Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О РАСШИРЕНИИ ПОРШНЯ В ВОДЕ

Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова
(Москва)

1. Задача о расширении поршня с постоянной скоростью в идеальном газе была решена Л. И. Седовым [1, 2], а также Тейлором [3].

Предположим, что расширение с постоянной скоростью сферического, цилиндрического или плоского поршня происходит в некоторой идеальной среде. Л. И. Седовым [2] было показано, что задача о неустановившемся движении среды между поршнем и возникающей в среде ударной волной остается автомодельной для любого вида внутренней энергии среды, выражение для которой в общем случае может быть представлено следующим образом:

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p}{\rho_1} f\left(\frac{\rho}{\rho_1}, \frac{p}{p_1}\right) + \text{const}$$

Здесь p_1 и ρ_1 — определяющие параметры задачи. Если поршень расширяется с постоянной скоростью, то среди определяющих параметров задачи только два p_1, ρ_1 имеют независимые размерности; размерность скорости поршня

$$[U] = \left[\sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}}\right]$$

Л. И. Седовым [2] показано также, что если внутренняя энергия среды $\varepsilon(p, \rho)$ имеет вид:

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p}{\rho_1} \varphi\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + \text{const} \tag{1.1}$$

где φ — произвольная функция своего аргумента, то имеют место следующие соотношения.

1. Уравнение адиабаты имеет вид:

$$p = \Psi(S)\chi\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) \tag{1.2}$$

где Ψ — некоторая функция энтропии S, определяющаяся из дополнительных физических соображений, а связь между функциями $\varphi(R)$ и $\chi(R)$ определяется формулами

$$\varphi(R) = \frac{1}{\chi(R)}\left(C + \int\frac{\chi(R)\,dR}{R^2}\right), \qquad \chi(R) = \frac{C}{\varphi(R)}\exp\int\frac{dR}{R^2\varphi(R)} \tag{1.3}$$

где C — произвольная постоянная.

2. Уравнение состояния при условии (1.1) должно иметь вид:

$$T = \exp\int\frac{dR}{R^2\varphi(R)}\,\Phi\left[p\varphi(R)\exp\left(-\int\frac{dR}{R^2\varphi(R)}\right)\right] \qquad \left(R = \frac{\rho}{\rho_1}\right) \tag{1.4}$$

где Φ — функция, связанная с Ψ уравнением

$$\Psi'(S) = \rho_1 \Phi [\Psi(S)] \tag{1.5}$$

Задача о сильном точечном взрыве при условии (1.1) была рассмотрена в статье [4].

Рассмотрим задачу о расширении поршня с постоянной скоростью в идеальной среде в предположении, что внутренняя энергия среды определяется формулой (1.1).

В силу соотношения (1.2) уравнения одномерного неустановившегося движения идеальной сжимаемой среды примут вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho v}{r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\chi(\rho/\rho_1)} + v\frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\chi(\rho/\rho_1)} = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Условие на поверхности поршня r_* имеет вид:

$$r = r_* = Ut \quad \text{или} \quad v = U \tag{1.7}$$

где U — скорость поршня.

Условия на ударной волне, распространяющейся по невозмущенной среде, с учетом предположения (1.1) запишутся следующим образом:

$$-\rho_1 D = \rho_2 (v_2 - D), \qquad \rho_1 D^2 + p_1 = \rho_2 (v_2 - D)^2 + p_2 \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2} D^2 + \frac{p_1}{\rho_1}\varphi(1) + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}(v_2 - D)^2 + \frac{p_2}{\rho_1}\varphi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{p_2}{\rho_2}$$

Индексом 1 отмечены величины перед ударной волной, индексом 2 — за ударной волной, D — скорость ударной волны.

В силу автомодельности задачи искомые характеристики движения можно искать в виде

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \qquad \rho = \rho_1 R(\lambda), \qquad p = \rho_1 \frac{r^2}{t^2} P(\lambda) \tag{1.9}$$

где

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \qquad r_2 = \frac{U}{\lambda_*} t, \qquad \lambda_* = \frac{r_*}{r_2} \tag{1.10}$$

Здесь r_2 — радиус ударной волны, λ_* — безразмерный радиус поршня.

Пользуясь формулами (1.9) и (1.10), приведем уравнения (1.6) к безразмерному виду:

$$(1 - V)\frac{dV}{d\ln\lambda} - \frac{1}{R}\frac{dP}{d\ln\lambda} = V^2 - V + 2\frac{P}{R} \tag{1.11}$$

$$-\frac{dV}{d\ln\lambda} + (1 - V)\frac{d\ln R}{d\ln\lambda} = \nu V \tag{1.12}$$

$$\frac{d}{d\ln\lambda}\ln\frac{P}{\chi(R)} = -2 \tag{1.13}$$

Интегрируя уравнение (1.13) и используя второе из соотношений (1.3), получаем интеграл адиабатичности

$$P = \frac{C}{\lambda^2 \varphi(R)} \exp \int \frac{dR}{R^2 \varphi(R)} \tag{1.14}$$

После некоторых преобразований при помощи (1.14) приведем уравнения (1.11) и (1.12) к виду:

$$\left\{(1-V)^2-\left[P+\frac{1-\nu}{2}RV(V-1)\right]\frac{1}{\varphi(R)}\left[\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right]\right\}\frac{d\ln R}{dV}=$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\nu)V(V-1)\frac{d\ln P}{dV} \qquad (1.15)$$

$$(1-V)\frac{d\ln R}{dV}=\nu V\frac{d\ln\lambda}{dV}+1 \qquad (1.16)$$

В силу (1.2) и второго из соотношений (1.3) получим следующее выражение для квадрата скорости звука:

$$a^2=\frac{r^2}{t^2}\frac{P}{\varphi(R)}\left[\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right] \qquad (1.17)$$

Вводя безразмерную функцию

$$w=\frac{P}{\varphi(R)}\left[\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right] \qquad (1.18)$$

преобразуем систему уравнений (1.15), (1.16) и (1.14) к виду:

$$\frac{d\ln w}{dV}=\frac{1}{[\nu w-(1-V)^2]}\left\{\frac{2}{V}[w-(1-V)^2]+\right.$$
$$\left.+(\nu-1)(1-V)R\left[\frac{1}{\varphi(R)}\left(\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right)+\frac{d}{dR}\ln\frac{1}{\varphi(R)}\left(\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right)\right]\right\} \qquad (1.19)$$

$$\frac{d\ln R}{dV}=\frac{(\nu-1)(1-V)}{\nu w-(1-V)^2} \qquad (1.20)$$

$$\lambda=\frac{1}{\varphi(R)}\left(\frac{C}{w}\exp\int\frac{dR}{R^2\varphi(R)}\left[\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right]\right)^{1/2} \qquad (1.21)$$

Преобразуя условия на скачке (1.8) к безразмерному виду при помощи формул (1.9) и (1.10) и используя обозначение (1.18), найдем величины R_2, w_2, w_1 в функции V_2:

$$w_2=\frac{-V_2[(1-V_2)^2-\varphi'(R_2)][V_2+2\varphi(1)]}{2\varphi(R_2)\{\varphi(R_2)-V_2-\varphi(1)\}},$$
$$w_1=\frac{[1-\varphi'(1)]}{2\varphi(1)}\frac{V_2\{V_2-2\varphi(R_2)\}}{\{\varphi(R_2)-V_2-\varphi(1)\}}, \qquad R_2=\frac{1}{1-V_2} \qquad (1.22)$$

Условие на поршне в безразмерном виде в силу (1.7) и (1.9) запишется в форме

$$V=1 \qquad (1.23)$$

Таким образом, в случае, когда внутренняя энергия жидкости имеет вид (1.1), задача сводится к интегрированию системы из двух уравнений (1.19) и (1.20) для нахождения двух функций w и R при наличии граничных условий (1.22) и (1.23).

После определения w и R λ находится в конечном виде из уравнения (1.21). Произвольная постоянная C в уравнении (1.21) определяется так, чтобы при $R=R_2$ λ равнялось единице.

Рассмотрим случай $\nu\neq 1$. Как видно из уравнений (1.20) и (1.19), для того чтобы уравнение (1.19) можно было качественно исследовать и проинтегрировать независимо от (1.20), достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{\varphi(R)}\left[\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right]+\frac{d}{dR}\left(\ln\frac{1}{\varphi(R)}\left[\frac{1}{R^2}-\varphi'(R)\right]\right)=\frac{\varkappa-1}{R} \qquad (1.24)$$

где $\varkappa$ — произвольная постоянная. В этом случае R не входит в правую часть уравнения (1.19) и определяется из уравнения (1.20) квадратурой. Интегрируя уравнение (1.24), найдем

$$\varphi(R)=\frac{R^{\varkappa}+kR+b(\varkappa-1)}{(\varkappa-1)R(R^{\varkappa}-b)} \qquad (1.25)$$

Здесь k и b — произвольные постоянные.

В силу второго из соотношений (1.3) уравнение адиабаты примет вид:

$$p=\Psi(S)(R^{\varkappa}-b) \qquad (1.26)$$

Температура T определится из уравнения (1.4).

2. Из опыта известно, что при больших давлениях (порядка десятков и сотен тысяч атмосфер) вода, как и другие жидкости, перестает быть несжимаемой [5, 6].

Общепринятого уравнения состояния воды пока не имеется. Рядом авторов [7, 8] принимается, что уравнение адиабаты воды имеет вид:

$$p=\Psi(S)(\rho^{\varkappa}-\rho_0{}^{\varkappa}) \qquad (2.1)$$

причем значение константы $\varkappa$ близко к 7.

Из экспериментальных данных, дающих плотность и температуру воды при высоких давлениях [5, 6], ясно, что при постоянной плотности давление зависит от температуры линейным образом. Следовательно, из уравнения (1.4) получаем, что Φ — линейная функция своего аргумента. Используя (1.4), (1.5) и (1.3), найдем уравнение адиабаты, уравнение состояния и выражение внутренней энергии воды:

$$p=[B+e^{A\rho_1(S-S_0)}](R^{\varkappa}-b) \qquad \left(b=\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{\varkappa}\right) \qquad (2.2)$$

$$T=\frac{A[R^{\varkappa}+kR+b(\varkappa-1)]}{(\varkappa-1)R}\left[\frac{p}{R^{\varkappa}-b}-B\right] \qquad (2.3)$$

$$\varphi(R)=\frac{R^{\varkappa}+kR+b(\varkappa-1)}{(\varkappa-1)R(R^{\varkappa}-b)} \qquad (2.4)$$

Здесь $\varkappa>1$, b, A, B, k — постоянные, которые определяются из эксперимента.

Сравнивая (2.2) с (1.26) и (2.4) с (1.25), видим, что при условии (1.24) уравнения (1.19) — (1.21) и граничные условия (1.22) и (1.23) описывают движение воды, вытесняемой поршнем, расширяющимся с постоянной скоростью. Пользуясь условием (1.24), преобразуем уравнения (1.19) — (1.21) к виду:

$$\frac{dw}{dV}=\frac{2w}{V}\frac{[w-(V-1)(lV-1)]}{[\nu w-(1-V)^2]} \qquad (2.5)$$

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{-[w-(1-V)^2]}{V[\nu w-(1-V)^2]} \qquad (2.6)$$

$$R=C_1(w\lambda^2)^{1/(\varkappa-1)} \qquad (2.7)$$

где C_1 — произвольная константа; через l обозначено

$$l = 1 + \frac{1}{2}(\nu - 1)(\varkappa - 1) \tag{2.8}$$

Из (1.18) и (2.4) найдем

$$w = \frac{\varkappa P R^{\varkappa - 1}}{R^{\varkappa} - b} \tag{2.9}$$

Если константы b и k в уравнениях (1.25) и (1.26) обращаются в нуль, мы приходим к рассмотрению задачи о расширении поршня в газе с показателем адиабаты $\varkappa$. Для этого случая поле интегральных кривых уравнения (2.5) было подробно изучено и соответствующие задачи решены полностью Л. И. Седовым [1, 2]. Но в результате предыдущего исследования оказалось, что уравнения (2.5) — (2.7) для случая воды имеют тот же вид, что и для газа (с той разницей, что для воды w дается формулой (2.9), а для газа в этой формуле $b = 0$, т. е. $w = \varkappa P / R$). Следовательно, поле интегральных кривых уравнения (2.5) будет иметь тот же вид, что и в случае газа [1]. Особые точки этого уравнения следующие: узлы —

$O\,(0,0)$, $A\,(0,1)$, $C\,(1,0)$

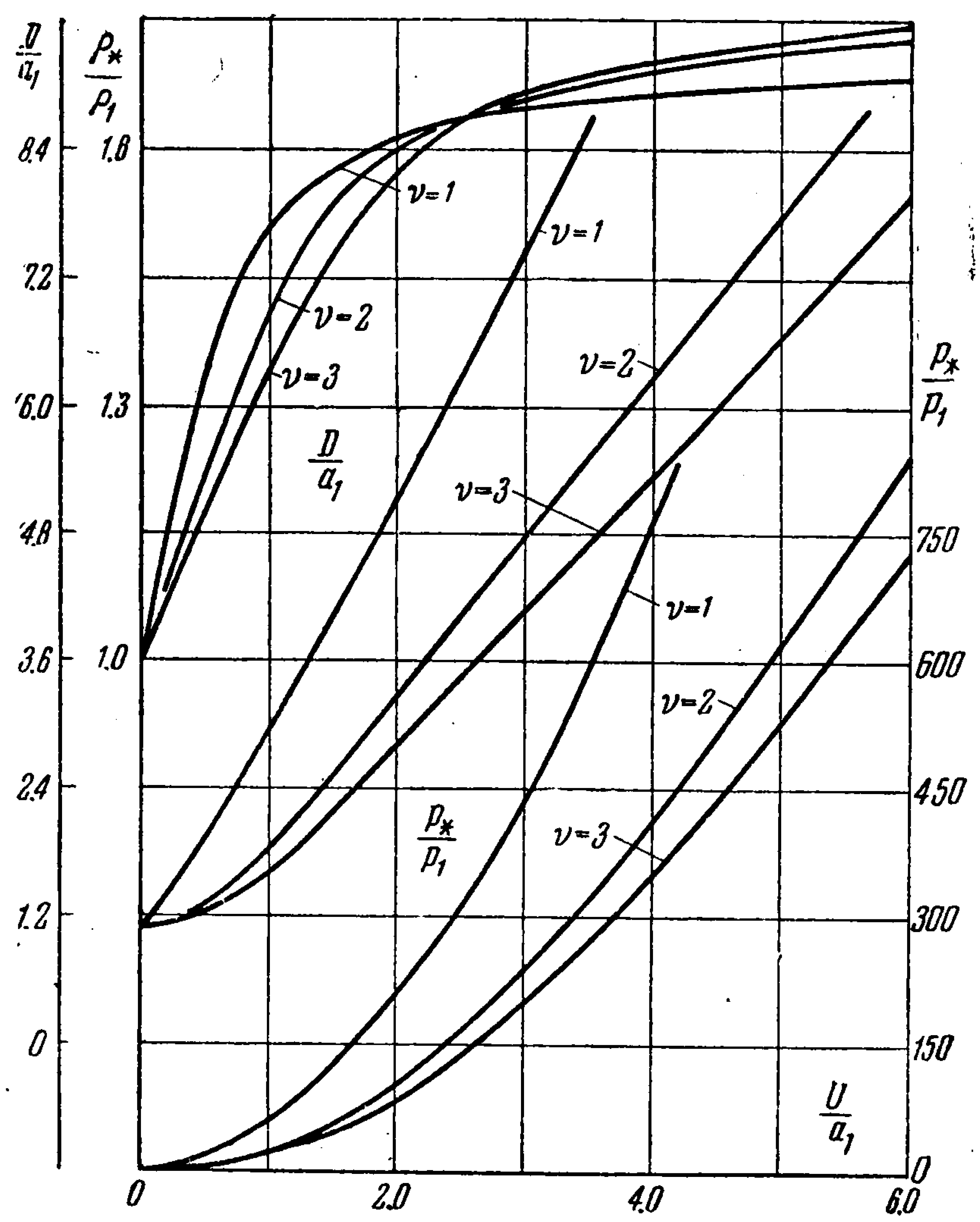
седла —

$B\,(V^\circ, w^\circ)$, $D\,(\pm\infty, \infty)$

причем

$$V^\circ = \frac{2}{2 + \nu(\varkappa - 1)}$$

$$w^\circ = \frac{\nu(\varkappa - 1)^2}{[2 + \nu(\varkappa - 1)]^2}$$

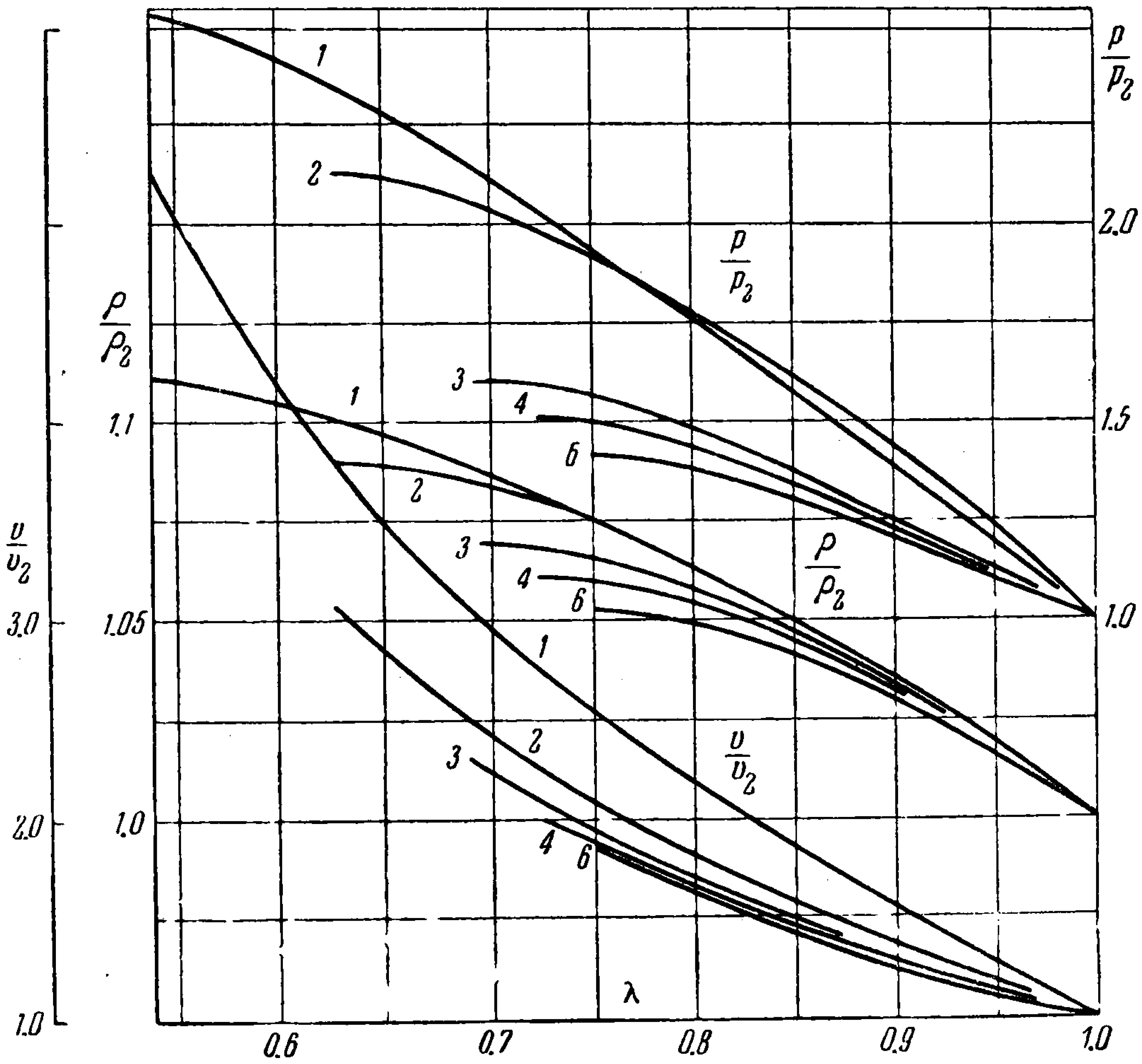


Фиг. 1

Парабола $w = (V - 1)^2$ отвечает слабому разрыву; следовательно, из точки, где $V = 1$, соответствующей поршню, в точку $O\,(0,0)$, соответствующую бесконечно удаленной точке пространства, непрерывным образом, двигаясь по интегральной кривой, попасть невозможно; в нее можно попасть скачком.

Решение получается таким образом: из точки $V = 1$, $w = w^*$, где w^* — заданная константа, движемся по интегральной кривой до точки (V_2, w_2), откуда скачком попадаем в точку (O, w_1) оси w, соответствующую внешней стороне скачка, и движемся по интегральной прямой $V = 0$ до точки O. При этом для каждого заданного w_1 получаем свою интегральную кривую.

Так как точки $(1, w^*)$, соответствующие поршню, — обыкновенные точки, параметр λ принимает в этой точке некоторое постоянное значение, меньшее единицы (по предположению, $\lambda = 1$ на ударной волне).



Фиг. 2

Условия (1.22) на ударной волне в силу (1.18) и (1.25) дадут следующие выражения R_2, w_2 и w_1 через V_2:

$$R_2 = \frac{1}{1 - V_2} \tag{2.10}$$

$$w_2 = -\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}\,\frac{V_2(1-V_2)\,[V_2 + 2\varphi(1)]}{\{[1-(\varkappa-1)\varphi(1)]\,[1-(1-V_2)^{\varkappa}] - \varkappa V_2\}} \tag{2.11}$$

$$w_1 = \frac{\varkappa}{2(1-b)}\,\frac{\{-2 + (\varkappa+1)V_2 + B(1-V_2)^{\varkappa} - (\varkappa-1)\,b\,(1-V_2)^{\varkappa+1}\}}{\{[1-(\varkappa-1)\varphi(1)]\,[1-(1-V_2)^{\varkappa}] - \varkappa V_2\}} \tag{2.12}$$

где

$$B = 2 - (\varkappa - 1)\,[2(1-b)\,\varphi(1) - b] \tag{2.13}$$

Считая, что на ударной волне $\lambda = 1$, из (2.7) находим

$$C_1 = R_2 w_2^{-\frac{1}{\varkappa-1}}$$

При этом P связано с w и R зависимостью

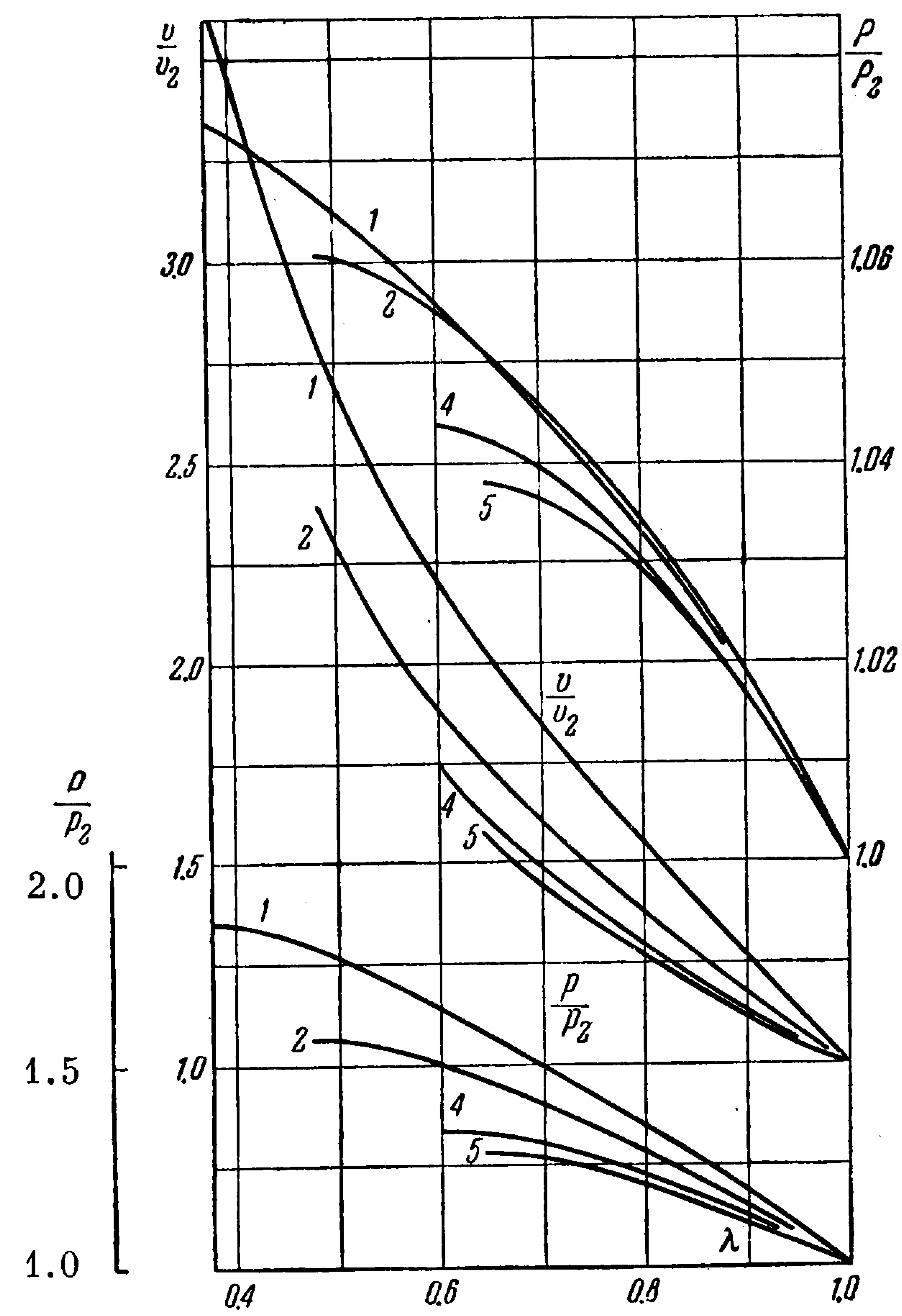
$$P = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{w(R^{\varkappa} - b)}{R^{\varkappa-1}} \tag{2.14}$$

Таким образом, для определения R, P, V и w как функций λ имеем систему четырех уравнений: (2.5), (2.6), (2.7) и (2.14).

Основная трудность при решении этой системы заключается в численном интегрировании уравнения (2.5) при граничных условиях (2.11) и (1.23); $\ln\lambda$ после определения $w(V)$ находится из уравнения (2.6) квадратурой, а R и P — соответственно из уравнений (2.7) и (2.14).

Из уравнений (2.5)—(2.8), (2.14), (1.9) и (1.10) видно, что для плоского поршня, движущегося в цилиндрической трубе, заполненной водой, как и в случае газа [1, 2], между поршнем и ударной волной образуется область движения с постоянной скоростью, плотностью и давлением.

На фиг. 1 построены графики функций p_*/p_1, ρ_*/ρ_1 и D/a_1 — безразмерных значений давления, плотности на поршне и безразмерной скорости ударной волны в зависимости от безразмерной скорости поршня U/a_1. На фиг. 2 и 3 даны графики функций v/v_2, ρ/ρ_2 и p/p_2 в зависимости от λ для различных значений параметра w_1; фиг. 2 соответствует случаю сферической, фиг. 3 — цилиндрической симметрии; кривые *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6* соответствуют значениям $w_1 = 0.66538$, 0.37742, 0.16720, 0.09126, 0.01362 и 0. Константы, входящие в уравнения (2.2) — (2.4), определялись из экспериментальных данных [5].



Фиг. 3

3. Решение задачи о фокусировке идеального газа в точке и разлете его из точки было дано Л. И. Седовым [1, 2]. Эти решения даются интегральными кривыми уравнения (2.5), где $w = \gamma P/R$. Из предыдущего ясно, что решение этих задач для воды дается теми же самыми интегральными кривыми.

В начальный момент времени скорость, плотность и давление всех частиц воды одинаковы.

Если начальная скорость направлена к центру, т. е. отрицательна (фокусирование), вода, двигаясь из бесконечности к центру, сначала адиабатически сжимается, затем скачком переходит в состояние покоя.

Если начальная скорость частиц направлена от центра (разлет), при небольших значениях отношения начальной скорости воды к начальной скорости звука $v_1' = v_1/a_1$ имеется расширяющееся со временем ядро покоящейся воды, отделенное слабым скачком от области воды, движущейся к бесконечности.

При некотором определенном значении величины $v_1' = v_1'^*$ получается непрерывное движение, доходящее до центра симметрии, при $v_1' > v_1'^*$ в воде образуется расширяющаяся с постоянной скоростью полость, на границе которой плотность равна нулю.

В отличие от газа в воде при $v_1' \geqslant v_1'^*$ в центре симметрии или на границе с полостью давление отрицательно, причем поверхность, на которой давление обращается в нуль, распространяется по частицам и, следовательно, не может быть принята за границу с пустотой.

Отметим, что, как и для газа, для воды имеет место точное решение уравнений (2.5) — (2.7) (отвечающее особой точке B):

$$v = \frac{2}{2+\nu(\varkappa-1)}\frac{r}{t}$$

$$\rho = \rho_1 C_1 w_*^{\chi}\left(\frac{r}{a_1 t}\right)^{2\chi} \qquad \left(\chi = \frac{1}{\varkappa - 1}\right)$$

$$p = \frac{p_1 C_1}{(1-b)}\left[w_*^{\vartheta}\left(\frac{r}{a_1 t}\right)^{2\vartheta} - \frac{b}{C_1^{\varkappa}}\right] \qquad \left(\vartheta = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)$$

где a_1 — скорость звука в невозмущенной жидкости

$$a_1^2 = \frac{\varkappa p_1}{\rho_1(1-b)}, \qquad w_* = \frac{\nu(\varkappa-1)^2}{[2+\nu(\varkappa-1)]^2}, \qquad \lambda = \frac{r}{a_1 t}$$

Здесь C_1 — константа, входящая в уравнение (2.7).

В центре симметрии давление отрицательно, плотность и скорость обращаются в нуль, в бесконечно удаленной точке эти величины стремятся к бесконечности.

Авторы признательны Л. И. Седову за ряд ценных указаний при выполнении этой работы.

Поступила 1 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
3. Taylor G. I. The air wave surrounding an expanding sphere, Proc. Roy. Soc., A186, No 100, 1946.
4. Кочина Н. Н. Мельникова Н. С. О сильном точечном взрыве в сжимаемой среде. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.
5. Bridgman. Freezing Parameters and Compressions of Twenty One Substances to 50 000 kg/cm². Proc. of the Am. Acad. and Sci., vol. 74, No. 12, 1942.
6. Bridgman. The Phase Diagram of Water to 45 000 kg/cm². Journ. of Chem. Phys. vol. 5, No. 10, 1937.
7. Коул. Подводные взрывы. ИЛ, М., 1950.
8. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. ГИТТЛ, М., 1955.