad \alpha_1 = \rho, \quad \alpha_2 = \varphi, \quad A_1 = r_0, \quad A_2 = r_0 \rho \quad \left( \rho = \frac{r}{r_0} \right)$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= P \cdot \mathbf{e}_n, & \mathbf{M}_1 &= 0, & (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) &= r_0 \rho \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{F}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= P r_0 \rho \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{W}_1^\circ &= P r_0 \rho \mathbf{e}_\varphi \\ \Phi &= \frac{1}{2\pi} \varphi, & \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2\pi}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \end{aligned}$$

мы приняли  $\mathbf{F}_1^* = \mathbf{M}_1^* = 0$ . Полагая последовательно  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1/2\pi$ , получим из выражений (3.9)

$$M_1 = \frac{1}{2\pi} P, \quad T_1 = T_2 = S = M_2 = H = 0 \quad \left( N_1' = \frac{1}{2\pi r_0 \rho} P, \quad N_2' = 0 \right)$$

Определим теперь периодическую часть вектора напряжений  $\mathbf{U}^{\circ\circ}$ . Из характера напряженного состояния следует

$$u^{\circ\circ} = u^{\circ\circ}(\rho), \quad v^{\circ\circ} = w^{\circ\circ} = 0$$

Суммарные изгибающие моменты примут вид:

$$M_1 = \frac{P}{2\pi} - \frac{Ehc}{r_0} \frac{1}{\rho} u^{\circ\circ}, \quad M_2 = -\frac{Ehc}{r_0} \frac{du^{\circ\circ}}{d\rho} \quad (4.1)$$

Уравнение неразрывности будет записываться следующим образом:

$$\rho \frac{d(M_2 - \mu M_1)}{d\rho} + (1 + \mu)(M_2 - \mu M_1) = 0$$

Подставляя в него выражения для моментов (4.1), получим дифференциальное уравнение для определения  $u^{\circ\circ}$ :

$$\rho^2 \frac{d^2 u^{\circ\circ}}{d\rho^2} + \rho \frac{du^{\circ\circ}}{d\rho} - u^{\circ\circ} = \frac{(1 + \mu)P}{2\pi} \rho \left| \left( -\frac{Ehc}{r_0} \right) \right.$$

Его частное решение имеет следующий вид:

$$u^{\circ\circ} = \frac{P}{4\pi} (1 + \mu) \rho \ln \rho \left| \left( -\frac{Ehc}{r_0} \right) \right.$$

Используя его, получим из (4.1) хорошо известные (см. [9]) выражения для изгибающих моментов:

$$M_1 = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1 + \mu}{2} \ln \rho + 1 \right\}, \quad M_2 = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1 + \mu}{2} \ln \rho + \frac{1 + \mu}{2} \right\}$$

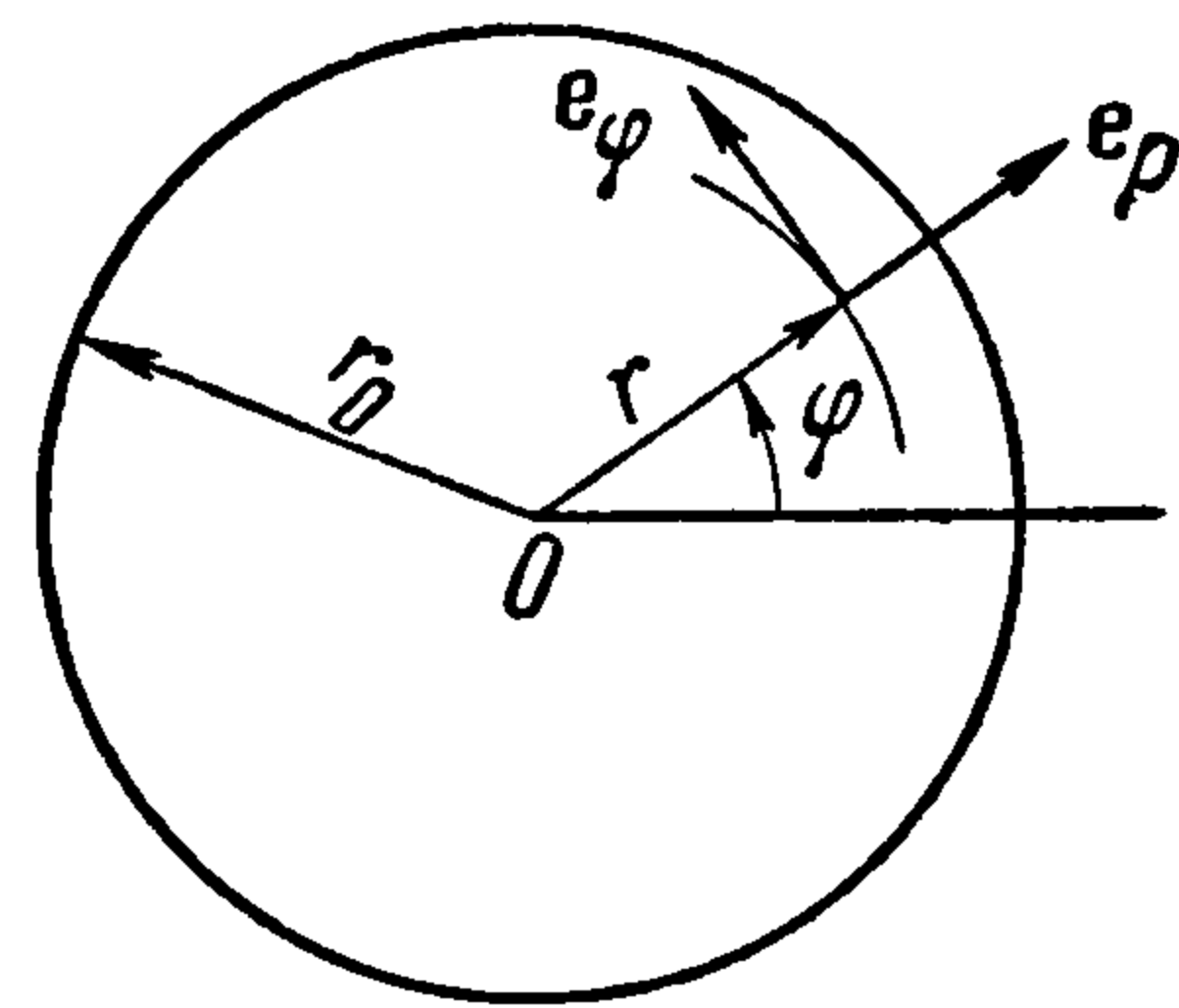
Таким образом, рассмотрение дислокационным путем данного простого примера дало возможность выделить все присущие решению особенности.

В общем случае задача сводится к нахождению частного решения системы уравнений в комплексных смещениях [8], в которой величины  $(T_1^*, T_2^*, S^*, M_1^*, M_2^*, H^*)$  строятся при помощи рассмотренного приема.

Поступила 6 II 1958

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. 1953.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. 1935.
4. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ, т. IV, вып. 2, 1940.
5. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории оболочек. ПММ, т. IV, вып. 2, 1940.
6. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей, ч. 1. Гостехиздат, 1947.
7. Черных К. Ф. О сопряженных задачах теории тонких оболочек. Докл. АН СССР, т. CXVII, № 6, 1957.
8. Черных К. Ф. О вариационном принципе комплексной теории оболочек, ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.
9. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки, 1948.



Фиг. 8