Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

К. Р. Коваленко

(Одесса)

Многие задачи на исследование параметрического резонанса (без учета сил сопротивления) приводят к необходимости отыскания условий ограниченности решений уравнений вида

$$u''(\tau) + q(\tau)\,u(\tau) = 0 \qquad (0.1)$$

где $q(\tau)$ — вещественная периодическая функция периода $T = 2\pi/\omega$. Полагая

$$\tau = 2t/\omega, \qquad \lambda = 4/\omega^2, \qquad p(t) = q(2t/\omega), \qquad y(t) = u(2t/\omega)$$

приведем уравнение (0.1) к виду

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda p(t)\,y = 0 \qquad (0.2)$$

где $p(t)$ — вещественная периодическая функция периода π, а λ — некоторый параметр, обратно пропорциональный квадрату частоты параметрического возбуждения, от которого $p(t)$ не зависит.

Характеристической функцией $A(\lambda)$ уравнения (0.2) называется функция

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\{\varphi(\pi, \lambda) + \psi'(\pi, \lambda)\}$$

где $\varphi(t, \lambda)$ и $\psi(t, \lambda)$ — решения уравнения (0.2), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = 0. \qquad \psi(0, \lambda) = 0, \qquad \psi'(0, \lambda) = 1$$

Как известно, вся вещественная λ-ось разбивается на открытые интервалы, так называемые зоны устойчивости, в которых все решения уравнения (0.2) ограничены на вещественном t-оси, и дополнительное множество точек, состоящее, вообще говоря, из изолированных точек и замкнутых интервалов (зон неустойчивости).

Основные результаты, касающиеся расположения зон устойчивости на λ-оси и требующие исследования взаимного расположения корней двух уравнений

$$A(\lambda) - 1 = 0, \qquad A(\lambda) + 1 = 0 \qquad (0.3)$$

были получены Ляпуновым [1,2] (см. также [3]).

Обозначим через $\lambda_n^{(1)}$ характеристические числа периодической краевой задачи

$$\text{(I)} \quad y''(t) + \lambda p(t)\,y(t) = 0, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi)$$

а через $\lambda_n^{(2)}$ — характеристические числа «полупериодической» краевой задачи

$$\text{(II)} \quad y''(t) + \lambda p(t)\,y(t) = 0, \quad y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi)$$

Очевидно, что $\lambda_n^{(1)}$ являются одновременно корнями первого уравнения (0,3), а $\lambda_n^{(2)}$ — корнями второго уравнения (0.3).

Объединим указанные результаты Ляпунова в следующую теорему.

Теорема Ляпунова. Если

$$L = \int_0^{\pi} p(t)\,dt \neq 0$$

то характеристические числа краевых задач (I) и (II) можно перенумеровать так, что имеет место следующий закон чередования:

$$\ldots < \lambda_{-4}^{(2)} \leqslant \lambda_{-3}^{(2)} < \lambda_{-2}^{(1)} \leqslant \lambda_{-1}^{(1)} < \lambda_{-2}^{(2)} \leqslant \lambda_{-1}^{(2)} < \lambda_{-0}^{(1)} <$$

$$< \lambda_{+0}^{(1)} < \lambda_1^{(2)} \leqslant \lambda_2^{(2)} < \lambda_1^{(1)} \leqslant \lambda_2^{(1)} < \lambda_3^{(2)} \leqslant \lambda_4^{(2)} < \ldots$$

причем

$$\lambda_{+0}^{(1)} = 0, \qquad \lambda_{-0}^{(1)} < 0, \qquad \text{если } L > 0$$

$$\lambda_{-0}^{(1)} = 0, \qquad \lambda_{+0}^{(1)} > 0, \qquad \text{если } L < 0$$

Если $L = 0$, то закон чередования этих чисел будет тем же, если считать, что интервал $(\lambda_{-0}^{(1)}, \lambda_{+0}^{(1)})$ стянулся в точку нуль, являющуюся вместе с тем простым характеристическим числом краевой задачи (I).

Зонами устойчивости будут все интервалы, имеющие своими концами смежные характеристические числа различных краевых задач (I) и (II). Дополнительные интервалы вместе со своими концами являются зонами неустойчивости, если они не вырождаются в точку. В последнем случае в этой точке имеет место устойчивость, за исключением единственной точки $\lambda = 0$.

В каждой зоне неустойчивости, за исключением интервала $(\lambda_{-0}^{(1)}, \lambda_{+0}^{(1)})$, лежит одно и только одно характеристическое число краевой задачи

$$y''(t) + \lambda p(t)\, y(t) = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{0.4}$$

В настоящее время основную часть этой теоремы выводят (см., например, [4]) из следующего свойства графика функции $\eta = A(\lambda)$: всякий максимум графика $A(\lambda)$ лежит не ниже прямой $\eta = 1$, а всякий минимум — не выше прямой $\eta = -1$, точнее, если $\lambda = \lambda^*$ — некоторая стационарная точка функции $A(\lambda)$, то

$$|A(\lambda^*)| \geqslant 1, \qquad A(\lambda^*)\, A''(\lambda^*) < 0 \tag{0.5}$$

Согласно теореме Ляпунова существуют сколь угодно большие значения параметра λ (и, следовательно, сколь угодно малые частоты ω параметрического возбуждения), для которых решения уравнения (0.2) неограниченны.

В связи с этим исследование ряда задач на параметрический резонанс без учета сил сопротивления приводит к парадоксальным выводам. Например, при исследовании динамической устойчивости стержней линейная постановка задачи без учета затухания приводит к выводу, что при сколь угодно малой амплитуде продольной пульсирующей силы найдутся сколь угодно малые частоты пульсации, при которых будет наступать динамическая неустойчивость. Разыскание зон неустойчивости в такой постановке задачи дает только первое приближение для первых зон неустойчивости, и в этом случае нельзя дать нижнюю (а также верхнюю) оценку неустойчивым частотам продольных пульсирующих сил.

В настоящей статье устанавливаются некоторые оценки характеристической функции и характеристических показателей уравнения (0.2) для достаточно больших значений параметра λ, которые даже в пределах линейной постановки задачи позволяют указать расчетную схему, свободную от упомянутых парадоксов. В качестве примера возникновения парадокса и его устранения рассматривается динамическая устойчивость призматического стержня, шарнирно опертого по концам.

Предполагая, простоты ради, что функция $p(t)$ в уравнении (0.2) кусочно-непрерывна, заметим, что все полученные выводы остаются справедливыми для любой интегрируемой периодической функции $p(t)$ в частности могут быть распространены на случаи динамической устойчивости при периодически повторяющихся продольных толчках или ударах.

§ **1. Исследование роста характеристической функции** $A(\lambda)$. В дальнейшем используются некоторые понятия теории роста целых функций [5, 6].

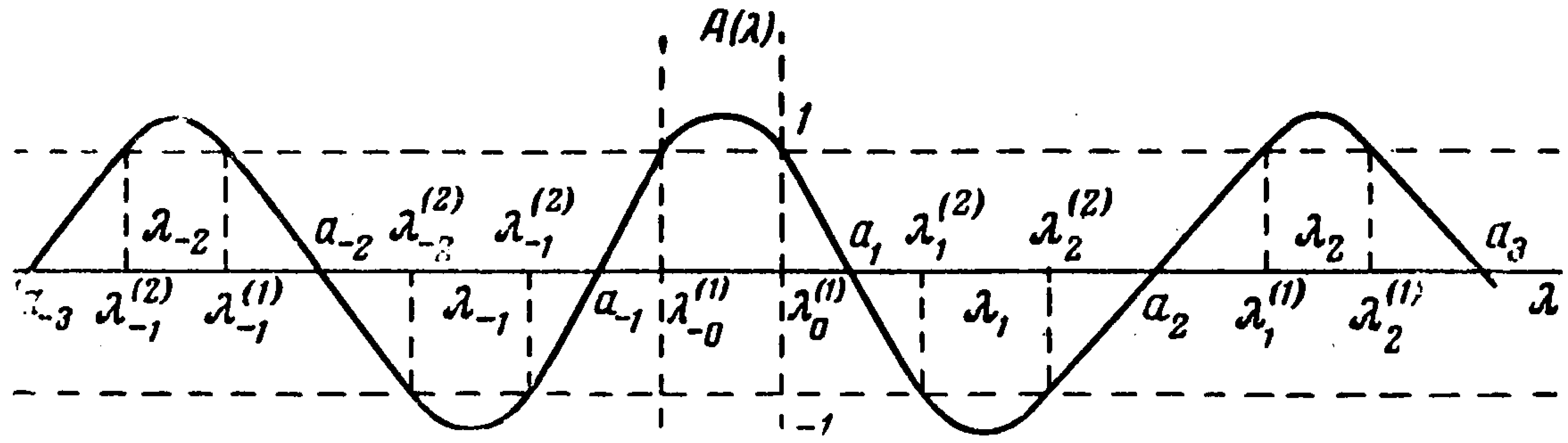
Из работ Ляпунова (см. [7], а также [8], стр. 277) следует, что $A(\lambda)$ является целой функцией, причем

$$|A(\lambda)| \leqslant \exp(\pi M^{1/2} |\lambda|^{1/2}), \qquad M = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |p(t \pm 0)| \tag{1.1}$$

Докажем теперь следующее предложение.

Теорема 1. Показатель сходимости последовательности нулей характеристической функции $A(\lambda)$ равен $^1/_2$.

Доказательство. Все нули функции $A(\lambda)$ вещественны (см., например, [4]). Обозначим через $\{a_n\}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ последовательность нулей



Фиг. 1

функции $A(\lambda)$ в порядке возрастания их модуля, причем положительным a_n будем приписывать положительные индексы, отрицательным — отрицательные. В силу [4], а также приведенной выше теоремы Ляпунова имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} < a_n < \lambda_n \qquad & \text{для } n = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \\ \lambda_n < a_n < \lambda_{n+1} \qquad & \text{для } n = -1,\ -2,\ -3, \ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

где λ_n — характеристические числа краевой задачи (0.4) (фиг. 1).

Рассмотрим вначале случай, когда $p(t) \geqslant 0$. В этом случае имеет место асимптотическая оценка (см., например, [9], стр. 351)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2} \left(\int_0^\pi \sqrt{p(t)}\, dt \right)^2 \tag{1.3}$$

т. е. при $n \to \infty$

$$\lambda_n = c^2 n^2 + o(n^2), \qquad c = \pi \left(\int_0^\pi \sqrt{p(t)}\, dt \right)^{-1} \tag{1.4}$$

Здесь символ $o(n^2)$ означает, что $n^{-2} o(n^2) \to 0$ при $n \to \infty$.

В силу (1.2) также и

$$a_n = c^2 n^2 + o(n^2) \qquad (n \to \infty) \tag{1.5}$$

Отсюда заключаем, что бесконечный ряд с общим членом $|a_n|^{-(1/2+\varepsilon)}$ сходится, а ряд с общим членом $|a_n|^{-(1/2-\varepsilon)}$ расходится, т. е. последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ имеет показатель сходимости $\beta = {}^1/_2$.

В случае $p(t) \leqslant 0$, заменяя λ на $-\lambda$ и повторяя те же рассуждения, приходим к асимптотической формуле

$$-a_n = c_1^2 n^2 + o(n^2) \quad (n = -1, -2, -3, \ldots), \qquad c_1 = \pi \left(\int_0^\pi \sqrt{-p(t)}\, dt \right)^{-1} \tag{1.6}$$

Итак, для случая знакопостоянной функции теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $p(t)$ меняет знак в интервале $(0, \pi)$. Пусть имеется одна перемена знака, например $p(t) \geqslant 0$ при $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ и $p(t) \leqslant 0$ при $(t_0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Если к граничным условиям задачи (0.4) добавить дополнительное условие (связь) $y(t_0) = 0$, то на основании теоремы об изменении частот при наложении связи (см., например, [10], гл. V) $\lambda_n \leqslant \lambda_n^* \leqslant \lambda_{n+1}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $\lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n^* \leqslant \lambda_n$ при $n = -1, -2, -3, \ldots$, где λ_n^* — характеристические числа краевой задачи (0.4) со связью $y(t_0) = 0$. Тогда в силу (1.2) $\lambda_{n-2}^* < a_n < \lambda_n^*$ при $n = 3, 4, 5, \ldots$ и $\lambda_n^* < a_n < \lambda_{n+2}$ при $n = -3, -4, -5 \ldots$. Но положительные и отрицательные характеристические числа в отдельности являются соответственно характеристическими числами двух краевых задач:

$$-y''(t) = \lambda p(t) y(t), \qquad y(0) = y(t_0) = 0$$

$$-y''(t) = \lambda p(t) y(t), \qquad y(t_0) = y(\pi) = 0$$

для которых справедливы асимптотические оценки (1.5) и (1.6), т. е.

$$\begin{aligned} a_n &= c_+^2 n^2 + o(n^2) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ -a_n &= c_-^2 n^2 + o(n^2) \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots) \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$c_+ = \pi \left(\int_0^{t_0} \sqrt{p(t)}\, dt \right)^{-1} = \pi \left(\int_0^{\pi} \sqrt{p_+(t)}\, dt \right)^{-1}$$

$$c = \pi \left(\int_{t_0}^{\pi} \sqrt{p(t)} dt \right)^{-1} = \pi \left(\int_0^{\pi} \sqrt{p_-(t)}\, dt \right)^{-1}$$

Здесь через $p_+(t)$ и $p_-(t)$ обозначены функции

$$p_+(t) = {}^1/_2 \{|p(t)| + p(t)\}, \qquad p_-(t) = {}^1/_2 \{|p(t)| - p(t)\}$$

Рассуждая аналогично, можно получить также асимптотические формулы для нулей функции $A(\lambda)$ и тогда, когда функция $p(t)$ меняет знак любое конечное число раз в интервале $(0, \pi)$. Таким образом, и в этом случае последовательность нулей $\{a_n\}_1^\infty$ функции $A(\lambda)$ имеет показатель сходимости $\beta = {}^1/_2$.

Теорема 2. Порядок роста функции $A(\lambda)$ равен ${}^1/_2$.

Доказательство. Из (1.1) следует, что порядок роста функции $A(\lambda)$ не больше ${}^1/_2$. С другой стороны, так как показатель сходимости последовательности нулей целой функции не превосходит порядка роста этой функции, то в силу теоремы 1 порядок роста функции $A(\lambda)$ не меньше ${}^1/_2$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что $A(\lambda)$ допускает представление

$$A(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{a_n}\right) \tag{1.8}$$

Здесь использовано известное соотношение $A(0) = 1$.

§ 2. Асимптотические оценки характеристической функции и вещественной части характеристических показателей. Введем в рассмотрение две целые функции

$$P(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right),\qquad Q(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda}{b_n}\right)\tag{2.1}$$

где $a_n\,(n=1,2,3,\ldots)$ — положительные нули, а $b_n=-a_n\,(n=-1,-2,3,\ldots)$ — абсолютные величины отрицательных нулей функции $A(\lambda)$.

В силу изложенного выше бесконечные произведения (2.1) будут сходящимися и

$$A(\lambda)=P(\lambda)\,Q(\lambda)\tag{2.2}$$

Обозначим через $N_P(r)$ число нулей функции $P(\lambda)$ в круге радиуса r. Пусть $r>a_1$, тогда при некотором N имеем

$$a_N\leqslant r<a_{N+1}\quad\text{или}\quad c_+^{\,2}N^2(r)+o(N^2)\leqslant r<c_+^{\,2}[N(r)+1]^2+o([N+1]^2)$$

поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N_P(r)}{r^{1/2}}=\frac{1}{c_+}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{p_+(t)}\,dt\tag{2.3}$$

Обозначая через $N_Q(r)$ число нулей функции $Q(\lambda)$ в круге радиуса r, аналогично устанавливаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N_Q(r)}{r^{1/2}}=\frac{1}{c_-}=\frac{1}{\pi}\int_2^{\pi}\sqrt{p_-(t)}\,dt\tag{2.4}$$

Если для последовательности $r_1, r_2, r_3,\ldots$ выполняется соотношение $N(r)\sim cr^{\beta}$, где $N(r)$ — число членов этой последовательности в круге радиуса r, а β — показатель сходимости ее, то такая последовательность называется регулярной. Так как $\lim r^{-\beta}N_P(r)$ и $\lim r^{-\beta}N_Q(r)$ при $r\to\infty$ существуют $(\beta={}^1/_2)$, то последовательности $\{a_n\}_1^{\infty}$ и $\{b_n\}_1^{\infty}$ регулярны.

Поэтому для функций $Q(\lambda)$ и $P(\lambda)$ имеют место предельные соотношения (см. [11], стр. 20)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln Q(re^{i\vartheta})}{N_Q(r)}=\pi\exp\frac{i\vartheta}{2}\qquad(-\pi<\vartheta<\pi)$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln P(re^{i\vartheta})}{N_P(r)}=\pi\exp\frac{i(\vartheta-\pi)}{2}\qquad(0<\vartheta<2\pi)$$

Используя соотношения (2.3) и (2.4), устанавливаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln Q(re^{i\vartheta})}{r^{1/2}}=\exp\left(\frac{i\vartheta}{2}\right)\int_0^{\pi}\sqrt{p_-(t)}\,dt$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln P(re^{i\vartheta})}{r^{1/2}}=\exp\left(\frac{i(\vartheta-\pi)}{2}\right)\int_0^{\pi}\sqrt{p_+(t)}\,dt$$

причем первый предел при $(-\pi<\vartheta<\pi)$, второй при $(0<\vartheta<2\pi)$. Поэтому индикатор роста функции $Q(\lambda)$ по лучу $\arg\lambda=\vartheta$

$$h_Q(\vartheta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|Q(re^{i\vartheta})|}{r^{1/2}}=\cos\frac{\vartheta}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{p_-(t)}\,dt\qquad(-\pi<\vartheta<\pi)$$

а так как индикатор роста есть непрерывная периодическая функция ϑ периода 2π, то полученное соотношение справедливо для любого ϑ, если заменить $\cos{}^1/_2\vartheta$ на $|\cos{}^1/_2\vartheta|$.

Аналогично находим, что индикатор роста функции $P(\lambda)$ по лучу $\arg\lambda = \vartheta$

$$h_P(\vartheta) = \left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \int_0^\pi \sqrt{p_+(t)}\,dt$$

Так как функции $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ регулярного роста, т. е. существуют

$$\lim r^{-1/2}\ln|P(re^{i\vartheta})| \text{ и } \lim r^{-1/2}\ln|Q(re^{i\vartheta})| \quad \text{при } r\to\infty$$

то в силу (2.2) для индикатора роста $h_A(\vartheta)$ функции $A(\lambda)$ получаем

$$h_A(\vartheta) = h_Q(\vartheta) + h_P(\vartheta) = \left|\cos\frac{\vartheta}{2}\right| \int_0^\pi \sqrt{p_-(t)}\,dt + \left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \int_0^\pi \sqrt{p_+(t)}\,dt \quad (2.5)$$

и, следовательно, вдоль положительного направления вещественной оси

$$h_A(0) = \int_0^\pi \sqrt{p_-(t)}\,dt$$

Полученное значение для $h_A(0)$ позволяет сформулировать следующее предложение.

Теорема 3. Для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $R(\varepsilon)>0$, что при всех λ, удовлетворяющих условию $\lambda>R(\varepsilon)$, имеет место оценка

$$|A(\lambda)| < \exp\left\{\left(\int_0^\pi \sqrt{p_-(t)}\,dt + \varepsilon\right)\sqrt{\lambda}\right\} \quad (2.6)$$

В неравенстве (2.6) величина интеграла не может быть заменена никакой меньшей величиной.

Из этого предложения непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие. Для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $R(\varepsilon)>0$, что при всех $\lambda>R(\varepsilon)$ имеет место оценка

$$-\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{p_-(t)}\,dt + \varepsilon\right)\sqrt{\lambda} < \alpha(\lambda) < \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{p_-(t)}\,dt + \varepsilon\right)\sqrt{\lambda} \quad (2.7)$$

где $\alpha(\lambda)$ — вещественная часть характеристического показателя

$$\varkappa(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$$

§ 3. Демпфированное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$y''(t) + 2\mu\nu y'(t) + \mu^2 q(t)\,y(t) = 0 \quad (3.1)$$

где $\nu>0$ — постоянный коэффициент затухания, $\mu>0$ — некоторый вещественный параметр, $q(t)\geqslant 0$ — вещественная периодическая функция t периода π, непрерывная на сегменте $(0, \pi)$. Это уравнение отличается от уравнения (1.2) тем, что в нем введен фактор затухания $\mu\nu$, растущий вместе с μ. Такое уравнение назовем демпфированным.

Решения уравнения (3.1), ограниченные на вещественной полуоси, будем называть устойчивыми. Ограниченные решения, обладающие тем свойством, что $\lim y(t)=0$ при $t\to\infty$, будем называть асимптотически устойчивыми.

Если $\nu^2 \geqslant \max q(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$, то, как следует из [12], решения уравнения (3.1) при любом μ устойчивы, а при $\min q(t)>0$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ асимптотически устойчивы. Если $\nu^2<\max q(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$, то решения уравнения (3.1) могут быть неустойчивыми (при соответствующих значениях параметра λ). Однако в этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если функция $q(t)$ $(\geqslant 0)$ не равна тождественно нулю в интервале $(0, \pi)$, то при любом $\nu>0$ можно указать такое $R(\nu)>0$, что при $\mu>R(\nu)$ все решения уравнения (3.1) будут асимптотически устойчивы.

Доказательство. При помощи подстановки $y(t)=u(t)\exp(-\mu\nu t)$ приведем уравнение (3.1) к виду

$$u''(t)+\mu^2[q(t)-\nu^2]\,\dot{u}(t)=0 \tag{3.2}$$

Очевидно, следует рассмотреть лишь случай, когда μ^2 находится внутри зоны неустойчивости уравнения (3.2), т. е. когда $A^2(\mu^2)>1$. В этом случае любое решение уравнения (4.1) может быть представлено в виде

$$y(t)=e^{-\mu\nu t}\left[c_1e^{\alpha(\mu^2)t}f_1(t)+c_2e^{-\alpha(\mu^2)t}f_i(t)\right]$$

где c_1 и c_2 — константы, определяемые начальными условиями, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — некоторые периодические функции, а $\alpha(\mu^2)$ — вещественная часть характеристического показателя, лежащего в правой полуплоскости. Таким образом, если показать, что для достаточно больших μ имеет место неравенство $\alpha(\mu^2)<\mu\nu$, то теорема будет доказана.

В силу следствия теоремы 3 для любого $\varepsilon>0$ всегда можно указать такое $R(\varepsilon)>0$, что при всех $\mu>R(\varepsilon)$ будет

$$\alpha(\mu^2)<\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{p_-(t)}\,dt+\varepsilon\right)\mu,\qquad p_-(t)=\begin{cases}\nu^2-q(t) & \text{при } \nu^2\geqslant q(t)\\ 0 & \text{при } \nu^2\leqslant q(t)\end{cases} \tag{3.3}$$

Так как по условию $q(t)\geqslant 0$, то

$$\nu^2\geqslant\max p_-(t)\qquad (0\leqslant t\leqslant\pi) \tag{3.4}$$

причем знак равенства имеет место только для тех t, для которых $q(t)=0$.

С другой стороны,

$$\max\sqrt{p_-(t)}\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{p_-(t)}\,dt\qquad (0\leqslant t\leqslant\pi) \tag{3.5}$$

причем знак равенства может иметь место только в том случае, если $p_-(t)\equiv\text{const}$ (следовательно, $q(t)\equiv\text{const}$) в интервале $(0, \pi)$.

Сопоставляя (3.4) и (3.5), заключаем, что если $q(t)\not\equiv 0$ в интервале $(0, \pi)$, то

$$\nu^2-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{p_-(t)}\,dt>0$$

Обозначим эту разность через $\varepsilon(\nu)$. В силу (3.3) можно указать такое $R(\varepsilon(\nu)) = R(\nu)$, что

$$\alpha(\mu^2) < \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{p_-(t)}\,dt + \varepsilon(\nu)\right\}\mu = \mu\nu \qquad \text{при } \mu > R(\nu)$$

Теорема доказана [1].

Следствие. Уравнение (4.1) либо не имеет зон неустойчивости (как, например, в случае, когда $\nu^2 \geqslant \max q(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$), либо имеет только конечное число зон неустойчивости.

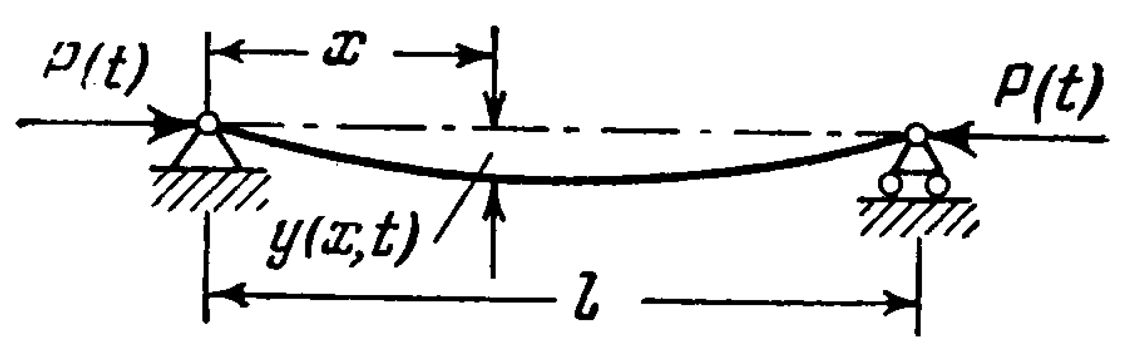
§ 4. Об одном возможном парадоксе в задачах динамической устойчивости. Рассмотрим известную задачу о динамической устойчивости призматического стержня на шарнирных опорах под воздействием продольных периодических сил $P(t)$ (фиг. 2), впервые исследованную Н. М. Беляевым [14]. Эта задача приводит к исследованию устойчивости решений дифференциального уравнения

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

при граничных условиях

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial x^2} = 0$$

Здесь EI — жесткость, γ — удельный вес, F — площадь поперечного сечения стержня, g — ускорение силы тяжести. Следуя Беляеву, остановимся на частном виде функции $P(t) = P_0 \cos \omega t$. Отыскивая решение в виде ряда



Фиг. 2

$$y(x, t) = T_1(t)\varphi_1(x) + T_2(t)\varphi_2(x) + \ldots$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система фундаментальных функций задачи собственных колебаний того же стержня, которые в данном случае совпадают с фундаментальными функциями задачи о статической устойчивости, и переходя к независимой переменной $\tau = {}^1/_2\,\omega t$, приходим к уравнениям относительно коэффициентов Фурье $T_n(\tau)$:

$$T_n''(\tau) + \frac{4k_n^2}{\omega^2}(1 - b_n \cos 2\tau)\,u_n(\tau) = 0, \qquad k_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{gEI}{\gamma F}}$$

$$b_n = P_0 / P_n, \qquad P_n = EIn^2\pi^2 l^{-2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.2}$$

в которых k_n — частоты собственных колебаний, а P_n — эйлеровы критические силы данного стержня.

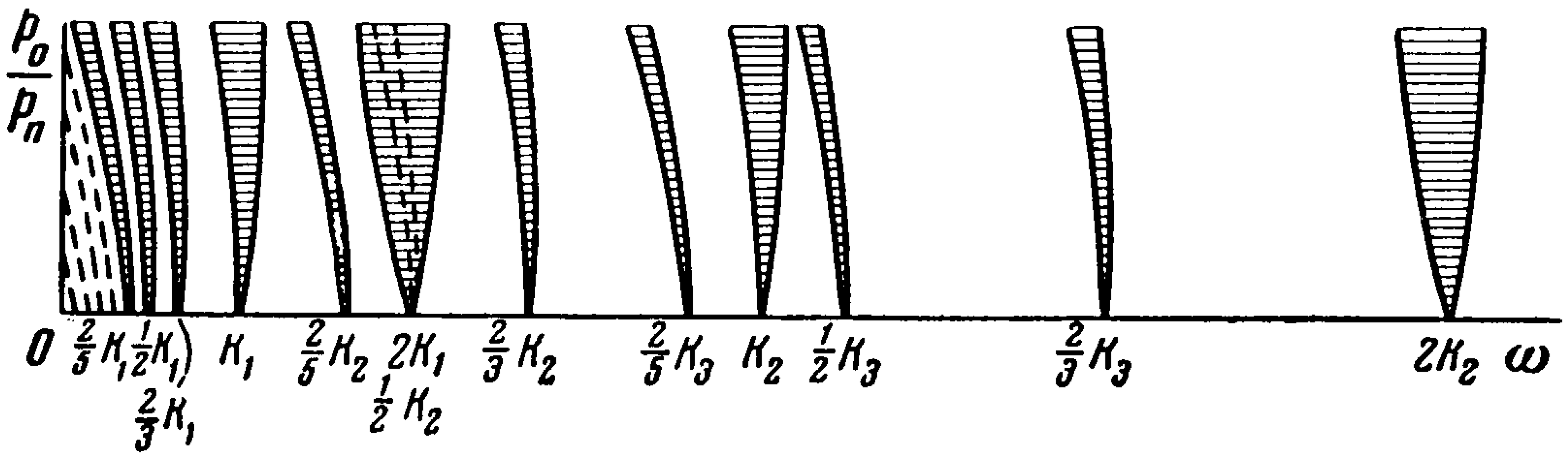
Уравнение (4.2) вида (0.2), в котором $\lambda = 4k_n^2\omega^{-2}$, а $p(t) = 1 - b_n \cos 2t$. Согласно теореме Ляпунова даже в случае $P_0 < P_n$ существует бесконечная серия зон неустойчивости, распространяющаяся в сторону неограниченных возрастающих значений параметра λ. Переходя от параметра λ к параметру ω, приходим к следующему выводу.

[1] Заметим, что для случая, когда $q(t)$ не обращается в нуль и имеет ограниченную производную, асимптотическая устойчивость при больших μ следует из работы М. Я. Леонова [13]. В этом случае

$$R(\nu) = \max\left(-{}^1/_4\, q'(t) / \nu q(t)\right)$$

Существует бесконечное множество серий (для $n = 1, 2, 3, \dots$) зон неустойчивости для частот ω продольной периодической силы, причем в каждой серии имеется бесконечное множество зон неустойчивости, имеющих точку сгущения $\omega = 0$.

Определение границ зон неустойчивости для различных уравнений (при $n = 1, 2, 3, \dots$) и нанесение их на общий график дает картину,



Фиг. 3

указанную на фиг. 3, где нанесены зоны неустойчивых частот для первых трех уравнений (4.2). Такое расположение зон неустойчивости приводит к парадоксальному выводу, указанному в начале настоящей статьи.

Этот парадоксальный вывод является следствием чрезмерной идеализации постановки задачи при рассмотрении вопросов динамической устойчивости.

Однако, даже оставаясь в рамках линейной трактовки задачи, парадокс можно устранить, если учитывать силы затухания. Будем исходить из допущения (см., например, [15]), что имеются силы сопротивления внешней среды, пропорциональной скорости частиц стержня, и силы внутреннего трения пропорциональны скорости деформации. При этих предположениях уравнения (4.2) перейдут в уравнения

$$T_n''(\tau) + \frac{2k_n}{\omega}\left(\frac{\xi k_n}{E} + \frac{\eta}{k_n}\right) T_n'(\tau) + \frac{4k_n^2}{\omega^2}(1 - b_n \cos 2\tau)\, T_n(\tau) = 0 \qquad (4.3)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots$$

где ξ — коэффициент внутреннего, η — коэффициент внешнего сопротивления, а остальные обозначения сохраняют прежние значения. Таким образом, мы приходим к демпфированным уравнениям (3.1), в которых

$$\mu_n = \frac{2k_n}{\omega}, \qquad \nu_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi k_n}{E} + \frac{\eta}{k_n}\right), \qquad q_n(t) = 1 - b_n \cos 2t$$

При наличии только внешнего сопротивления (т. е. при $\xi = 0$) для каждого уравнения вида (3.1) бесконечной системы (4.3) будет только серия конечного числа зон неустойчивости, как это следует из теоремы 4. Однако ввиду бесконечного множества таких серий и быстрого уменьшения коэффициента затухания ν_n с ростом индекса n учет только внешнего сопротивления не освобождает рассматриваемую задачу от указанного выше парадокса [1].

---

[1] Е. А. Бейлин и Г. Ю. Джанелидзе в обзоре работ по динамической устойчивости упругих систем ([16], стр. 645) выразили сомнение в том, что учет только внешнего линейного сопротивления не устраняет упомянутого парадокса. Высказанные при этом указанными авторами соображения не учитывают существования бесконечного множества серий зон неустойчивости, когда имеется только внешнее сопротивление.

Если $\nu_n^2 \geqslant \max q_n(t) = 1 + b_n$, что имеет место, когда

$$n^2 \geqslant \frac{l^2 \sqrt{\gamma EF}}{\pi^2 \xi \sqrt{gI}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2P_0 \xi \sqrt{g}}{E\sqrt{\gamma FEI}}}\right)$$

то в силу следствия теоремы 4 зоны неустойчивости будут заведомо отсутствовать, т. е. при наличии линейного внутреннего затухания будет только конечное число серий зон неустойчивости и в каждой серии только конечное число зон неустойчивости. Таким образом, при $q(t) \geqslant 0$, если частота продольной силы достаточно мала, стержень будет всегда устойчив. Ввиду того что мы пользовались точными оценками, можно утверждать, что если $q_n(t)$ меняет знак, то при достаточно малых частотах будет иметь место неустойчивость. Функция $q_n(t) = 1 - P(t)/P_n$ может менять знак только тогда, когда найдутся значения $P(t)$, превышающие первую критическую силу, поэтому если $\max P(t) > P_1$, то при достаточно медленном изменении величины силы происходит потеря устойчивости стержня, что согласуется с опытными данными.

Автор пользуется случаем выразить благодарность М. Г. Крейну за ценные дискуссии, а также В. М. Старжинскому за ряд критических замечаний по данной работе.

Поступила 17 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Sur une équation linéaire du second ordre. C. R. Acad. Sci., v. CXXVIII, pp. 910—915, 1899.
2. Ляпунов А. М. Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaizes du second ordre à coéfficients périodiques C. R. Acad. Sci., v. CXXVIII, pp. 1085—1088, 1899.
3. Коваленко К. Р., Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. 75, № 4, 1950.
4. Крейн М. Г. О характеристической функции линейной канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XXI, вып. 3, 1957.
5. Тичмарш Е. Теория функций. ГИТТЛ, 1951.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, 1956.
7. Ляпунов А. М. Sur une sériè dans la theorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coéfficients périodiques., Зап. Акад. наук, физ.-матем. отд., сер. 8, т. XIII. № 2, 1902.
8. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики ГИИТЛ, т. 1, 1951.
10. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот критических сил для стержневых систем. Гостехиздат, 1949.
11. Полиа Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, ч. II, ОНТИ, 1938.
12. Einaudi R. Sulle vibrationi quasi — armoniche di un sistema dissipativo., Atti Veneto, v. XCV, part II pp. 425—444, 1936.
13. Леонов М. Я. О квазигармонических колебаниях. ПММ, т. X, вып. 5—6, стр. 576, 1946.
14. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней, находящихся под воздействием продольных периодических сил. Сб. Инж. сооружения и строит. техника. Изд. Путь, Л., 1924.
15. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1956.
16. Бейлин Е. А. и Джанелидзе Г. Ю. Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.