Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Чжан Сы-Ин

(Москва — Шэньян)

§ 1. Постановка задачи. В практике встречается случай, когда требуется знать свойства рассматриваемых материальных систем на устойчивость не для всего интервала времени $t \geqslant t_0$ (устойчивость в смысле Ляпунова), но для какого-то конечного интервала времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Невозмущенное движение будем называть устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, если при $t = t_0$ выполняется

$$\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \varepsilon \tag{1.1}$$

а при всех t на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ будет выполняться

$$\sum_s x_s^2 \leqslant C \tag{1.2}$$

Здесь T, ε, C — заданные величины.

Найдем в некоторых случаях условия устойчивости (в указанном выше смысле) невозмущенного движения системы.

§ 2. Линейные системы с переменными коэффициентами. В этом случае уравнения возмущенного движения системы имеют вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где $p_{sr}(t)$ — вещественные ограниченные непрерывные функции времени t, могущие зависеть от некоторых параметров.

Чтобы разрешить нашу задачу, рассмотрим функцию

$$2V = e^{-\alpha t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{2.2}$$

где α — положительное число, пока еще не определенное. Эта функция впервые была использована Ляпуновым в его доказательстве теоремы о конечности характеристичных чисел.

В силу (2.1) имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + e^{-\alpha t}\sum_s x_s \frac{dx_s}{dt} = e^{-\alpha t} W \tag{2.3}$$

Здесь

$$W = \sum_{sr}\left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right) x_s x_r \qquad \delta_{sr} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = r \\ 0 & \text{при } s \neq r \end{cases}$$

Выберем α и параметры в коэффициентах p_{sr} так, чтобы квадратичная форма W была отрицательно-определенной. Согласно теорем Сильвестра для этого необходимо и достаточно иметь неравенства

$$D_r = \begin{vmatrix} -p_{11} + \frac{\alpha}{2} & -\frac{p_{12}+p_{21}}{2} & \dots & -\frac{p_{1r}+p_{r1}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{p_{r1}+p_{1r}}{2} & -\frac{p_{r2}+p_{2r}}{2} & \dots & -p_{rr} + \frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} > 0 \qquad (r=1, \dots, n) \quad (2.4)$$

При этих условиях $-W$ будет положительно-определенной квадратичной формой, поэтому всегда можно найти такую положительную величину μ, чтобы имело место

$$-W = -\sum_{s,r} \left(\frac{p_{sr}+p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2} \right) x_s x_r > \frac{\mu}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) \qquad (2.5)$$

Подставив неравенство (2.5) в (2.3), в силу (2.2) получим

$$\frac{dV}{dt} < -\mu \frac{1}{2} e^{-\alpha t}(x_1^2 + \dots + x_n^2) = -\mu V \qquad (2.6)$$

Предположим, что при $t = t_0$ точка $(x_{10}, \dots, x_{n0})$ находится на сфере (ε), т. е. $x_{10}^2 + \dots + x_{n0}^2 = \varepsilon$, и в некоторый момент времени t точка достигает сферы (C), т. е. $x_1^2 + \dots + x_n^2 = C$.

Найдем этот момент. Допустим, что $t_0 = 0$. Проинтегрировав в этом предположении неравенство (2.6), получим

$$V < V_0 e^{-\mu t}$$

Но согласно (2.2)

$$V_0 = \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad V = \frac{1}{2}e^{-\alpha t}C.$$

Поэтому

$$\frac{C}{\varepsilon} < e^{(\alpha-\mu)t} \quad \text{или} \quad t > \frac{1}{\alpha-\mu}\ln\frac{C}{\varepsilon} \qquad (2.7)$$

Отсюда видно, что при обратном знаке последнего неравенства точка $(x_1, \dots, x_n)$ не может достичь сферы (C). Поэтому, если

$$T = \frac{1}{\alpha-\mu}\ln\frac{C}{\varepsilon} \qquad (2.8)$$

то при всех $t \leqslant T$ ни одна из траекторий не выходит за сферу (C). Из (2.7), кроме того, видно, что чем меньше сфера (ε), тем больше момент t. Поэтому при выполнении условия (2.8) неравенства (1.1) и (1.2) будут также выполняться.

В (2.8) содержатся α и μ, которые следует выбрать так, чтобы выполнялось (2.5). Напишем (2.5) в виде

$$W_1 = \sum_{s,r} \left[-\frac{p_{sr}+p_{rs}}{2} + \delta_{sr}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu}{2}\right) \right] x_s x_r > 0 \qquad (2.9)$$

Значит, W_1 является положительной квадратичной формой.

Пусть

$$\lambda = \alpha - \mu \qquad (2.10)$$

Достаточные и необходимые условия, для того чтобы квадратичная форма (2.9) была положительной, имеют вид:

$$D_r = \begin{vmatrix} -p_{11} + \frac{\lambda}{2} & -\frac{p_{12}+p_{21}}{2} & \dots & -\frac{p_{1r}+p_{r1}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{p_{r1}+p_{1r}}{2} & -\frac{p_{r2}+p_{2r}}{2} & \dots & -p_{rr}+\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} > 0 \quad r=1, \dots, n) \tag{2.11}$$

Из предыдущих рассуждений вытекает следующее заключение для системы (2.1).

Теорема 1. Для того чтобы невозмущенное движение было устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (2.11).

§ 3. Один частный случай линейной системы и линейная система с постоянными коэффициентами. Рассмотрим частный случай, когда для системы (2.1) на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеют место равенства

$$p_{sr}(t) = c_{sr} + \delta f_{sr}(t) \tag{3.1}$$

где c_{sr} — постоянные, δ — достаточно малое число $f_{sr}(t)$ — ограниченные функции. В этом случае система (2.1) имеет вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x + \dots + c_{sn}x_n + \delta f_{s1}x_1 + \dots + \delta f_{sn}x_n \quad (s = 1, \dots, n)$$

Полная производная функция V (2.2) в силу этой системы имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = e^{-\alpha t}\left[\sum_{s,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r + \sum_{s,r}\delta\frac{f_{sr}+f_{rs}}{2}x_s x_r\right]$$

Коэффициенты второй квадратичной формы в скобках правой части этого равенства достаточно малы, поэтому знак функции в скобках вполне определен знаком первой квадратичной формы.

Проводя вычисление аналогично тому, как в предыдущем параграфе, получим условия устойчивости вида (2.11), в которых все $p_{sr}(t)$ подставлены постоянными c_{sr}.

Теперь рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \dots + c_{sn}x_n \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{3.2}$$

Полная производная функция V (2.2) в силу (3.2) имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = We^{-\alpha t}, \quad W = \sum_{s,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r$$

Чтобы сделать $dV/dt < 0$, нужно выполнить условия

$$D_r = \begin{vmatrix} -c_{11} + \frac{\alpha}{2} & -\frac{c_{12}+c_{21}}{2} & \dots & -\frac{c_{1r}+c_{r1}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{c_{r1}+c_{1r}}{2} & -\frac{c_{r2}+c_{2r}}{2} & \dots & -c_{rr}+\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} > 0 \quad (r = 1, \dots, n) \tag{3.3}$$

При этих условиях — W будет положительно-определенной симметрической квадратичной формой. Ее экстремум на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = A$ определяется выражением

$$-W = -\sum_{s,\,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r = \frac{\varkappa}{2}\sum_s x_s^2 \qquad (3.4)$$

где $^1/_2\varkappa$ — корни векового уравнения

$$X(\varkappa) = \left|-\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} + \delta_{sr}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varkappa}{2}\right)\right| = 0 \qquad (3.5)$$

По теореме Сильвестра все эти корни будут вещественными, и они будут положительными, так как квадратичная форма положительно-определенная.

Согласно (3.4), имеем

$$\frac{dV}{dt} = -\varkappa\frac{1}{2}e^{-\alpha t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = -\varkappa V$$

Сделав вычисление, аналогичное сделанному в предыдущем параграфе, получим для момента t прихода точки на сферу (C) равенство

$$t = \frac{1}{\alpha - \varkappa}\ln\frac{C}{\varepsilon}$$

Пусть $\alpha - \varkappa = \lambda$. Видно, что λ будут корнями уравнения

$$\Delta(\lambda) = \left|-\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} + \delta_{sr}\frac{\lambda}{2}\right| = 0 \qquad (3.6)$$

Все корни этого векового уравнения тоже будут вещественными.

Рассмотрим только положительные корни уравнения (3.6). Пусть это будут корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$.

Тогда на основании равенства $t = \lambda^{-1}\ln(C/\varepsilon)$ наибольшее возможное время перехода точки от сферы (ε) до (C) равно $\lambda_1^{-1}\ln(C/\varepsilon)$, наименьшее возможное время для этого перехода равно $\lambda_k^{-1}\ln(C/\varepsilon)$. Если принять

$$T \leqslant \frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{C}{\varepsilon} \qquad (3.7)$$

то будут выполняться условия (1.1) и (1.2). Поэтому имеем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы невозмущенное движение системы (3.2) было устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (3.7).

§ 4. Нелинейная система. Рассмотрим более общий случай. Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \ldots + p_{sn}(t)x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (4.1)$$

где $X_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ — голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка. Коэффициенты этих функций представляют собой вещественные непрерывные ограниченные функции t.

1. ε и C достаточно малы. Полная производная функция (2.2) в силу (4.1) имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = e^{-\alpha t}\left[W + \sum_s x_s X_s\right] \qquad \left(W = \sum_{s,\,r}\left(\frac{p_{sr}+p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r\right) \qquad (4.2)$$

В этом случае знак dV/dt вполне определяется знаком формы W, поэтому неравенство $dV/dt < 0$ будет выполняться при условиях (2.4).

При выполнении (2.4) имеем

$$\frac{dV}{dt} < -\mu \frac{1}{2} e^{-\alpha t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Как и в § 2, получаем

$$t > \frac{1}{\alpha - \mu} \ln \frac{C}{\varepsilon}$$

Пусть

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{C}{\varepsilon} \qquad (\lambda = \alpha - \mu)$$

Тогда (1.1) и (1.2) будут выполняться. Или поступим так, пусть

$$\sum_{s,r} \left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr} \frac{\alpha}{2}\right) x_s x_r + \sum_s x_s X_s < -\frac{\mu}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \qquad (4.3)$$

Вводя [3] обозначение $S = \sum_s x_s X_s$, будем иметь

$$|S| \leqslant R(t)(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

где $R(t)$ — положительная функция и является верхним точным пределом функции

$$\frac{1}{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \left| \sum_s x_s X_s \right| \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$$

Пусть

$$\sum_{s,r} \left(\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr} \frac{\alpha}{2}\right) x_s x_r + R\,(t)(x_1^2 + \ldots x_n^2) < -\frac{\mu}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \quad (4.4)$$

Очевидно, при выполнении этого условия имеет место условие (4.3). Напишем (4.4) в другом виде:

$$W_1 = \sum_{s,r} \left[-\frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} + \delta_{sr}\left(\frac{\lambda}{2} - R\,(t)\right)\right] x_s x_r > 0$$

Чтобы W_1 была положительной формой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$D_r = \begin{vmatrix} -p_{11} + \frac{\lambda}{2} - R(t) & -\frac{p_{12} + p_{21}}{2} & \ldots & -\frac{p_{1r} + p_{r1}}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{p_{r1} + p_{1r}}{2} & -\frac{p_{r2} + p_{2r}}{2} & \ldots & -p_{rr} + \frac{\lambda}{2} - R\,(t) \end{vmatrix} > 0$$

$$(r = 1, \ldots n) \qquad (4.5)$$

Поэтому имеем следующую теорему для (4.1).

Теорема 3. Для того чтобы невозмущенное движение системы (4.1) было устойчиво относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись условия (4.5).

Условия (4.5) содержат $R(t)$. Можно получить другие достаточные, но более простые условия, в которых не содержится $R(t)$.

В самом деле, из неравенства (4.3) видно, что в случае 1 знак функции в левой части этого неравенства вполне определяется квадратичной формой. Поэтому, чтобы имело место (4.3), достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2.11).

2. Случай, когда ε, C — конечные величины. В этом случае

$$\frac{dV}{dt} = e^{-\alpha t}\left[W + \sum_s x_s X_s\right] \qquad \left(W = \sum_{s,r}\left(\frac{p_{sr}+p_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r\right) \tag{4.6}$$

но ε, C — конечные величины, поэтому знак dV/dt больше не может определяться знаком квадратичной формы W. Пусть

$$S = \sum_s x_s X_s$$

Сделав вычисление, аналогичное сделанному в случае 1, получим условия, имеющие вид (4.5), и теорему, аналогичную теореме 3.

Следует отметить, что в этом случае надо проверить ε и C условиями (4.5), которые содержат $R(t)$ и допускают только определенную область изменений для переменных x_s.

Кроме того, в этом случае в силу конечности ε и C условия (2.11) места не имеют.

3. Случай, когда $p_{sr}(t) = c_{sr} + \delta f_{sr}(t)$, т. е. (3.1). В этом случае согласно (4.1) имеем (4.7)

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n + \delta(f_{s1}x_1 + \ldots + f_{sn}x_n) + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Полная производная функции V (2.2) в силу (4.7) имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = e^{-\alpha t}\left[\sum_{s,r}\left(\frac{c_{sr}+c_{rs}}{2} - \delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r + \sum_s x_s X_s + \sum_{s,r}\delta\frac{f_{sr}+f_{rs}}{2}x_s x_r\right] \tag{4.8}$$

В случае, когда ε, C достаточно малы, знак функции в скобках правой части уравнения (4.8) вполне определен знаком первой квадратичной формы. В этом случае получим условия устойчивости вида (2.11), в которых все $p_{sr}(t)$ подставлены постоянными c_{sr}.

В случае когда ε, C конечны, знак функции в скобках вполне определен знаком первых двух членов этой функции. В этом случае получим условия устойчивости вида (4.5), в которых все $p_{sr}(t)$ подставлены постоянными c_{sr}.

§ 5. Нелинейная система при постоянно действующих возмущениях. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \ldots + p_{sn}(t)x_n + X_s + R_s \qquad (s = 1, \ldots n) \tag{5.1}$$

где R_s характеризуют постоянно действующие возмущающие факторы. Для R_s будем предполагать, следуя [3], что $R_s = R_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ — вещественные непрерывные ограниченные функции t и x_s, причем $R_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$ и

$$R_s(t, x_1, \ldots, x_n) = l_{s1}(t)x_1 + \ldots + l_{sn}(t)x_n + \Delta X_s \tag{5.2}$$

где $l_{sr}(t)$ и ΔX_s имеют такой же характер, как и функции $p_{sr}(t)$ и X_s. Вообще R_s суть неизвестные функции, но во многих случаях можно оценить их значения.

Согласно (5.2) имеем

$$\frac{dx_s}{dt}=(p_{s1}+l_{s1})x_1+\ldots+(p_{sn}+l_{sn})x_n+X_s+\Delta X_s \qquad (s=1,\ldots,n) \quad (5.3)$$

1) Рассмотрим случай, когда ε и C достаточно малы.

Полная производная функция V (2.2) в силу (5.3) имеет вид:

$$\frac{dV}{dt}=e^{-\alpha t}\left[\sum_{s,r}\left(\frac{(p_{sr}+l_{sr})+(p_{rs}+l_{rs})}{2}-\delta_{sr}\frac{\alpha}{2}\right)x_s x_r+\sum_s x_s(X_s+\Delta X_s)\right]$$

В этом случае $dV/dt<0$, если

$$D_r=\begin{vmatrix}-(p_{11}+l_{11})+\frac{\alpha}{2} & -\frac{(p_{12}+l_{12})+(p_{21}+l_{21})}{2} & \ldots & \frac{(p_{1r}+l_{1r})+(p_{r1}+l_{r1})}{2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\frac{(p_{r1}+l_{r1})+(p_{1r}+l_{1r})}{2} & -\frac{(p_{r2}+l_{r2})+(p_{2r}+l_{2r})}{2} & \ldots & -(p_{rr}+l_{rr})+\frac{\alpha}{2}\end{vmatrix}>0$$

$$(r=1,\ldots,n) \quad (5.4)$$

Не проводя вычислений, приведем результаты для системы (5.1).

Теорема 4. Для того чтобы невозмущенное движение системы (5.1) было устойчивым относительно заданных ε и C на конечном интервале времени $t_0\leqslant t\leqslant T$, достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства

$$D_r=\begin{vmatrix}-(p_{11}+l_{11})+\frac{\lambda}{2}-R(t) & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1r}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tau_{r1} & \tau_{r2} & \ldots & (p_{rr}+l_{rr})+\frac{\lambda}{2}-K(t)\end{vmatrix}>0$$

$$(r=1,\ldots,n) \quad (5.5)$$

Здесь

$$\tau^{\lambda\mu}=\frac{(p_{\lambda\mu}+l_{\mu\lambda})+(p_{\mu\lambda}+l_{\mu\lambda})}{2}$$

$$S=\sum_s x_s(X_s+\Delta X_s), \qquad |S|\leqslant R(t)(x_1^2+\ldots+x_n^2)$$

Функции $R(t)$ — положительная и является верхним точным пределом функции

$$\frac{1}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\left|\sum_s x_s(X_s+\Delta X_s)\right|$$

Кроме (5.5), имеют место еще достаточные условия

$$D_r=\begin{vmatrix}-(p_{11}+l_{11})+\frac{\lambda}{2} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1r}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tau_{r1} & \tau_{r2} & \ldots & (p_{rr}+l_{rr})+\frac{\lambda}{2}\end{vmatrix}>0$$

$$(r=1,\ldots,n) \quad (5.6)$$

2. Если ε и C — конечные величины, то имеют место теорема 4 и условия (5.5); при этом условия (5.6) не имеют места.

3. Исследование в случае, когда $p_{sr}(t) = c_{sr} + \delta f_{sr}(t)$, а величины $l_{sr}(t) = c'_{sr} = \mathrm{const}$, можно провести аналогично § 4; при этом выводы будут аналогичные.

§ 6. Примеры. 1. Рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\,x_1 + p_{12}(t)\,x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\,x_1 + p_{22}(t)\,x_2 \tag{6.1}$$

Согласно теореме 1 и (2.11) достаточные условия устойчивости будут

$$-p_{11}(t) + \frac{\lambda}{2} > 0, \qquad \begin{vmatrix} -p_{11}(t) + \frac{\lambda}{2} & -\frac{p_{12}(t) + p_{21}(t)}{2} \\ -\frac{p_{21}(t) + p_{12}(t)}{2} & -p_{22}(t) + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} > 0$$

Или из (2.8)—(2.10) имеем

$$-p_{11}(t) + \frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon} > 0$$

$$\left(-p_{11}(t) + \frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right)\left(-p_{22}(t) + \frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right) - \frac{(p_{12}(t) + p_{21}(t))^2}{4} > 0 \tag{6.2}$$

Если в $p_{sr}(t)$ содержатся некоторые параметры, то их надо выбрать так, чтобы выполнялись неравенства (6.2).

Если имеют место $p_{sr}(t) = c_{sr} + \delta f_{sr}(t)$, то согласно рассуждениям в § 3 справедливы условия

$$-c_{11} + \frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon} > 0$$

$$\left(-c_{11} + \frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right)\left(-c_{22} + \frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right) - \frac{(c_{12} + c_{21})^2}{4} > 0 \tag{6.3}$$

2. Для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\,x_1 + p_{12}(t)\,x_2 + X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\,x_1 + p_{22}(t)\,x_2 + X_2 \tag{6.4}$$

Согласно (4.5) имеем

$$-p_{11} + \frac{\lambda}{2} - R(t) > 0 \qquad \left(\lambda = \frac{1}{T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right)$$

$$\left(-p_{11} + \frac{\lambda}{2} - R(t)\right)\left(-p_{22} + \frac{\lambda}{2} - R(t)\right) - \frac{(p_{12} + p_{21})^2}{4} > 0 \tag{6.5}$$

Здесь $R(t)$ — верхний точный предел функции

$$\frac{|x_1X_1 + x_2X_2|}{x_1^2 + x_2^2}$$

Сравнив (6.5) с (6.2), видим, что для системы (6.4) условия устойчивости более узкие, чем эти условия для линейной системы. Чем больше $R(t)$, тем у́же (6.5). Например, при $R(t) = {}^1/_2\lambda$ имеем

$$-p_{11} > 0, \ (-p_{11})(-p_{22}) - \frac{(p_{12} + p_{21})^2}{4} > 0 \tag{6.6}$$

Эти условия аналогичны условиям (6.2) для линейной системы (6.1) в случае

$$\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}=0$$

В этом случае $\varepsilon = C$, T — произвольное.

Когда ε, C достаточно малы, то $R(t)$ тоже очень мало. В этом случае согласно (2.11) имеем

$$-p_{11}+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}>0$$
$$\left(-p_{11}+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right)\left(-p_{22}+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right)-\frac{(p_{12}+p_{21})^2}{4}>0 \tag{6.7}$$

Это совпадает с (6.2) для линейной системы.

3. Для системы с постоянно действующими возмущениями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=p_{11}(t)x_1+p_{12}(t)x_2+X_1+R_1\\ \frac{dx_2}{dt}&=p_{21}(t)x_1+p_{22}(t)x_2+X_2+R_2\end{aligned} \tag{6.8}$$

и при условиях (5.2) имеем согласно (5.5) и (5.6) условия устойчивости

$$-(p_{11}+l_{11})+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}-R(t)>0$$
$$\left[-(p_{11}+l_{11})+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}-R(t)\right]\left[-(p_{22}+l_{22})+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}-R(t)\right]-$$
$$-\frac{[(p_{12}+l_{12})+(p_{21}+l_{21})]^2}{4}>0 \tag{6.9}$$

а при ε, C, достаточно малых, имеем

$$-(p_{11}+l_{11})+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}>0 \tag{6.10}$$
$$\left[-(p_{11}+l_{11})+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right]\left[-(p_{22}+l_{22})+\frac{1}{2T}\ln\frac{C}{\varepsilon}\right]-\frac{[(p_{12}+l_{12})+(p_{21}+l_{21})]^2}{4}>0$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. Г. Четаеву за постановку задачи и ценные указания.

Поступила 5 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ. 1955.
2. Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической системы. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
3. Лебедев А. А. К задаче об устойчивости движения на конечном интервале времени, ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
4. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.