Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + q(t)\eta(t) \tag{0.1}$$

где $f(x, t)$, $q(t)$ — известные функции своих аргументов. Везде в дальнейшем малыми латинскими буквами (за исключением буквы t, обозначающей время, и n — размерность системы) будем обозначать n-мерные векторы, малыми греческими буквами — скаляры и заглавными латинскими — квадратные матрицы n-го порядка. Символом $\|y\|$ будем обозначать норму $\|y\| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2}$ вектора y. Будем предполагать, что функции f определены и непрерывно дифференцируемы во всех точках пространства x при $t \geqslant t_0$, за исключением точек, лежащих на поверхностях

$$\xi_\alpha(x, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \mu) \tag{0.2}$$

пространства $x \times t$. Поверхности (0.2) не пересекаются, и в окрестностях этих поверхностей функции ξ_α предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Функции $q(t)$ — кусочно-гладкие и имеют (может быть) лишь конечное число разрывов первого рода[1] на каждом ограниченном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть для системы (0.1) сформулирована задача оптимального регулирования по быстродействию [1—3, 4] при ограничении

$$|\eta(t)| \leqslant 1 \tag{0.3}$$

т. е. при заданных начальном моменте $t = t_0$, точке $x = x_0$ и гладкой кривой $x = z(t)$ требуется определить кусочно-гладкую функцию $\eta^\circ(t)$ такую, что движущаяся точка $x(x_0, t_0, t, \eta^\circ)$ траектории системы (0.1), где $\eta(t) = \eta^\circ(t)$, попадает на кривую $x = z(t)$ за кратчайшее возможное время $T^\circ = t - t_0$. Очевидно, не уменьшая общности, можно полагать $t_0 = 0$ и $z(t) \equiv 0$, так как в противном случае достаточно сделать замену времени $\tau = t - t_0$ и координат $y = x - z(t)$. Поэтому в дальнейшем предполагаем $t_0 = 0$, $z(t) \equiv 0$.

Для решения таких задач в весьма общем случае гладких стационарных функций $f(x, u)$ (u — ρ-мерный вектор управления) в работах [1—3] был предложен и обоснован принцип максимума.

В настоящей статье в соответствии с подходом к задачам оптимального регулирования, описанным в статье [4], рассматриваются некоторые вопросы существования, а также необходимые и достаточные признаки оптимальных траекторий для нестационарной системы (0.1) с разрывами (0.2).

Рассуждения проводятся для общего случая систем n-го порядка. Однако в эффективной форме формулировка теорем для $n > 2$ затруднительна. Трудность при переходе от систем второго порядка к системам n-порядка заключается здесь лишь в том, что для нелинейных систем при $n > 2$ не может быть указано в общем случае эффективное правило проверки условия полной линейной независимости разрешающих функций $h(T, \tau)$ (см. ниже, стр. 211). Все случаи, когда утверждения справедливы лишь при $n = 2$, будем специально оговаривать.

---

[1] Прописной буквой T также будем обозначать время.

§ 1. Введем некоторые определения. 1. Поверхность $\xi_\alpha(x, t) = 0$ является *сечением* для траектории $x(x_0, t, \eta)$[1], если в окрестности точки пересечения $x(x_0, t_\alpha, \eta)$ с поверхностью $\xi_\alpha = 0$ при $t < t_\alpha$ имеем $\xi_\alpha < 0$, при $t > t_\alpha$ имеем $\xi_\alpha > 0$ и выполняются неравенства

$$\lim_{t\to t_\alpha+0}\left(\sum_\beta \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_\beta} f_\beta + \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial t}\right) = \frac{d\xi_\alpha}{dt^+} > \varepsilon > 0 \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to t_\alpha-0}\left(\sum_\beta \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_\beta} f_\beta + \frac{\partial\xi_\alpha}{\partial t}\right) = \frac{d\xi_\alpha}{dt^-} > \varepsilon > 0 \tag{1.2}$$

Здесь, естественно, предполагается, что на поверхностях (0.2) функции f и их производные имеют разрывы первого рода.

2. Пусть при изменении времени t на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ траектория $x(x_0, t, \eta)$ пересекает поверхности (0.2) в точках $t = t_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, \mu)$, причем будем считать, что эти поверхности перенумерованы в порядке возрастания t_α. Придадим функции $\eta(t)$ вариации $\delta\eta(t)$ и составим вдоль траектории $x(x_0, t, \eta)$ систему линейных уравнений в вариациях. Если для рассматриваемой траектории поверхности (0.2) являются сечениями то при составлении уравнений в вариациях следует руководствоваться правилом, обоснованным в статьях [5, 6], т. е. система линейного приближения для возмущений, вызванных вариациями $\delta\eta(t)$, включает линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{d\delta x}{dt} = P(t)\,\delta x + q(t)\,\delta\eta(t) \tag{1.3}$$

где элементы матрицы $P(t)$ вычисляются по формулам

$$\{P\}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}\right)_{x=x(x_0,\, t,\, \eta)} \qquad \text{при } t \neq t_\alpha \tag{1.4}$$

и линейные разрывы величин δx при переходе через точки $t = t_\alpha$ определяются соотношениями

$$\delta x(t_\alpha + 0) = A(t_\alpha)\,\delta x(t_\alpha - 0) \tag{1.5}$$

Коэффициенты матрицы $A(t_\alpha)$ следует вычислять по формулам [5]

$$\{A(t_\alpha)\}_{\beta\gamma} = \delta_{\beta\gamma} + \Delta_\beta(\alpha)\,\zeta_\gamma^{-\alpha} \qquad \left(\zeta_\gamma^{\alpha-} = \frac{\partial\xi_\beta / \partial x_\gamma}{d\xi_\alpha / dt^-}\right) \tag{1.6}$$

где $\delta_{\beta\beta} = 1$, $\delta_{\beta\gamma} = 0$ при $\beta \neq \gamma$, а $\Delta_\beta(\alpha)$ — величина разрыва f_β в точке $x = x(x_0, t_\alpha, \eta)$.

Применяя импульсные функции, линейные разрывы (1.5) можно включить в систему (1.3), но это не дает существенного упрощения рассуждений.

Систему (1.3) — (1.5) будем называть системой в вариациях.

3. Траекторию $x(x_0, t, \eta)$ системы (0.1) будем называть *допустимой*, если функция $\eta(t)$ удовлетворяет условию (0.3) и поверхности (0.2), которые эта траектория пересекает, являются для этой траектории сечениями.

4. Применим к системе в вариациях, составленной вдоль некоторой допустимой траектории $x(x_0, t, \eta)$, формулу Коши для решений неодно-

[1] В соответствии с выбором $t_0 = 0$ символ t_0 в обозначении $x(x_0, t_0, t, \eta)$ будем опускать, обозначая траекторию (0.1) символом $x(x_0, t, \eta)$.

родных линейных систем [7] (стр. 172). Полагая начальные вариации $\delta x(0)$ равными нулю и учитывая правила (1.5), можно записать

$$\delta x(t) = B_1 \int_0^{t_1} F_0(t_1) F_0^{-1}(\tau) q(\tau) \delta\eta(\tau) d\tau + \tag{1.7}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} B_{\alpha+1} \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} F_\alpha(t_{\alpha+1}) F_\alpha^{-1}(\tau) q(\tau) \delta\eta(\tau) d\tau + \int_{t_\mu}^{t} F_\mu(t) F_\mu^{-1}(\tau) q(\tau) \delta\eta(\tau) d\tau$$

где $F_\alpha(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.3) при $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$

$$F_\alpha(t_\alpha) = E, \qquad B_\alpha = F_\mu(t) A(t_\mu) F_{\mu-1}(t_\mu) \ldots F_\alpha(t_{\alpha+1}) A(t_\alpha)$$

μ — число поверхностей (0.2), которые пересекает траектория $x(x_0, t, \eta)$.

Если правую часть (1.7) записать в виде одного интеграла, то величины $\delta x(t)$ можно определить формулой

$$\delta x(t) = \int_0^t h(t, \tau) \delta\eta(\tau) d\tau \tag{1.8}$$

где вектор $h(t, \tau)$ известным образом выражается через функции из правой части (1.7). В дальнейшем решения системы в вариациях будем сразу записывать в виде (1.8).

Функцию $h(t, \tau)$ будем называть *разрешающим вектором* системы в вариациях. Вектор-функцию $h(t, \tau)$ в дальнейшем будем также записывать в виде $h(t, \tau) = D(t, \tau) q(\tau)$ или (при $t_\alpha < \tau < t_{\alpha+1}$) в виде $h(t, \tau) = G(t, \alpha) F_\alpha^{-1}(\tau) q(\tau)$, где матрицы $D(t, \tau)$ и $G(t, \alpha)$ известным образом выражаются через функции из правой части (1.7).

5. Разрешающий вектор $h(t, \tau)$ будем называть *неособым*, если скалярное произведение $(h(t, \tau) \cdot l)$ вектора h на любой ненулевой вектор l может обращаться в нуль лишь при отдельных изолированных значениях τ (при фиксированном t).

Отметим здесь один признак, позволяющий для нелинейной системы второго порядка установить, что разрешающий вектор $h(t, \tau)$ является неособым[1].

Лемма 1.1. Пусть $Q(x, t)$ — матрица, определенная равенством

$$\{Q(x, t)\}_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_\alpha(x, t)}{\partial x_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

причем в точках на поверхностях (0.2) следует рассматривать предельные значения Q^+ и Q^- при приближении к поверхности из областей $\xi_\alpha > 0$ и $\xi_\alpha < 0$ соответственно. Если при всех x из области G пространства $\{x\}$ и при $0 \leqslant t \leqslant T$ вектор $q(t)$ не коллинеарен вектору $dq/dt - Q(x, t) q(t)$ (включая и предельные значения Q, q, dq/dt в точках разрыва), то разрешающий вектор $h(T, t)$ системы в вариациях, вычисленной вдоль любой допустимой траектории $x(x_0, t, \eta)$, лежащей при $0 \leqslant t \leqslant T$ в области G, является неособым.

---

[1] С возрастанием размерности n эти признаки крайне усложняются, поэтому приводить их здесь в общей форме не будем. Ниже в § 2 приведем также один признак, при котором вектор $h(t, \tau)$ — неособый при $n = 3$.

Доказательство. Пусть при $t = t^*$ выполняется равенство

$$(h(T, t^*) \cdot l) = 0 \qquad \text{при} \, \|l\| \neq 0 \tag{1.10}$$

причем если $t = t^*$ есть точка разрыва $Q(x(t), t)$ или $q(t)$, то под $h(T, t^*)$ следует понимать правое или левое предельное значение $h(T, t)$. Пусть для определенности в равенстве (1.10) $h(T, t^*)$ — правое предельное значение $h(T, t)$. Вычислим правую производную $d(h(T, t) \cdot l) / dt^+$. По формуле (1.7) имеем

$$\frac{d(h(T, t) \cdot l)}{dt^+} = \left(\left[G(T, \alpha) \frac{d(F_\alpha^{-1}(t)\, q(t))}{dt^+}\right] \cdot l\right) \tag{1.11}$$

$$\text{при } t \geqslant t_\alpha, \ t < t_{\alpha+1}$$

где $G(T, \alpha)$ — некоторая неособая матрица, выражающаяся известным образом через матрицы F_γ и B_β (см. стр. 211). Известно [7] (стр. 171), что

$$\frac{dF_\alpha^{-1}(t)}{dt} = -F_\alpha^{-1}(t)\, P(t)$$

и поэтому из (1.11) имеем

$$\frac{d(h(T, t) \cdot l)}{dt^+} = \left(\left[G(T, \alpha)\, F_\alpha^{-1}(t) \left(\frac{dq}{dt^+} - P(t)\, q(t)\right) \cdot l\right)\right.$$

$$(P(t) = Q(x(x_0, t, \eta), t))$$

По условиям леммы вектор $dh / dt^+ = GF_\alpha^{-1}(t)(dq / dt^+ - Pq)$ не коллинеарен вектору $h = GF_\alpha^{-1}(t)\, q$ и, следовательно, два равенства

$$h \cdot l = 0, \qquad dh / dt^+ \cdot l = 0 \qquad \text{при } \|l\| \neq 0$$

выполняться одновременно не могут. Следовательно, в точке $t = t^*$ имеем

$$\frac{d(h(T, t) \cdot l)}{dt^+} \neq 0$$

т. е. $(h \cdot l) \neq 0$ в окрестности точки $t = t^*$ справа (при $t > t^*$).

Аналогичным образом показывается, что для левого предельного значения $h(T, t^*)$ из условия $(h \cdot l) = 0$ следует $(h \cdot l) \neq 0$ при малых $t - t^* < 0$. Лемма доказана.

Примечания. 1. Если вектор $q(t)$ является кусочно-постоянным, то $dq / dt^\pm = 0$ вне точек разрыва и поэтому вследствие леммы 1.1 для того, чтобы разрешающий вектор $h(T, t)$ был неособым, достаточно, чтобы вектор $q(t)$ не был собственным вектором матрицы $Q(x, t)$. Если область G является ограниченной и неравенства (1.1) и (1.2) выполняются равномерно для всех допустимых кривых, то величина $|d(h(T, t) \cdot l) / dt^\pm|$ имеет в области G при $t \in [0, T]$, $(h \cdot l) = 0$ и $\|l\| = 1$ положительный минимум. В этом случае при условиях леммы 1.1 разрешающий вектор $h(T, t)$ является неособым в усиленном смысле, а именно, существует постоянное число $\gamma > 0$ такое, что мера множества Σ_δ из $[0, T]$, где выполняется неравенство

$$(h(T, t) \cdot l) \leqslant \delta \tag{1.12}$$

удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes} \Sigma_\delta \leqslant \gamma\delta \tag{1.13}$$

каковы бы ни были вектор l ($\|l\| = 1$) и допустимая кривая $x(x_0, t, \eta)$, вдоль которой вычислена система уравнений в вариациях.

2. Наряду с вектором $h(T, t)$ будем рассматривать также вектор

$$g(t) = C(t_\alpha) F_\alpha^{-1}(t)\, q(t) \qquad \text{при } t_\alpha < t < t_{\alpha+1}$$

где

$$C(t_\alpha) = F_0^{-1}(t_1)\, A^{-1}(t_1) \ldots A^{-1}(t_{\alpha-1})\, F_{\alpha-1}^{-1}(t_\alpha)$$

Так как вектор-функции $h(T, t)$ и $g(t)$ связаны неособым линейным преобразованием $g(t) = H \cdot h(T, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, то условия неособенности векторов

$h(T, t)$ и $g(t)$ будут совпадать. Поэтому условия неособенности для $h(T, t)$, которые доказаны выше и будут выведены ниже, являются также условиями неособенности для $g(t)$, что особо далее оговаривать не будем. В дальнейшем часто рассматриваются функции вида $\eta(t) = \operatorname{sign}(h(T, t).l)$, где l — некоторый ненулевой вектор, $0 \leqslant t \leqslant T$. Ту же функцию $\eta(t)$ можно определить формулой $\eta(t) = \operatorname{sign}(g(t)\cdot l')$, где вектор l' связан с вектором l известным неособым линейным преобразованием.

6. Приведем один результат из книги [8], который существенно используется в дальнейшем.

Рассмотрим задачу: определить функцию $\zeta(t, c)$, удовлетворяющую условию

$$|\zeta(t, c)| \leqslant 1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.14}$$

и такую, что выполняется равенство

$$c = \int_0^T h(T, \tau)\zeta(\tau, c)\, d\tau \tag{1.15}$$

Согласно теореме [8] (стр. 171—179) функция $\zeta(t, c)$ для данного вектора c, времени T и разрешающего вектора $h(T, t)$ существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\min_{(l\cdot c)=1} \left(\int_0^T |(h(T, \tau)\cdot l)|\, d\tau\right) \geqslant 1 \tag{1.16}$$

Если вектор $h(T, t)$ неособый и в условии (1.16) выполняется строгое равенство, то существует единственное решение задачи (1.15) (с точностью до значений на множестве меры нуль, чем мы пренебрегаем), причем функция $\zeta(t, c)$ определяется формулой

$$\zeta(t, c) = \operatorname{sign}(h(T, t)\cdot l^{\circ}) \tag{1.17}$$

где l° — вектор, разрешающий задачу (1.16).

В работе [9] показано, что функции $\zeta(t, c)$, решающие задачу (1.15), можно выбрать непрерывными по мере относительно вектора c, т. е. функция $\zeta(t, c)$ будет сходится по мере к функции $\zeta(t, c^*)$ при $c \to c^*$.

Множество точек c в пространстве векторов $\{c\}$, для которых при данном T и разрешающем векторе $h(T, t)$ задача (1.15), (1.14) разрешима, является замкнутым выпуклым множеством, охватывающим точку $c = 0$ [8] (стр. 171—179). Это множество назовем областью достижимости при данных T и h и обозначим $\Delta(T, h)$. Из результатов [8] следует также, что в случае неособых векторов h область $\Delta(T, h) \to \Delta(T^*, h^*)$, если $T \to T^*$ и $h(T, t) \to h^*(T^*, t)$ по мере на отрезке $[0, T^*]$.

§ 2. В этом параграфе для кусочно-гладкой системы (0.1) обосновываются необходимые условия оптимальности, кратко изложенные ранее [4] для случая гладких функций f и обоснованные там подробно для нестационарных линейных систем. Путем некоторого усложнения доказательств рассуждения, приведенные ниже, можно распространить на случай несколько управляющих функций $\eta_1(t), \ldots, \eta_p(t)$, подчиненных каждая условию (0.3). В этой статье, однако, ограничимся лишь случаем одной управляющей функции $\eta(t)$.

Пусть система обладает оптимальной траекторией $x(x_0, t, \eta^{\circ})$ и T° — оптимальное время управления, $\eta^{\circ}(t)$ — оптимальное управление, определяющее рассматриваемую оптимальную траекторию.

В соответствии с планом, намеченным в статье [4], для вывода необходимых условий оптимальности следует рассмотреть величину

$$\sigma[\eta] = \sup|\eta(t)| \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T^\circ \tag{2.1}$$

[строго говоря, здесь следует рассматривать величину

$$\sigma^*[\eta] = vrai \sup|\eta(t)| \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T^\circ \tag{2.2}$$

т. е. верхнюю грань величины $|\eta(t)|$ на отрезке $[0, T^\circ]$, за исключением подмножеств нулевой меры, однако этим обстоятельством везде в дальнейшем будем пренебрегать, не оговаривая особо, и поэтому вместо (2.2) будем рассматривать величину (2.1)]. Будем предполагать выполнение следующих условий.

1. Оптимальная траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ соединяет точки $x = x_0$ и $x = 0$ и пересекает μ гиперповерхностей (0.2) при $t = t_\alpha < T^\circ$ $(\alpha = 1, \ldots, \mu)$.

2. Разрешающий вектор $h^\circ(T^\circ, t)$ для системы в вариациях (1.3), (1.5), вычисленной вдоль траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$, является неособым.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия 1, 2, тогда на оптимальной управляющей функции $\eta^\circ(t)$ функционал $\sigma[\eta]$ достигает относительного минимума

$$\sigma[\eta^\circ] = \sigma_{\min} = 1 \tag{2.3}$$

для вариаций $\delta\eta(t)$, стесненных условием

$$\int_0^{T^\circ} h^\circ(T^\circ, \tau)\,\delta\eta(\tau)\,d\tau = 0 \tag{2.4}$$

Доказательство. Предположим от противного, что для оптимального управления $\eta^\circ(t)$ условия (2.3), (2.4) не выполняются. Пусть сначала

$$\sigma[\eta^\circ] = \alpha < 1 \tag{2.5}$$

Тогда согласно п. 6, § 1 при условиях (2.5) для любого вектора c

$$\|c\| \leqslant \delta \qquad (\delta > 0) \tag{2.6}$$

при достаточно малом $\delta > 0$ существует функция $\zeta_\nu(t, c)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{T_\nu} h^\circ(T_\nu, \tau)\,\zeta_\nu(\tau, c)\,d\tau = c \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

$$|\zeta_\nu(t, c)| \leqslant 1 - \alpha \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_\nu = T^\circ - \tau_\nu \tag{2.8}$$

где $\{\tau_\nu\}$ — некоторая монотонно сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $\tau_1 < {}^1/_2 T^\circ$. Функции $\zeta_\nu(t, c)$ при каждом фиксированном значении $\nu \geqslant 1$ можно в соответствии с результатами [9], упомянутыми в п. 6, § 1, выбрать непрерывно зависящими по мере от вектора c из (2.6). Определим вариации $\delta\eta_\nu(t, c, \mu)$ функции $\eta^\circ(t)$ формулами

$$\delta\eta_\nu(t, c, \mu) = \mu\zeta_\nu(t, c) \tag{2.9}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр. Рассмотрим решения системы в вариациях $\delta x^{(\nu)}(t, c, \mu)$, соответствующие вариациям (2.9).

По формуле (1.8) имеем вследствие (2.7) и (2.9)

$$\delta x^{(\nu)}(T_\nu, c, \mu) = \int_0^{T_\nu} h^\circ(T_\nu, \tau)\,\delta\eta_\nu(\tau, c, \mu)\,d\tau = \mu c \tag{2.10}$$

Из равенства (2.10) по определению (2.9) вариаций $\delta\eta_\nu$ заключаем, что конец вектора $y = \delta x^{(\nu)}(T_\nu, c, \mu)$ при каждом $\nu \geqslant 1$ опишет сферу

$$\|y\| \leqslant \mu\delta \tag{2.11}$$

когда вектор c пробегает область (2.6). Кроме того, вследствие (2.5) и (2.8) выполняется неравенство

$$|\eta^\circ(t) + \delta\eta_\nu(t, c, \mu)| \leqslant 1 \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_\nu, \ \mu \leqslant 1 \tag{2.12}$$

Рассмотрим теперь поведение траекторий системы (0.1), соответствующих управляющим функциям $\eta(t) = \eta^\circ(t) + \delta\eta_\nu(t, c, \mu)$. Отклонения $\delta^\vee x^{(\nu)}(t, c, \mu)$ этих траекторий от рассматриваемой оптимальной траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$ будут удовлетворять полным уравнениям возмущенного движения

$$\frac{d\delta^\vee x}{dt} = P(t)\delta^\vee x + q(t)\,\delta\eta_\nu(t, c, \mu) + r(\delta^\vee x, t) \tag{2.13}$$

которые в отличие от системы уравнений в вариациях (1.3) и (1.5) содержат в правой части добавочные функции $r(\delta^\vee x, t)$. На каждом интервале непрерывности $(t_\alpha + \beta, t_{\alpha+1} - \beta)\,(\beta > 0)$ функции $r(\delta^\vee x, t)$ являются малыми высшего порядка по δx, т. е.

$$r(\delta^\vee x, t) = o(\|\delta^\vee x\|) \tag{2.14}$$

а в окрестностях точек разрыва $t = t_\alpha$, помимо слагаемых порядка (2.14), функции $r(\delta^\vee x, t)$ включают также слагаемые, компенсируемые с точностью до порядка (2.14) линейными скачками (1.5) решений системы в вариациях. Учитывая (2.9) и повторяя рассуждения из [5, 6], можно проверить, что при вариациях $\delta\eta_\nu(t, c, \mu)$ действительные отклонения $\delta^\vee x^{(\nu)}(t, c, \mu)$ отличаются от решений $\delta x^{(\nu)}(t, c, \mu)$ системы в вариациях на величину порядка, высшего, чем μ, т. е.

$$\|\delta^\vee x^{(\nu)}(t, c, \mu) - \delta x^{(\nu)}(t, c, \mu)\| = o(\mu) \tag{2.15}$$

Здесь вывод оценки (2.15) приводить не будем, так как с учетом результатов [5, 6] этот вывод получается хорошо известными в качественной теории и теории устойчивости приемами [7] (стр. 19—22). Заметим лишь для дальнейшего, что оценка (2.15) определяется свойствами непрерывности функций f, $\partial f_\gamma / \partial x_\beta$, $\partial f_\gamma / \partial t$, $\partial\xi_\alpha / \partial x_\beta$, $\partial\xi_\alpha / \partial t$ (в областях их непрерывности) и величиной чисел T° и ε из (1.1), (1.2). Поэтому, если рассматривается не одна, как здесь, невозмущенная траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$, а совокупность таких траекторий, как это делается иногда в следующих параграфах, причем оценки непрерывности и чисел T°, ε являются равномерными по всей совокупности невозмущенных траекторий, то и оценка малости (2.15) также будет выполняться равномерно, т. е.

$$\|\delta^\vee x^{(\nu)}(t, c, \mu) - \delta x^{(\nu)}(t, c, \mu)\| \leqslant \varphi(\mu)\mu, \quad \varphi(\mu) \to 0 \qquad \text{при } \mu \to 0 \tag{2.16}$$

для всей совокупности траекторий.

Пусть число $\mu_0 > 0$ выбрано из условия

$$\|\delta^\vee x^{(\nu)}(t, c, \mu) - \delta x^{(\nu)}(t, c, \mu)\| \leqslant \tfrac{1}{16}\,\delta\mu_0 \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_\nu \tag{2.17}$$

Тогда из (2.11) и из неравенства (2.17) заключаем, что точки $x(x_0, T_\nu, \eta^\circ + \delta\eta_\nu(t, c, \mu_0))$ при каждом $\nu \geqslant 1$ заполняют некоторое многообразие $\Sigma(\nu)$, охватывающее точку $x(x_0, T_\nu, \eta^\circ)$. Так как вариации

$\delta\eta_\nu(t, c, \mu_0)$ при каждом фиксированном $\nu \geqslant 1$ меняются непрерывно по мере с изменением c в (2.6), то многообразие $\Sigma(\nu)$ является непрерывным образом сферы

$$\| x(x_0, T_\nu, \eta^\circ) - x \| \leqslant \mu_0 \delta \tag{2.18}$$

и точки $x \in \Sigma(\nu)$, являющиеся образами точек, лежащих на границе сферы (2.18), удалены от этой границы на расстояние, меньшее чем $^1/_{16}\, \delta\mu_0$. Вследствие $\tau_\nu \to 0$ при достаточно больших значениях ν будет выполняться неравенство

$$\| x(x_0, T_\nu, \eta^\circ) \| \leqslant \tfrac{1}{16} \mu_0 \delta \tag{2.19}$$

и поэтому при этих значениях ν многообразия $\Sigma(\nu)$ будут охватывать точку $x = 0$. При этом многообразие $\Sigma(\nu)$ можно рассматривать как непрерывный образ сферы

$$\| x \| \leqslant \mu_0 \delta \tag{2.20}$$

такой, что точки из $\Sigma(\nu)$ — образы точек, лежащих на поверхности сферы (2.20), удалены от границы этой сферы на расстояние, меньшее чем $^1/_8 \mu_0 \delta$.

Теперь на основании теорем о корнях [10] можно заключить, что существует вариация $\delta\eta_{\nu_0}(t, c^*, \mu_0)$, для которой выполняется равенство

$$x(x_0, T_{\nu_0}, \eta^\circ + \delta\eta_{\nu_0}(t, c^*, \mu_0)) = 0 \tag{2.21}$$

которое означает, что траектория $x(x_0, t, \eta^\circ + \delta\eta_{\nu_0}(t, c^*, \mu_0))$ при выполнении условия (2.12) достигает точку $x = 0$ за время $t = T_{\nu_0} < T^\circ$ (при некотором фиксированном, достаточно большом значении $\nu = \nu_0$), т. е. рассматриваемая первоначально траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ не является оптимальной траекторией. Полученное противоречие показывает, что для оптимального управления неравенство (2.5) невозможно.

Предположим теперь, что выполняется равенство

$$\sigma[\eta^\circ] = 1 \tag{2.22}$$

но величина $\sigma[\eta^\circ]$ не является минимальной относительно возмущений управления $\delta\eta(t)$, стесненных условием (2.4). Тогда существует вариация $\mu\delta\eta(t)$ такая, что

$$\sigma[\eta^\circ + \mu\delta\eta] = \sup |\eta^\circ(t) + \mu\delta\eta(t)| = 1 - \varepsilon\mu \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1) \tag{2.23}$$

Здесь $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $\mu \geqslant 0$ — параметр

$$\int_0^{T^\circ} h^\circ(T^\circ, \tau)\, \mu\delta\eta(\tau)\, d\tau = 0 \tag{2.24}$$

В силу условия (2.24) решения $\delta x(t, \mu)$ системы в вариациях, соответствующие вариации $\mu\delta\eta(t)$, удовлетворяют условию

$$\delta x(T^\circ, \mu) = 0$$

Так как оптимальная траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ при $t = T^\circ$ приходит в точку $x = 0$ и так как отклонение действительной траектории (0.1), соответствующей вариации $\mu\delta\eta\ (t)$, от решения системы в вариациях удовлетворяет оценке (2.15), то

$$\| x(x_0, T^\circ, \eta^\circ + \mu\delta\eta) \| = o(\mu) \tag{2.25}$$

С другой стороны, разность $1 - \sigma[\eta^\circ + \mu\delta\eta] = \varepsilon\mu$ имеет первый порядок малости по μ, и поэтому, повторяя рассуждения, приведенные в начале данного доказательства, придем к выводу, что для последовательности $T_\nu = T^\circ - \tau_\nu$ $(\tau_\nu > 0)$ возможно указать столь малое число μ_0 и вариации $\delta\eta(t, c, \mu_0)$ к функции $\eta(t) = \eta^\circ(t) + \mu_0\,\delta\eta(t)$, чтобы решения $\delta x^\nu(t, c, \mu_0)$ системы в вариациях заполнили сферу (2.11) (при $\mu = \mu_0$ и некотором постоянном $\delta > 0$), а отклонения линейного приближения $\delta x^{(\nu)}$ от решений полных уравнений $\delta^\nu x^{(\nu)}$ были меньше чем $\delta\mu_0/16$. Так как с изменением μ радиус сферы (2.11) убывает линейно, а расстояние (2.25) имеет высший порядок малости по μ, то число μ_0 можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось условие

$$\| x(x_0, T^\circ, \eta^\circ + \mu_0\,\delta\eta) \| < \tfrac{1}{16}\,\delta\mu_0$$

Если число $\tau_\nu = T^\circ - T_\nu$ столь мало, что выполняется неравенство

$$\| x(x_0, T_\nu, \eta^\circ + \mu_0\delta\eta) - x(x_0, T^\circ, \eta^\circ + \mu_0\,\delta\eta) \| < \tfrac{1}{16}\mu_0\delta$$

то можно утверждать, что точки

$$x = x(x_0, T_\nu, \eta_0 + \mu_0\delta\eta + \delta\eta(t, c, \mu_0))$$

когда конец вектора c пробегает сферу (2.6), заполняют многообразие $\Sigma(\nu)$, которое является непрерывным образом сферы (2.20), и расстояние точек $x \in \Sigma(\nu)$, являющихся образом точек, лежащих на границе сферы (2.20), от точек этой границы меньше чем $^3/_{16}\,\mu_0\delta$.

Теперь, как и выше, по теореме о корнях [10] заключаем, что существует траектория $x(x_0, t, \eta^\circ + \mu_0\delta\eta + \delta\eta(t, c^*, \mu_0))$, приходящая в точку $x = 0$ при $t = T_{\nu_0} < T^\circ$, причем управление $\eta(t) = \eta^\circ(t) + \mu_0\delta\eta + \delta\eta(t, c^*, \mu_0)$ удовлетворяет условию (0.3). Но это опять противоречит предположению, что $x(x_0, t, \eta^\circ)$ есть оптимальная траектория.

Полученные противоречия доказывают теорему.

Доказанная теорема позволяет установить вид оптимального уравнения $\eta_0(t)$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. При условиях 1 и 2, если $\eta^\circ(t)$ есть оптимальное управление, порождающее оптимальную траекторию $x(x_0, t, \eta^\circ)$, то

$$\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(h^\circ(T^\circ, t) \cdot l^\circ) \tag{2.26}$$

где l° — некоторый ненулевой вектор[1].

Доказательство. Рассмотрим вектор

$$c^\circ = \int_0^{T^\circ} h^\circ(T^\circ, \tau)\,\eta^\circ(\tau)\,d\tau \tag{2.27}$$

Утверждение теоремы 2.1 означает, что не существует функции $\eta(t)$, удовлетворяющей условиям

$$c^\circ = \int_0^{T^\circ} h^\circ(T^\circ, \tau)\,\eta(\tau)\,d\tau \tag{2.28}$$

и

$$\sup|\eta(t)| = \alpha < 1 \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T^\circ \tag{2.29}$$

Согласно результатам [8], приведенным в п. 6, § 1, функция $\eta^\circ(t)$, удовлетворяющая этим условиям, определяется единственным образом и имеет вид (2.26). Этим теорема 2.2 доказана.

---

[1] Согласно примечанию 2 § 1 на стр. 9 управляющая функция $\eta^\circ(t)$ определяется также формулой $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(g(t) \cdot l')$, где l' — некоторый ненулевой вектор.

Примечание. В соответствии с результатами [8] (см. § 1) здесь вектор l° удовлетворяет условию: l° есть решение задачи

$$1 = \min_{(c^\circ \cdot l)=1} \int_0^{T^\circ} |(h^\circ(T^\circ, \tau) \cdot l^\circ| \, d\tau \tag{2.30}$$

Условия (2.26) и (2.30) в случае нелинейных систем крайне трудно использовать для эффективного определения оптимального управления, так как ни вектор c°, ни разрешающая вектор-функция $h^\circ(T^\circ, t)$ наперед не известны (в случае линейной системы разрешающая функция $h(T, t)$ одинакова для всех траекторий (при данном T), а c° есть вектор—$F(T)x_0$). В нелинейном случае функция $h(T, t)$ зависит от траектории, которая в свою очередь определяется управлением $\eta(t)$. Основная трудность состоит в таком подборе вектора l°, при котором соответствующая оптимальная траектория приходит в заданную конечную точку $x_1 = 0$. Получение эффективно разрешимых уравнений для определения из этого условия вектора l°, как правило, невозможно, так как уравнения (0.1) в большинстве случаев не могут быть проинтегрированы при $\eta^\circ(t)$ из формулы (2.26) в элементарной форме. Эту трудность можно обойти, подбирая испытаниями вектор l°. При этом от системы дифференциальных уравнений следует перейти к соответствующей системе разностных уравнений с малым шагом Δt:

$$\Delta x^{(\rho)} = [f(x(\rho\Delta t), \rho\Delta t) + q(\rho\Delta t)\,\eta(\rho\Delta t)]\,\Delta t \qquad (\rho = 0, 1, \ldots) \tag{2.31}$$

Связь задачи оптимального управления для разностных и дифференциальных линейных уравнений рассмотрена в статье [11]. Разностные уравнения (2.31) можно интегрировать по шагам следующим образом: задаемся числами l^0_β — проекциями l° и вычисляем в начальной точке значения $h^\circ(T^\circ, 0)$ [собственно в точке $x = x_0$, $\rho = 0$ можем вычислить лишь величины $g_\beta(0)$ — проекции $g(t)$, которые получаются из $h^\circ_\beta(T^\circ, 0)$] неособым линейным преобразованием (см. примечание 2, § 1 на стр. 9); вследствие произвольного выбора l° это обстоятельство является несущественным и в формуле (2.26) вместо $h^\circ(T^\circ, t)$ можно писать $g(t)$]. [По l° и $g(0)$ определяем $\eta^\circ(0)$ из условия (2.26), затем по $\eta^\circ(0)$ из системы (2.31) при $\rho = 0$ определяем $x(\Delta t) = x_0 + \Delta x^{(\circ)}$. Теперь в точке $x = x(\Delta t)$ определяем $g(\Delta t)$ и снова по формуле (2.26) — $\eta(\Delta t)$ и т. д. [1].

Если определенная таким образом траектория после достаточного числа шагов не подходит близко к точке $x = 0$, следует испытать другой вектор l° и т. д. Вследствие отсутствия регулярного правила для определения вектора l° условия, которые даются данным необходимым признаком, следует рассматривать главным образом как наводящие соображения для определения оптимальной траектории.

Отметим одно следствие из теорем 2.1 и 2.2 в случае систем второго порядка.

Следствие 2.1. Пусть при всех x из области G и при $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$ вектор $q(t)$ не коллинеарен вектору $dq/dt - Qq$, где матрица Q определена равенством (1.9). Если траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ является оптимальной и пересекаемые ею гиперповерхности разрывов (0.2) являются для нее сечениями, то оптимальное управление $\eta^\circ(t)$ является кусочно-гладкой функцией вида $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(h^\circ(T^\circ, t) \cdot l^\circ)$ [или иначе — $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(g(t) \cdot l')$] и на этой функции величина $\sigma[\eta] = \sup|\eta(t)|$ при $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$ имеет относительный минимум

$$\sigma[\eta^\circ] = \sigma_{min} = 1 \tag{2.32}$$

---

[1] Для определения $g(\rho\Delta t)$ $(\rho = 0, 1, \ldots)$ следует вычислять значения фундаментальной матрицы решений системы в вариациях (1.3) — (1.5), которую также можно заменить уравнениями в конечных разностях.

при вариациях $\delta\eta$, стесненных условием[1]

$$\int_0^{T^\circ} h^\circ(T^\circ, \tau)\,\delta\eta(\tau)\,d\tau = 0 \tag{2.33}$$

В частности, если функции f являются гладкими и вектор $q(t)$ не коллинеарен вектору $dq/dt - Qq$, условия (2.32), (2.33) суть необходимые условия оптимальности.

Справедливость 2.1 следует сразу из леммы 1.1 и теорем 2.1 и 2.2.

Рассмотрим еще систему (0.1) при $n = 3$. Пусть функции $f(x, t)$ в правой части (0.1) непрерывны и имеют непрерывные частные производные второго порядка по всем аргументам, а вектор q является постоянным. Докажем сначала достаточные условия, при которых разрешающий вектор $h(T^\circ, t)$ является неособым.

Лемма 2.1. Вектор $h(T, t)$, вычисленный для системы в вариациях (1.3), построенной на любой допустимой траектории $x(x_0, t, \eta)$, лежащей при $0 \leqslant t \leqslant T$ в области G, будет неособым, если выполняются следующие условия: векторы q, Qq, Rq являются некомпланарными при $x \in G$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$. Здесь матрица Q определена (1.9), а для R

$$\{R\}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_\alpha}(f_\alpha(x, t) + q_\alpha \eta) - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\, \partial t} \tag{2.34}$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что имеют место равенства (проверку которых опускаем)

$$\frac{d\,(h(T^\circ, t)\cdot l)}{dt} = ([D(T^\circ, t)\,Qq]\cdot l), \qquad \frac{d^2(h(T^\circ, t)\cdot l)}{dt^2} = ([D(T^\circ, t)\,Rq]\cdot l) \tag{2.35}$$

где D—неособая матрица такая, что $h(T^\circ, t) = D(T^\circ, t)\,q$ (см. стр. 211). Так как векторы q, Qq и Rq некомпланарны, то не существует вектора $l \neq 0$ и удовлетворяющего условиям

$$(h\cdot l) = 0, \quad \left(\frac{dh}{dt}\cdot l\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2h}{dt^2}\cdot l\right) = 0$$

т. е. функция $(h(T^\circ, t)\cdot l)$ может обращаться в нуль лишь в отдельных изолированных точках t, т. е. вектор $h(T^\circ, t)$ является неособым.

Из леммы 2.1 и теорем 2.1, 2.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. Если траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$, соединяющая точки $x = x_0$ и $x = 0$, при $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$ является оптимальной и лежит в области G' где при $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$ векторы q, Qq и Rq являются некомпланарными, то оптимальное управление $\eta^\circ(t)$, порождающее эту траекторию, является кусочно-гладкой функцией $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(h^\circ(T^\circ, t)\cdot l^\circ)$ (или иначе $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(g(t)\cdot l'))$, где $l^\circ(l')$ — некоторый ненулевой постоянный вектор, функция $\eta^\circ_1(t)$ является решением задачи для $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$ $\min\max|\eta(t)| = 1$ при вариациях $\delta\eta$ стесненных условиями

$$\int_0^{T^\circ} h^\circ(T^\circ, \tau)\,\delta\eta(\tau)\,d\tau = 0$$

[1] Или, что то же самое, условием

$$\int_0^{T^\circ} g(\tau)\,\delta\eta(\tau)\,d\tau = 0$$

$h^\circ(T, t)$ — разрешающий вектор, вычисленный для системы уравнений в вариациях (1.3), построенной на $x = x(x_0, t, \eta^\circ)$.

§ 3. В этом параграфе выясняются некоторые вопросы существования оптимальной траектории с кусочно-гладким управлением в силу нелинейной системы (0.1). Будем предполагать, что конечная точка $x = 0$ не лежит на гиперповерхности из семейства (0.2), а функции f и q в правой части системы (0.1) удовлетворяет неравенству

$$\| f(x, t) \| \leqslant \lambda_1 \| x \| + \lambda_2, \qquad \| q(t) \| \leqslant \lambda_3 \qquad (\lambda_{1,\ldots,3} = \mathrm{const}) \tag{3.1}$$

при всех x и $t \in [0, T]$. Условия (3.1) выполняются во всяком случае, если функции f имеют в областях их непрерывности равномерно ограниченные частные производные $\partial f_\beta / \partial x_\gamma$. Для дальнейших рассуждений условия (3.1) не являются необходимыми, они облегчают рассуждения.

Пусть существует по крайней мере одно управление $\eta(t)$, удовлетворяющее условию (0.3), и такое, что соответствующая траектория $x(x_0, t, \eta)$ соединяет исходную точку $x = x_0$ с конечной $x = 0$ дугой $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть $T_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ — монотонная, невозрастающая последовательность чисел такая, что для каждого $\nu \geqslant 1$ существует управление $\eta_\nu(t)$, удовлетворяющее условию (0.3), и такое, что соответствующая траектория $x(x_0, t, \eta)$ удовлетворяет условию

$$x(x_0, T_\nu, \eta_\nu) = 0 \tag{3.2}$$

причем не существует управления $\eta^*(t)$, удовлетворяющего (0.3) и

$$x(x_0, t, \eta^*) = 0 \tag{3.3}$$

при $t < T_\infty$, где $T_\infty = \lim T_\nu$ при $\nu \to \infty$.

Если при некотором $\nu \geqslant 1$ выполняется равенство $T_\nu = T_\infty$, то предполагая, что траектория $x(x_0, t, \eta_\nu)$ пересекает гиперповерхности $\xi_\alpha = 0$ с выполнением условий сечения (1.1) и (1.2), а разрешающий вектор $h^{(\nu)}(T_\nu, t)$ соответствующей системы в вариациях является неособым, вследствие (3.3) можно утверждать, что траектория $x(x_0, t, \eta_\nu)$ является оптимальной и по теоремам 2.1 и 2.2 этой траектории соответствует кусочно-гладкое управление $\eta_\nu(t)$ вида $\eta_\nu(t) = \mathrm{sign}(h^\nu(T_\nu, t) \cdot l)$.

Поэтому здесь интересно рассмотреть лишь случай, когда при каждом $\nu \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$T_\nu > T_\infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

и следовательно, имеется бесконечная совокупность траекторий $x^{(\nu)}(t) = x(x_0, t, \eta_\nu)$, образующих минимизирующую последовательность $\{x^{(\nu)}(t)\}$.

Сделаем одно замечание. Функции f в правой части системы (0.1) могут иметь разрывы на гиперповерхностях $\xi_\alpha = 0$. Будем предполагать, что кривые $x^{(\nu)}(t)$, начиная с достаточно большого номера ν, пересекают гиперповерхности $\xi_\alpha = 0$ с выполнением условий сечения (1.1) и (1.2).

Класс допустимых управлений $\eta(t)$ ограничим лишь кусочно-гладкими функциями. Если допустить более широкий класс функций, для которого существуют решения системы (0.1) в обобщенном смысле, например в смысле, определенном в работе [12], то доказательство можно было бы упростить; но здесь ограничимся при проведении рассуждений лишь классическими решениями, хотя это несколько удлинит доказательство.

Покажем, что при определенных ограничениях такое кусочно-гладкое управление $\eta^\circ(t)$ действительно существует и определяет оптимальную траекторию $x(x_0, t, \eta^\circ)$, являющуюся предельной траекторией для подпоследовательности $\{x^{(\nu)}(t)\}$, а само управление $\eta^\circ(t)$ есть функция, к которой управления $\eta_\nu(t)$ сходятся на отрезке $[0, T_\infty]$ по мере. Приведем здесь краткое изложение доказательства. Обстоятельное доказательство существования оптимального управления в случае гладких функций было выполнено Ф. М. Кирилловой.

Прежде всего, используя условие (3.1), рассуждениями, типичными для задач о продолжимости траекторий [7] (стр. 17—19), можно проверить, что семейство функций $x^{(\nu)}(t)$ равномерно ограничено при $0 \leqslant t \leqslant T_\infty$ и поэтому вследствие (3.1) это семейство является также равностепенно-непрерывным. Поэтому из последовательности $\{x^{(\nu)}(t)\}$ можно выделить равномерно сходящуюся последовательность $\{x^{(\nu_\beta)}(t)\}$ $(\beta = 1, 2, \ldots)$.

Предположим, что предельная функция $x^\infty(t)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2) и разрешающий вектор $h^\infty(T_\infty, t)$ системы в вариациях, построенной формально вдоль кривой $x = x^\infty(t)$, является неособым.

Дальнейшая задача — доказать, что кривая $x = x^\infty(t)$ является оптимальной траекторией системы (0.1) и эта траектория соответствует кусочно-гладкому управлению $\eta^\circ(t)$. Докажем это. Подпоследовательность $\{x^{(\nu_\beta)}(t)\}$ занумеруем заново числами $\nu = 1, 2, \ldots$.

Пусть $h^{(\nu)}(T_\infty, t)$ — разрешающие вектор-функции систем в вариациях, вычисленных вдоль $x^{(\nu)}(t)$. Так как при $\nu \to \infty$ матрицы коэффициентов этих систем $P^{(\nu)}(t)$ на интервалах непрерывности $t_\alpha^\infty - \gamma < t < t_\alpha^\infty + \gamma$ $(\gamma > 0)$ сходятся равномерно к матрице $P^\infty(t)$ коэффициентов предельной системы в вариациях, вычисленной вдоль $x = x^\infty(t)$, числа $t_\alpha^{(\nu)}$ сходятся к числам t_α^∞ ($t = t_\alpha$ —моменты пересечения траекторий с гиперповерхностями $\xi_\alpha = 0$), то разрешающие вектор-функции $h^{(\nu)}(T_\infty, t)$ сходятся по мере к вектор-функции $h^\infty(T_\infty, t)$.

Рассмотрим последовательность векторов

$$c^{(\nu)} = \int_0^{T_\infty} h^\infty(T_\infty, \tau)\, \eta_\nu(\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

Так как $|\eta_\nu(t)| \leqslant 1$, то все точки $c^{(\nu)}$ лежат в области достижимости $\Delta(T_\infty, h^\infty)$ (см. стр. 213). Точки $c^{(\nu)}$ при $\nu \to \infty$ сходятся к некоторому множеству точек, лежащих на границе $\Delta(T_\infty, h^\infty)$. Если бы это было не так, то повторяя с несущественными изменениями рассуждения из доказательства теоремы 2.1 (стр. 214 — 217), мы построили бы траекторию $x(x_0, t, \eta)$, приходящую в точку $x = 0$ при $t = T_\infty - \tau^*$, где $\tau^* > 0$. Это невозможно.

Рассмотрим теперь некоторую сходящуюся подпоследовательность $c^{(\nu_\gamma)}$. Пусть $\lim c^{(\nu_\gamma)} = c^\infty$, где точка $c = c^\infty$ лежит на границе $\Delta(T_\infty, h^\infty)$ и $\eta^\infty(\tau)$ — кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$c^\infty = \int_0^{T_\infty} h^\infty(T_\infty, \tau)\, \eta^\infty(\tau)\, d\tau \tag{3.6}$$

$$|\eta^\infty(t)| \leqslant 1 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_\infty \tag{3.7}$$

Так как c^∞ лежит на границе $\Delta(T_\infty, h^\infty)$, то согласно п. 6°, § 1 в силу теорем из книги [8] функция $\eta^\infty(t)$ определяется единственным образом из условия

$$\eta^\infty(t) = \operatorname{sign}(h^\infty(T_\infty, t)\cdot l^\infty) \qquad (l^\infty \neq 0,\ l^\infty = \mathrm{const}) \tag{3.8}$$

Покажем, что функции $\eta_{\nu_\gamma}(t)$ сходятся к $\eta^\infty(t)$ по мере. В самом деле для последовательности векторов

$$e^{(\nu_\gamma)} = c^{(\nu_\gamma)} - c^\infty \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

выполняются условия

$$\lim e^{(\nu_\gamma)} = 0 \qquad \text{при } \gamma \to \infty \tag{3.10}$$

$$e^{(\nu_\gamma)} = \int_0^{T_\infty} h^\infty(T_\infty, \tau)\,\zeta^{(\nu_\gamma)}(\tau)\,d\tau \qquad (\zeta^{(\nu_\gamma)}(\tau) = \eta_{\nu_\gamma}(\tau) - \eta^\infty(\tau)) \tag{3.11}$$

Умножая левую и правую части (3.11) скалярно на вектор l^∞, получим

$$(e^{(\nu_\gamma)}\cdot l^\infty) = \int_0^{T_\infty} (h^\infty(T_\infty, \tau)\cdot l^\infty)\,\zeta^{(\nu_\gamma)}(\tau)\,d\tau \tag{3.12}$$

Вследствие равенства $\eta^\infty(t) = \operatorname{sign}(h^\infty(T_\infty, t)\cdot l_\infty)$ подынтегральная функция в правой части (3.12) не меняет знак (знак $\zeta^{(\nu_\gamma)}(t)$, очевидно, может быть лишь противоположным знаку $\eta^\infty(t)$). Вследствие (3.10) левая часть (3.12) стремится к нулю при $\gamma \to \infty$, а это вследствие сделанного сейчас замечания о сохранении знака подынтегральной функции (3.12) и того факта, что $(h^\infty\cdot l^\infty)$ может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой меры, означает, что функции $\zeta^{(\nu_\gamma)}(t)$ стремятся по мере к нулю на $[0, T_\infty]$. Таким образом, действительно функции $\eta_{\nu_\gamma}(t)$ сходятся к $\eta^\infty(t)$ по мере.

Теперь нетрудно проверить, что при подстановке $\eta^\circ(t) = \eta^\infty(t)$ в правую часть системы (0.1) соответствующее решение $x = x(x_0, t, \eta^\circ)$ на отрезке $[0, T_\infty]$ совпадает с функцией $x = x^\infty(t)$, так как иначе не могли бы сходиться одновременно функции $x^{(\nu)}(t)$ к $x^\infty(t)$ равномерно и $\eta_{\nu_\gamma}(t)$ к функции $\eta^\infty(t)$ по мере.

Если предположить, что последовательность $c^{(\nu)}$ имеет по крайней мере две различные предельные точки (c^∞) и $(c^\infty)^*$, то мы получили бы, что существуют две управляющие функции $(\eta^\infty(t))$ и $(\eta^\infty(t))^*$, различные на множестве ненулевой меры и такие, что соответствующие им траектории $x(x_0, t, (\eta^\infty))$ и $x(x_0, t, (\eta^\infty)^*)$ совпадают при $t \in [0, T_\infty]$, что невозможно.

Противоречие показывает, что последовательность $\eta_\nu(t)$ сходится по мере к единственной кусочно-гладкой функции $\eta^\infty(t) = \eta^\circ(t)$, которая и является оптимальным управлением. Высказанное утверждение доказано.

Рассмотрим теперь систему (0.1) второго порядка.

Пусть система (0.1) является гладкой и во всем пространстве выполняются условия леммы 1.1, т. е. 1) при всех x и $0 \leqslant t \leqslant T$ векторы $q(t)$ и $dq/dt - Q(x, t)\,q(t)$ не являются коллинеарными. Тогда следствием полученных выше результатов и леммы 1.1 является следующее утверждение.

Следствие 3.1. Если система второго порядка удовлетворяет условиям 1), и (3.1), причем существует по крайней мере одна траектория $x(x_0, t, \eta)$, соединяющая точки $x = x_0$ и $x = 0$ дугой $0 \leqslant t \leqslant T$, где управление $\eta(t)$ удовлетворяет условию (0.3), то система (0.1) обладает оптимальным кусочно-гладким управлением $\eta^\circ(t)$ вида $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign} \lambda(t)$, где функция $\lambda(t)$ может обращаться в нуль лишь в отдельных точках $t \in [0, T]$.

Если нелинейная система (0.1) имеет порядок выше второго, эффективная проверка выполнения условия неособенности разрешающего вектора $h(T, t)$ становится весьма затруднительной[1], если неизвестна наперед траектория $x = x(t)$, вдоль которой вычисляется система в вариациях. Если же речь идет о проверке неособенности вектора $h(T, t)$ для системы в вариациях, вычисленной вдоль известной допустимой траектории $x = x(x_0, t, \eta)$, то эту неособенность можно проверить, не решая систему в вариациях и не определяя сам вектор $h(T, t)$, хотя и здесь с ростом n достаточные условия неособенности $h(T, t)$ весьма быстро усложняются. Приведем здесь одно достаточное условие неособенности h в случае квазилинейной системы, причем вектор q будем считать постоянным.

В случае линейной системы все системы в вариациях, вычисленные для различных траекторий, будут совпадать, и поэтому условия неособенности разрешающего вектора $h(T, \tau)$ можно сформулировать в эффективном виде без знания неперед траектории. Приведем здесь, например, условия для системы третьего порядка, предполагая, что вектор q является постоянным, а функции $P(t)$ в рассматриваемой линейной системе

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x + q\eta(t) \tag{3.13}$$

будут кусочно-гладкие с разрывами (может быть) лишь первого рода.

Лемма 3.1. Если векторы $q, Pq, P^2q - (dP/dt)q$ при $t \in [0, T]$ не лежат в линейном двумерном пространстве, то разрешающий вектор $h(T, t)$ системы (3.13) является неособым.

Справедливость леммы 3.1 следует из леммы 2.1, так как в случае линейной системы вдоль любой кривой $x = x(t)$ выполняется равенство $Q = P(t)$, $R = P^2 - dP/dt$.

Вычисляя последовательные производные высших порядков от $(h \cdot l)$, можно указать аналогичные условия неособенности разрешающего вектора $h(T, t)$ линейной системы (3.13) и для общего случая n. Так как эти условия имеют громоздкий вид, здесь их выводить не будем.

Рассмотрим квазилинейную систему (0.1), т. е. систему вида

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x + \mu r(x, t) + q\eta(t) \tag{3.14}$$

где функции $r(x, t)$ имеют непрерывные, равномерно-ограниченные частные производные $\partial r_\beta/\partial x_\alpha$, $\partial r_\beta/\partial t$, $\partial^2 r_\beta/\partial x_\alpha\, \partial x_\gamma$, $\partial^2 r_\beta/\partial x_\alpha\, \partial t$. Так как при малом μ векторы Qq и Rq (см. лемму 2.1) мало отличаются от векторов Pq и $(P^2 - dP/dt)\, q$, то в качестве следствия из лемм 2.1 и 3.1 получаем следующий результат.

Следствие 3.2. Если q — постоянный вектор и векторы q, Pq, $(P^2 - dP/dt)\, q$ не лежат при каждом t из $0 \leqslant t \leqslant T$ в линейном двумерном подпространстве, то при μ достаточно малых разрешающий вектор $h(T, t)$

---

[1] См., например, лемму 2.1, где даны достаточные условия неособенности h при $n = 3$.

системы в вариациях, вычисленной вдоль любой допустимой кривой $x = x(x_0, t, \eta)$, является неособым.

Из следствия 3.2 вытекает справедливость следующего заключения.

Следствие 3.3. Пусть параметр μ в правой части системы (3.14) выбран достаточно малым, постоянный вектор q и векторы Pq, $P^2q - (dP/dt)\,q$ не лежат в линейном двумерном пространстве при каждом $t \in [0, T]$. Если существует по крайней мере одна допустимая кривая $x(x_0, t, \eta)$, соединяющая точки $x = x_0$ и $x = 0$ дугой $x(x_0, t, \eta)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, то система (3.14)обладает кусочно-гладким оптимальным управлением $\eta^\circ(t)$ вида $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}\lambda(t)$, которому соответствует оптимальная траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$.

Приведем здесь еще без доказательства одно следствие, которое нетрудно вывести из результатов § 3.

Следствие 3.4. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + bu$$

и обозначим через A матрицу

$$\{A\}_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{x=0}$$

Если векторы b, $Ab, \ldots, A^{n-1}b$ линейно независимы, то существует окрестность точки $x = 0$, такая, что для любой точки $x = x_0$ существует оптимальная траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$, соединяющая точки $x = x_0$ и $x = 0$, причем оптимальная управляющая функция $\eta^\circ(t)$ имеет вид: $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}\lambda(t)$, где функция $\lambda(t)$ может обращаться в нуль лишь в отдельных изолированных точках t.

§ 4. В этом параграфе доказываются некоторые достаточные условия оптимальности. Будем здесь рассматривать системы n-го порядка, предполагая, что гиперповерхности разрыва $\xi_\alpha = 0$ могут быть лишь гиперповерхностями $t = t_\alpha = \text{const}$. В соответствии с результатами § 2 оптимальной траекторией среди допустимых кривых может быть лишь траектория $x(x_0, t, \eta)$, управление которой $\eta^\circ(t)$ имеет вид:

$$\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(h^\circ(T^\circ, t)\cdot l^\circ) \tag{4.1}$$

где l° — некоторый постоянный ненулевой вектор.

Покажем, что при определенных ограничениях условия (4.1) являются и достаточными условиями локально оптимальной траектории системы (0.1). Последний термин понимается в следующем смысле.

Определение 4.1. Траекторию $x^\circ(t) = x(x_0, t, \eta^\circ)$, соединяющую точки $x = x_0$ и $x = 0$ дугой $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$, причем управление $\eta^\circ(t)$ удовлетворяет условию (0.3), будем называть локально оптимальной, если можно указать число $\varepsilon > 0$ такое, что не существует движения $x(t) = x(x_0, t, \eta)$, удовлетворяющего системе уравнений (0.1) с управлением $\eta(t)$, подчиненным условию (0.3), соединяющего точки $x = x_0$ и $x = 0$ дугой $0 \leqslant t \leqslant T$ при $T < T^\circ$, и при этом такого, что

$$\| x(x_0, t, \eta^\circ) - x(x_0, t, \eta) \| < \varepsilon \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T$$

Иначе говоря, траектория $x^\circ(t)$ должна быть оптимальной относительно любых вариаций $\delta\eta$, стесненных условием (0.3), и относительно достаточно малых смещений самой траектории.

Теорема 4.1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ соединяет точки $x = x_0$ и $x = 0$ дугой $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$, т. е.

$$x(x_0, 0, \eta^\circ) = x_0 \qquad (4.2)$$

$$x(x_0, T^\circ, \eta^\circ) = 0 \qquad (4.3)$$

2. Управление $\eta^\circ(t)$ имеет вид (4.1), где $h^\circ(T^\circ, t)$ — разрешающий вектор системы в вариациях, вычисленной вдоль $x(x_0, t, \eta^\circ)$.

3. Для вектора l°, определяющего управление $\eta^\circ(t)$, свойство неособенности выполняется в усиленной форме: мера множества Σ_δ, где выполняется неравенство

$$|(l^\circ \cdot h^\circ(T^\circ, t))| \leqslant \delta \qquad (4.4)$$

удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}(\Sigma_\delta) \leqslant \gamma\delta \qquad (\gamma = \mathrm{const}) \qquad (4.5)$$

Очевидно, для выполнения условий (4.4), (4.5) достаточно, чтобы в точках, где $(l^\circ \cdot h^\circ) = 0$, левая и правая производные от $(l^\circ \cdot h^\circ)$ удовлетворяли условиям

$$\frac{d(l^\circ \cdot h^\circ)}{dt^+} \neq 0, \qquad \frac{d(l^\circ \cdot h^\circ)}{dt^-} \neq 0 \qquad (4.6)$$

4. Вектор e, касательный к траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$ в точке $t = T^\circ - 0$ и направленный в сторону возрастания t, удовлетворяет условию [1]

$$(e \cdot l^\circ) > 0 \qquad (4.7)$$

5. Обозначим через $a(t_k)$ векторы, определенные равенствами

$$a(t_k) = \int_{t_k}^{T^\circ} F(T^\circ, t_k) F^{-1}(\tau, t_k) \left[\sum_{i=1,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^\circ(\tau), \tau)}{\partial x_i\, \partial x_j} h_i(\tau, t_k) h_j(\tau, t_k) \right] d\tau$$

где $F(t, t_k)$ — фундаментальная матрица решений системы в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = P(t)\, \delta x$$

($F(t_k, t_k) = E$), $h_\alpha(t, \tau)$ — компонента разрешающего вектора этой системы, t_k — моменты времени, для которых выполняются равенства

$$(l^\circ \cdot h^\circ(T^\circ, t_k)) = 0$$

Будем предполагать, что выполняются неравенства $(a_k \cdot e) > 0$.

Тогда траектория $x = x(x_0, t, \eta^\circ)$ является локально оптимальной.

Примечание. Если одно и то же управление $\eta^\circ(t)$ может быть определено по формуле (4.1) различными векторами l°, то достаточно, чтобы условие (4.7) выполнялось по крайней мере для одного вектора l°. В формулировке теоремы 4.1 предполагается также естественно, что траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ не пересекает точки $x = 0$ при $t = T_1 < T^\circ$.

Условие 5 можно заменить требованием достаточной малости вторых частных производных $\partial^2 f_\alpha / \partial x_\beta \partial x_\gamma$.

Отметим также, что можно показать на примере недостаточность в общем случае лишь условий 1 — 4 теоремы 4.1, для того чтобы траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ была локально оптимальной.

---

[1] Очевидно, вектор e определяется равенством

$$e = \lim\, [f(x(x_0, t, \eta^\circ), t) + q\eta^\circ(t)] \qquad \text{при } t \to T^\circ - 0$$

если этот предел не равен нулю.

Доказательство. Предположим от противного, что существует последовательность чисел $\varepsilon_\nu > 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), сходящаяся к нулю, и соответствующая ей последовательность управлений $\eta_\nu(t)$, удовлетворяющих условию (0.3), и таких, что траектории $x(x_0, t, \eta_\nu)$ удовлетворяют условиям

$$x(x_0, T^\circ - \tau_\nu, \eta_\nu) = 0 \text{ при } \tau_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4.8}$$

$$\| x(x_0, t, \eta_\nu) - x(x_0, t, \eta^\circ) \| < \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

Пусть $\zeta_\nu = \eta_\nu - \eta^\circ$. Так как функции η_ν и η° удовлетворяют условиям (0. 3) и так как функция $\eta^\circ(t)$ определена формулой (4.1), то знак $\zeta_\nu(t)$ всегда противоположен знаку $(h^\circ(T^\circ, t) \cdot l^\circ)$. Вычислим теперь скалярные произведения векторов $\delta x^{(\nu)}(t)$ — решений системы уравнений в вариациях

$$\delta x^{(\nu)}(T_\nu) = \int_0^{T_\nu} h^\circ(T_\nu, \tau)\, \delta\eta_\nu(\tau)\, d\tau \qquad (\delta\eta_\nu(t) = \zeta_\nu(t), T_\nu = T^\circ - \tau_\nu) \tag{4.10}$$

и вектора $l^{(\nu)} = [(F(T_\nu) \cdot F^{-1}(T^\circ))^*]^{-1} l^\circ$. Имеем[1]

$$(\delta x^{(\nu)}(T_\nu) \cdot l^{(\nu)}) = \int_0^{T_\nu} (h^\circ(T_\nu, \tau) \cdot l^{(\nu)})\, \delta\eta_\nu(\tau)\, d\tau \tag{4.11}$$

Из условий (4.4) и (4.5) заключаем, что функции $\delta\eta_\nu(t)$ сходятся к нулю по мере при $\nu \to \infty$. Отклонения $\delta^\nu x^{(\nu)}$ действительных траекторий (0.1) от траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$, вызванные вариациями $\delta\eta_\nu$, от соответствующих решений системы в вариациях, имеют порядок $o(\varepsilon_\nu)$; при $\nu \to \infty$ левые части равенства (4.11) должны сходиться к нулю. С другой стороны, если мера множества $\left(\sum_\delta^{(\nu)}\right)$, где выполняется неравенство

$$|\delta\eta_\nu| > \delta \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_\nu \tag{4.12}$$

больше $\alpha > 0$, то согласно условию 3 теоремы имеем

$$|(l^{(\nu)} \cdot \delta x^{(\nu)}(T_\nu))| \geqslant \gamma_1 \delta\alpha \qquad (\gamma_1 = \text{const}) \tag{4.13}$$

Из неравенства (4.13) и заключаем, что при $\nu \to \infty$ функции $\delta\eta_\nu(t)$ сходятся к нулю по мере. Обозначим

$$\mu_\nu = \int_0^{T_\nu} |\delta\eta_\nu(t)|\, dt \tag{4.14}$$

где, следовательно, $\lim \mu_\nu = 0$ при $\nu \to \infty$.

Рассмотрим сначала случай, когда из последовательности μ_ν можно выделить подпоследовательность (для упрощения обозначений отождествим ее с первоначальной последовательностью μ_ν), для которой выполняются условия

$$\left| \int_0^{T^\circ - \tau_\nu} (h(T^\circ - \tau_\nu, \tau) \cdot l^\circ)\, \delta\eta_\nu(\tau)\, d\tau \right| > \beta\mu_\nu \tag{4.15}$$

---

[1] Знак * в формуле для $l^{(\nu)}$ означает транспонирование, $F(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.3) в вариациях. Так как вследствие $\varepsilon_\nu \to 0$ имеем $\tau_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, то по определению векторов $l^{(\nu)}$ и вектора $h^\circ(t, \tau)$ (см. стр. 211) имеем, очевидно, равенство $(h^\circ(T^\circ, t) \cdot l^\circ) = (h^\circ(T_\nu, t) \cdot l^{(\nu)})$ и, кроме того, $l^{(\nu)} \to l^\circ$ при $\nu \to \infty$. Будем предполагать также $\| l^\circ \| = 1$, что, очевидно, не ограничивает общности.

где β — фиксированное, достаточно малое положительное число. Отклонения от линейного приближения δx действительных решений $\check{\delta} x$ системы (0.1), т. е. $\check{\delta} x = x(x_0, t, \eta^\circ + \delta\eta_\nu) - x(x_0, t, \eta^\circ)$, вызванных вариациями $\delta\eta_\nu$, будут иметь порядок $o(\mu_\nu)$, что легко проверяется обычными в качественной теории рассуждениями. На этой проверке здесь останавливаться не будем. В то же время в силу условия 3 теоремы и отмеченного выше совпадения знаков $-\delta\eta_\nu(t)$ и $(h^\circ(T_\nu, t)\cdot l^{(\nu)})$ величины (4.11) будут иметь первый порядок малости по μ_ν и будут отрицательны при $\nu = 1, 2, \ldots$

Таким образом, векторы $\check{\delta} x^{(\nu)}(T_\nu)$ будут иметь также первый порядок малости по μ_ν, и, кроме того, эти векторы должны сходиться по направлению к вектору e, так как по определению $\delta x^{(\nu)}$ и траекторий $x(x_0, t, \eta^\circ + \delta\eta_\nu)$ имеем

$$\check{\delta} x^{(\nu)}(T_\nu) = -x(x_0, T_\nu, \eta^\circ)$$

Скалярные произведения $(\delta x^{(\nu)}\cdot l^{(\nu)})$ и $(\check{\delta} x^{(\nu)}\cdot l^{(\nu)})$ по доказанному отличаются на бесконечно малую высшего порядка, и, следовательно, величины $(\check{\delta} x^{(\nu)}\cdot l^{(\nu)})$ должны иметь первый порядок малости по μ_ν и должны быть отрицательны при больших значениях ν. Это противоречит сходимости $l^{(\nu)} \to l^\circ$ по направлению и условию 4 теоремы 4.1.

Рассмотрим теперь второй возможный случай, когда

$$\left| \int_0^{T_\nu} (h(T_\nu, \tau)\cdot l^\circ)\,\delta\eta_\nu(\tau)\,d\tau \right| < q_\nu \mu_\nu$$

причем $q_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. В этом случае уже нельзя утверждать, что вариации $\delta x^\nu(T_\nu)$ имеют первый порядок малости по μ_ν и следует учитывать члены второго порядка по μ_ν. Эти дополнительные члены второго порядка малости, как можно проверить, решая полные уравнения возмущенного движения последовательными приближениями, будут равны векторам, определенным в условиях 5 теоремы, умноженным на некоторые положительные величины $\beta_{\nu k}$.

Обозначим через $\delta_2 x^\nu(t)$ — второе приближение к решению $\delta^\nu x^\nu(t)$.

Теперь как и в первом рассмотренном случае приходим к противоречию: скалярные произведения $(\delta x_2^{(\nu)}\cdot l^{(\nu)})$ и $(\delta^\nu x^{(\nu)}\cdot l^{(\nu)})$ и отличающиеся на бесконечно малые высшего порядка, чем μ_ν^2, должны быть отрицательными при больших значениях ν, что противоречит условиям 4 и 5 теоремы.

Полученные противоречия доказывают теорему.

Примечания 1. В условиях теоремы предполагалось, что гиперповерхности разрывов $\xi_\alpha = 0$ есть плоскости $t = t_\alpha$. Это предположение было нужно для того, чтобы в процессе доказательства использовать оценку $\|\check{\delta} x - \delta x\| = o(\mu_\nu)$, вывод которой без использования того обстоятельства, что эти гиперповерхности являются для рассматриваемых траекторий $x(x_0, t, \eta)$ сечениями, был бы в общем случае невозможен [во всяком случае на базе необобщенных решений $x(t)$ системы (0.1)]. Вследствие ограниченности правых частей системы (0.1) вдоль траекторий $x(x_0, t, \eta)$, ε — близких к траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$, свойством быть для них сечением обладают также и гиперповерхности $\xi_\alpha = 0$, не обязательно совпадающие с $t = t_\alpha$, но и такие, что нормальный вектор $\operatorname{grad} \xi_\alpha$ наклонен под достоточно малым углом к оси t. Поэтому утверждение теоремы 4.1 сохраняет свою силу и в случае таких гиперповерхностей разрывов.

2. Если рассматривать лишь вариации, также стесненные условиями $|\delta\eta_\nu| < \varepsilon_\nu$, то из того факта, что гиперповерхности разрывов $\xi_\alpha = 0$ являются сечениями для траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$, будет следовать, что они являются сечениями и для траекторий $x(x_0, t, \eta^\circ + \delta\eta_\nu)$, т. е. при доказательстве, что траектория $x(x_0, t, \eta^\circ)$ является локально оптимальной как в смысле малых вариаций δx, так и малых вариаций управления $\delta\eta$, в условиях теоремы 4.1 достаточно лишь предполагать, что гиперповерхности $\xi_\alpha = 0$ являются сечениями для траектории $x(x_0, t, \eta^\circ)$.

3. Для выполнения условия 3 теоремы 4.1 достаточно, чтобы векторы

$$h^\circ(T^\circ, t), \ h'(T^\circ, t) = D[Pq - q']$$

где матрица $D(T^\circ, t)$ определяет вектор $h = D(T^\circ, t)\, q(t)$ (см. стр. 211), одновременно не лежали в гиперплоскости $(l^\circ \cdot h^\circ) = 0$, $(l^\circ \cdot h') = 0$. Действительно, в этом случае, повторяя рассуждения из доказательства леммы 1.1, мы получили бы, что

$$\left| \frac{d\,(h^\circ(T^\circ, t) \cdot l^\circ)}{dt^\pm} \right| \geqslant \gamma > 0 \qquad (\gamma = \text{const}) \tag{4.16}$$

в любой точке траектории, где $(l^\circ \cdot h^\circ) = 0$, т. е. действительно выполнение условия 3 теоремы.

4. В случае квазилинейной системы (3.14) при достаточно малом значении μ для выполнения условия 3 теоремы 4.1 в соответствии со следствием 3.3 и предыдущим замечанием достаточно, чтобы векторы

$$F(T^\circ) F^{-1}(t)\, q(t), \qquad F(T^\circ) F^{-1}(t) \left[P(t)\, q(t) - \frac{dq}{dt} \right]$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы, не лежали в гиперплоскости $(l^\circ \cdot h) = 0$ одновременно при $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$.

5. В частном случае системы второго порядка для выполнения условия 3 теоремы достаточно, чтобы векторы q и $Qq - q'$ были неколлинеарны.

6. Заметим, наконец, что условия 1, 3 и 4 теоремы 4.1 соответствуют в стационарном случае правилу построения оптимальной траектории на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина [1].

Пример. Рассмотрим в заключение один простой случай конкретной системы, на которой проиллюстрируем возможность проверки всех условий, которые накладывались на рассматриваемые системы при доказательстве теорем из §§ 2—4.

Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x, t) = \eta(t) \tag{4.17}$$

где x, f — скаляры, функция $f(x, t)$ — непрерывно дифференцируемая при $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$; ее частные производные допускают в точках $t = t_\alpha$ (может быть) лишь разрывы первого рода. Будем предполагать также выполнение следующих условий:

$$f(0, t) = 0, \qquad \omega_1 < \frac{\partial f}{\partial x} < \omega_2 \qquad \text{при всех } x \qquad (\omega_1 > 0, \ \omega_2 = \text{const} > 0) \tag{4.18}$$

Запишем систему двух уравнений, эквивалентную уравнению (4.17):

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -f(x, t) + \eta(t) \tag{4.19}$$

Система уравнений в вариациях, соответствующая (4.19), имеет вид:

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta y, \quad \frac{d\delta y}{dt} = -p(x(t), t)\,\delta x + \delta\eta(t) \qquad \left(p(x(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x = x(t)} \right) \tag{4.20}$$

Проверим для системы (4.20) неособенность разрешающего вектора $h(T, t)$.

Действительно, вектор q имеет в данном случае вид:

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

а вектор Qq имеет форму:

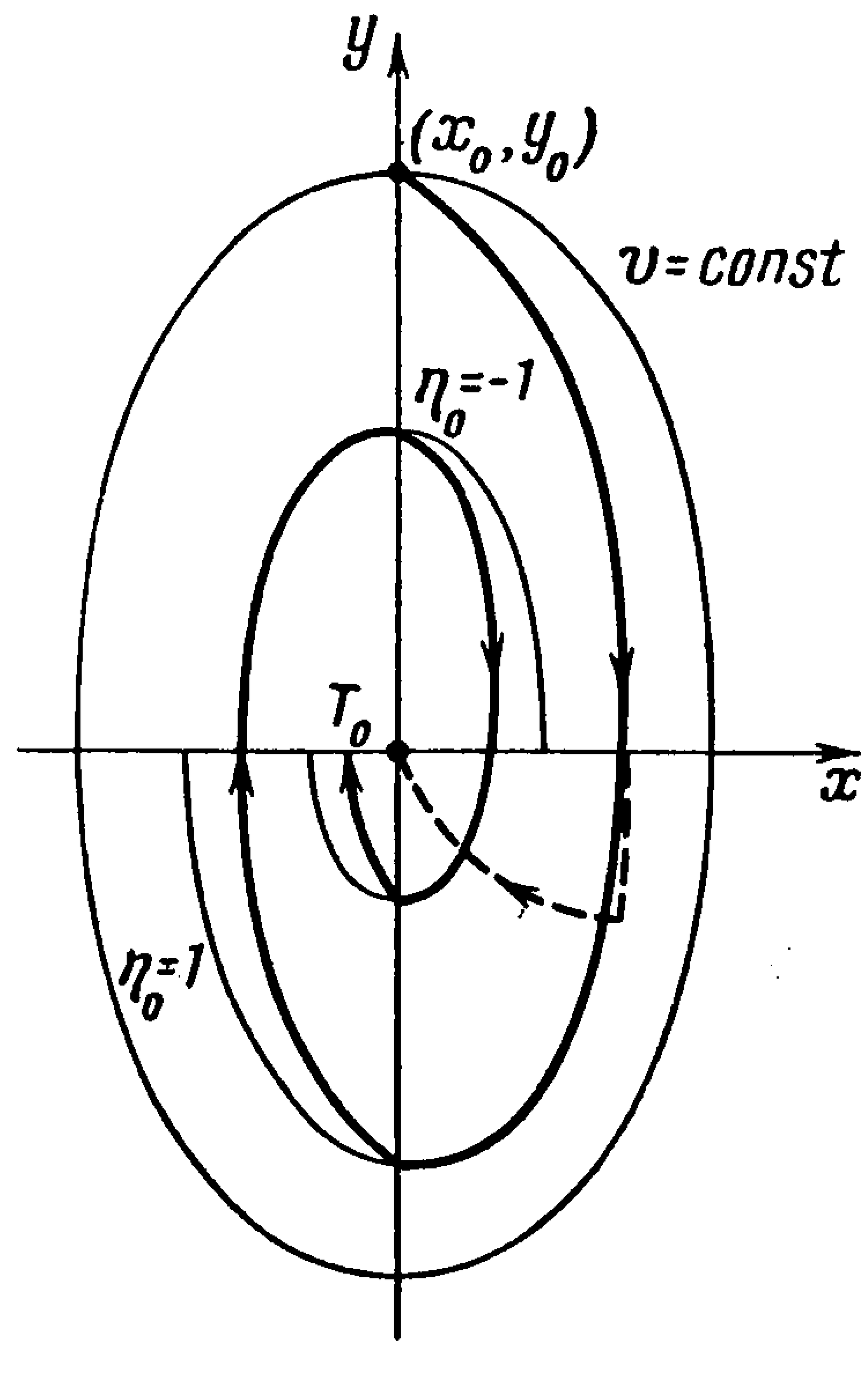
$$Qq = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\partial f / \partial x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, эти векторы неколлинеарны.

Траектории системы (4.19) при $\eta = 0$ имеют вид спиралей вокруг начала координат $x = 0$, $y = 0$. В зависимости от характера функций $f(x, t)$ это могут быть либо периодические кривые, либо спирали, закручивающиеся к началу координат или раскручивающиеся от него при $t \to \infty$. В частности, если $f(x)$ не зависит от времени, то все решения (4.19) будут периодическими и будут определяться как линии уровня $v = \text{const}$ функции

$$v(x, y) = y^2 + 2\int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

В любом случае, если определить функцию η_0 следующим образом: $\eta_0 = -1$, когда траектория проходит в области $x > 0$, $y > 0$ и $\eta_0 = 1$, в области $x < 0$, $y < 0$, $\eta_0 = 0$ при остальных x и y, то для начальных данных x_0, y_0, лежащих в достаточной близости точки $x = 0$, $y = 0$ (в стационарном случае при всех x_0, y_0), траектории (4.19) будут иметь вид спиралей, асимптотически сходящихся к точке $x = 0$, $y = 0$ при $t \to \infty$ (см. фигуру).



Если выбрать временную длину T_0 такой траектории достаточно большой, то точка $x(x_0, y_0, T_0, \eta_0)$, $y(x_0, y_0, T_0, \eta_0)$ будет лежать в достаточной близости точки $x = 0$, $y = 0$ и можно указать вариации $\delta\eta$ функции $\eta_0(t)$, при которых точка $x(x_0, y_0, T_0, \eta_0 + \delta\eta)$, $y(x_0, y_0, T_0, \eta_0 + \delta\eta)$ попадет в точку $x = 0$, $y = 0$. Мы здесь проверять этого не будем, так как это делается приемами, аналогичными рассмотренным в § 2. Следовательно, существует область G, охватывающая начало координат $x = 0$, $y = 0$, и такая, что для каждой точки x_0, y_0 из этой области есть управление $\eta(t)$, приводящее траекторию $x(x_0, y_0, t, \eta)$, $y(x_0, y_0, t, \eta)$ в точку $x = 0$, $y = 0$. В частности, в случае стационарной функции $f(x)$ этой областью G будет вся плоскость. Теперь согласно результатам, приведенным в § 2—4, можно утверждать, что для каждой точки x_0, y_0 из G существует оптимальная траектория $x(t, \eta^\circ)$, $y(t, \eta^\circ)$, соединяющая точки $x = x_0$, $y = y_0$ и $x = 0$, $y = 0$, соответствующее управление $\eta^\circ(t)$ является кусочно-гладкой функцией вида $\eta^\circ(t) = \operatorname{sign}(h^\circ(T^\circ, t) \cdot l^\circ)$.

Поступила 19 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. CX, вып. 1, 1956.
2. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. CXVI, вып. 1, 1957.
3. Болтянский В. Г. К теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. CIXX, вып. 6, 1958.
4. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 11, 1957.
5. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по приближению периодических решений системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ДАН СССР, т. CXVI, вып. 4, 1957.
6. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Об определении периодических режимов в нелинейных динамических системах с кусочно-линейной характеристикой. ПММ, т. 20, вып. 5, 1956.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, изд. 2, М.—Л., 1949.
8. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов, ст. IV, ГОНТИЗ НТВУ, 1938.
9. Кириллова Ф. М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. Высших учебных заведений, № 4(5), 1958.
10. Александров П. С. Комбинаторная топология. Гостехиздат, 1947.
11. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, т. XXI, вып. 5, 1957.
12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывной правой частью. УМН, т. 13, вып. 4, 1958.