

ОБ ОТРАЖЕНИИ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ОТ ЦЕНТРА СОПЛА

О. С. Рыжов, С. Ю. Чернявский

(Москва)

В работе рассматриваются пространственные течения идеального газа в соплах Лавала, которые имеют разрывы первых производных от составляющих скорости потока по координатам на особых характеристических поверхностях. Полученные решения дают примеры преобразования трехмерных течений газа в плоско-параллельные и осесимметрические потоки, а также в иные пространственные течения.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим течение идеального газа в сопле Лавала; которое обладает двумя плоскостями симметрии. Совмещая начало цилиндрической системы координат x, r, ϑ с центром сопла и считая, что ось x совпадает с осью сопла, запишем уравнение, определяющее течение газа в окрестности поверхности перехода через скорость звука, в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь φ — потенциал, причем

$$\frac{a_*}{\kappa + 1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{a_*}{\kappa + 1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r, \quad \frac{a_*}{\kappa + 1} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = v_\vartheta$$

где v_x, v_r и v_ϑ являются добавками вдоль осей x, r и ϑ к скорости, равной по величине критической скорости a_* и направленной вдоль оси сопла, κ — показатель адиабаты Пуассона.

В работе [1] получено решение уравнения (1.1), описывающее течения в аналитических соплах Лавала; это решение послужит нам основой дальнейшего исследования:

$$\varphi = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_1^2 \left(\frac{1}{4} - c_2 \cos 2\vartheta \right) x r^2 + c_1^3 \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{12} c_2 \cos 2\vartheta + c_3 \cos 4\vartheta \right) r^4$$

$$\frac{\kappa + 1}{a_*} v_x = c_1 x + c_1^2 \left(\frac{1}{4} - c_2 \cos 2\vartheta \right) r^2 \quad (1.2)$$

$$\frac{\kappa + 1}{a_*} v_r = c_1^2 \left(\frac{1}{2} - 2c_2 \cos 2\vartheta \right) x r + c_1^3 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3} c_2 \cos 2\vartheta + 4c_3 \cos 4\vartheta \right) r^3$$

$$\frac{\kappa + 1}{a_*} v_\vartheta = 2c_1^2 c_2 x r \sin 2\vartheta + c_1^3 \left(\frac{1}{6} c_2 \sin 2\vartheta - 4c_3 \sin 4\vartheta \right) r^3$$

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что $c_1 > 0$. Если в формулах (1.2) положить $c_1 = c_2 = 0$, то получим поток в круглом сопле; положив $|c_1| = 1/4$, $c_2 = 1/192$, будем иметь случай плоского течения [1-4].

В сверхзвуковой области рассматриваемых течений, т. е. в области, лежащей вниз по потоку от поверхности перехода

$$-x = c_1 \left(\frac{1}{4} + c_2 \right) y^2 + c_1 \left(\frac{1}{4} - c_2 \right) z^2 \quad (1.3)$$

каждой точке пространства соответствует свой характеристический конус. Огибающие этих конусов образуют характеристические поверхности. В работе [1] получены уравнения таких четырех характеристик, которые обладают теми же плоскостями симметрии, что и само сопло, проходят через его центр и не имеют изломов:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{16} c_1 [2 - (\delta_2 + \delta_1) + (\delta_2 - \delta_1) \cos 2\vartheta] r^2 \\ x &= \frac{1}{16} c_1 [2 \mp (\delta_2 - \delta_1) \pm (\delta_2 + \delta_1) \cos 2\vartheta] r^2 \\ x &= \frac{1}{16} c_1 [2 + (\delta_2 + \delta_1) - (\delta_2 - \delta_1) \cos 2\vartheta] r^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь

$$\delta_1 = \sqrt{5 - 16c_2} \quad , \quad \delta_2 = \sqrt{5 + 16c_2}$$

Отсюда следует, что решения (1.4) существуют лишь при $|c_2| \leq 5/16$. Обозначим характеристические поверхности, касающиеся в центре сопла поверхности перехода (1.3) и целиком простирающиеся вверх по потоку, через c_-° , вниз — через c_+° . Первая из формул (1.4) дает тогда при $|c_2| < 1/4$ c_-° -эллиптический параболоид, при $|c_2| = 1/4$ — c_-° -параболический цилиндр, при $|c_2| > 1/4$ — гиперболический параболоид. Последняя из формул (1.4) при любых допустимых значениях c_2 дает c_+° -эллиптический параболоид. По нему распространяются возмущения, исходящие из центра сопла от элементарного источника. Вторая из формул (1.4) описывает две характеристические поверхности. При $|c_2| < 1/4$ обе они представляют собой гиперболические параболоиды; при $|c_2| = 1/4$ одна из них будет c_+° -параболическим цилиндром, а другая — гиперболическим параболоидом; при $|c_2| > 1/4$ одна из поверхностей становится c_+° -эллиптическим параболоидом, вторая остается гиперболическим параболоидом.

Таким образом, характеристические c_-° -поверхности существуют только при $|c_2| \leq 1/4$, что естественно следует из формы поверхности перехода (1.3). При $5/16 < |c_2| < 1/4$ из центра сопла вниз по потоку простираются два c_+° -эллиптических параболоида, которые касаются один другого вдоль кривой, лежащей в плоскостях $y = 0$ или $z = 0$ в зависимости от знака во второй формуле (1.4).

Внешний c_+° -параболоид дается второй формулой (1.4), внутренний — последней. Парабола, образуемая сечением внешнего c_+° -параболоида, соответственно плоскостями $z = 0$ или $y = 0$, является кривой, ограничивающей помещаемые в этих плоскостях точечные источники, которые находятся внутри нее и от которых возмущения не попадают на звуковую поверхность. Если источники помещать вне указанной параболы, то возмущения, вносимые ими, достигают поверхности перехода. При $|c_2| = 5/16$ оба c_+° -эллиптических параболоида сливаются между собой. В плоском

случае, т. е. при $|c_2| = 1/4$, c_-° и внешний c_+° -эллиптические параболоиды переходят соответственно в c_-° - и c_+° -параболические цилиндры. При $|c_2| > 5/16$ не существует характеристической поверхности, которая нигде не касается звуковой поверхности, кроме центра сопла, и простирается вниз по потоку.

Перейдем теперь к исследованию распространения слабых разрывов, т. е. разрывов первых производных от составляющих скорости потока по координатам, вдоль характеристических поверхностей. При этом будем рассматривать лишь особые c° -характеристические поверхности, т. е. те, которые касаются в центре сопла поверхности перехода. В общем случае эта задача сводится к исследованию всех возможных продолжений решения (1.2) уравнения (1.1), у которых при $r = 0$ скорость потока направлена вдоль оси сопла, в область, лежащую вниз по потоку от соответствующей характеристики. Наибольший интерес здесь представляет задача об отражении разрывов от центра сопла, которая и рассматривается в настоящей работе. Будем считать поэтому, что невозмущенное течение, в котором осуществляется переход через скорость звука, задано формулами (1.2) и простирается вверх по потоку от характеристической поверхности, даваемой первой из формул (1.4). Эту область обозначим цифрой I и положим в ней

$$c_1 = A_1, \quad c_2 = n_1, \quad c_3 = m_1, \quad \Delta_1' = \sqrt{5 - 16n_1}, \quad \Delta_2' = \sqrt{5 + 16n_1}$$

Очевидно, что решения уравнения (1.1) в области, лежащей вниз по потоку от указанной поверхности, можно искать в виде $\varphi = r^4 f(\xi, \vartheta)$, $\xi = x/r^2$, сводя задачу к интегрированию уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$\left(4\xi^2 - \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 12\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + 16f = 0 \quad (1.5)$$

Начальные данные для уравнения (1.5) задаются вдоль кривой

$$\xi = \frac{1}{16} A_1 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1') + (\Delta_2' - \Delta_1') \cos 2\vartheta] \quad (1.6)$$

Искомые решения должны удовлетворять требованию

$$v_r = v_\vartheta = 0 \quad \text{при } r = 0$$

§ 2. Некоторые свойства уравнения (1.5). Характеристические кривые уравнения (1.5), которые соответствуют интегралу (1.2), даются равенством

$$d\xi^2 + (4\xi^2 - c_1\xi - \frac{1}{4}c_1^2 + c_1^2c_2 \cos 2\vartheta) d\vartheta^2 = 0 \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что уравнение (1.5) гиперболического типа в области

$$\xi^2 - \frac{1}{4}c_1\xi - \frac{1}{4}c_1^2 \left(\frac{1}{4} - c_2 \cos 2\vartheta\right) < 0$$

и эллиптического, если

$$\xi^2 - \frac{1}{4}c_1\xi - \frac{1}{4}c_1^2 \left(\frac{1}{4} - c_2 \cos 2\vartheta\right) > 0$$

Вдоль кривых

$$\xi = \frac{1}{8}c_1 (1 \pm \sqrt{5 - 16c_2 \cos 2\vartheta}) \quad (2.2)$$

тип уравнения меняется. Из равенства (2.2) следует, что при

$$|c_2| > \frac{5}{16} \quad (2.3)$$

существует такая область значений ϑ , для которой при любых значениях ξ уравнение (1.5) является уравнением эллиптического типа. Неравенство (2.3) является следствием того, что при этих значениях c_2 не существует характеристической поверхности, которая нигде не касается поверхности перехода, кроме центра сопла (см. § 1).

Заметим теперь, что кривая (1.6) является интегральной для уравнения (2.1) и, следовательно, характеристической для уравнения (1.5), т. е. характеристическая поверхность (1.4) уравнения (1.1) перешла в характеристическую кривую уравнения (1.5). Естественно, что задача, поставленная в предыдущем параграфе, имеет бесконечное множество решений.

Общее их исследование представляется весьма затруднительным, хотя уравнение (1.5) проще исходного уравнения (1.1). В работах [2-4] для плоских и круглых сопел было установлено, однако, что разрывы первых производных от составляющих скорости потока по координатам, приходящие по c_-° -характеристикам в центр сопла, отражаются от него по c_+° -характеристикам, вообще говоря, в виде разрывов вторых или третьих производных.

Существует лишь единственное течение, которое оказывается предельным и в котором разрывы первых производных распространяются и по c_+° -характеристикам.

Можно ожидать, что течения с указанным свойством будут предельными и в общем случае. К их построению мы и перейдем.

§ 3. Построение решения. Разрывы первых производных от составляющих скорости потока, приносимые в центр сопла по первой из поверхностей (1.4), отражаются от него по одной из трех других поверхностей (1.4). Эти поверхности могут быть различными для различных значений n_1 , что следует из результатов работ [2-4].

Область, расположенную вниз по потоку от особой характеристики, по которой распространяются «отраженные» разрывы, обозначим цифрой *II*; область, расположенную между двумя указанными c° -характеристиками, цифрой *III*. Решение в областях *II* и *III* ищем по-прежнему в виде (1.2) и положим в области *II*

$$c_1 = A_2, \quad c_2 = n_2, \quad c_3 = m_2, \quad \Delta_1'' = \sqrt{5 - 16n_2}, \quad \Delta_2'' = \sqrt{5 + 16n_2}$$

а в области *III*

$$c_1 = A, \quad c_2 = n, \quad c_3 = m$$

Вдоль характеристических поверхностей, разделяющих области *I* и *III* и *III* и *II*, значения v_x , v_r и v_{ϑ} должны совпадать. Эти условия дают уравнения, которые позволяют выразить величины A , n , m и A_2 , n_2 , m_2 через значения A_1 , n_1 , m_1 , характеризующие невозмущенный поток. Напишем указанные уравнения, предполагая, что слабые разрывы отражаются по последней из поверхности (1.4). Вдоль c° -характеристики,

разделяющей области I и III , имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} A_1^2 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] + A_1^2 &= \frac{1}{4} A A_1 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] + A^2 \\
\frac{1}{16} A_1^2 (\Delta_2' - \Delta_1') - A_1^2 n_1 &= \frac{1}{16} A A_1 (\Delta_2' - \Delta_1') - A^2 n \\
\frac{1}{2} A_1^3 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] - A_1^3 n_1 (\Delta_2' - \Delta_1') + A_1^3 &= \\
&= \frac{1}{2} A^2 A_1 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] - A^2 A_1 n (\Delta_2' - \Delta_1') + A^3 \quad (3.1) \\
\frac{1}{8} A_1^3 n_1 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] - \frac{1}{32} A_1^3 (\Delta_2' - \Delta_1') + \frac{1}{3} A_1^3 n_1 &= \\
&= \frac{1}{8} A^2 A_1 n [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] - \frac{1}{32} A^2 A_1 (\Delta_2' - \Delta_1') + \frac{1}{3} A^3 n \\
\frac{1}{16} A_1^3 n_1 (\Delta_2' - \Delta_1') - 4 A_1^3 m_1 &= \frac{1}{16} A^2 A_1 n (\Delta_2' - \Delta_1') - 4 A^3 m \\
\frac{1}{4} A_1^3 n_1 [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] + \frac{1}{3} A_1^3 n_1 &= \frac{1}{4} A_1 A^2 n [2 - (\Delta_2' + \Delta_1')] + \frac{1}{3} A^3 n
\end{aligned}$$

Аналогично вдоль c° -характеристики, разделяющей области III и II , получим вторую группу уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} A_2^2 [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + A_2^2 &= \frac{1}{4} A A_2 [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + A^2 \\
\frac{1}{16} A_2^2 (\Delta_2'' - \Delta_1'') + A_2^2 n_2 &= \frac{1}{16} A A_2 (\Delta_2'' - \Delta_1'') + A^2 n \\
\frac{1}{2} A_2^3 [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + A_2^3 n_2 (\Delta_2'' - \Delta_1'') + A_2^3 &= \\
&= \frac{1}{2} A^2 A_2 [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + A^2 A_2 n (\Delta_2'' - \Delta_1'') + A^3 \quad (3.2) \\
\frac{1}{8} A_2^3 n_2 [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + \frac{1}{32} A_2^3 (\Delta_2'' - \Delta_1'') + \frac{1}{3} A_2^3 n_2 &= \\
&= \frac{1}{8} A^2 A_2 n [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + \frac{1}{32} A^2 A_2 (\Delta_2'' - \Delta_1'') + \frac{1}{3} A^3 n \\
\frac{1}{16} A_2^3 n_2 (\Delta_2'' - \Delta_1'') + 4 A_2^3 m_2 &= \frac{1}{16} A^2 A_2 n (\Delta_2'' - \Delta_1'') + 4 A^3 m \\
\frac{1}{4} A_2^3 n_2 [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + \frac{1}{3} A_2^3 n_2 &= \frac{1}{4} A^2 A_2 n [2 + (\Delta_2'' + \Delta_1'')] + \frac{1}{3} A^3 n
\end{aligned}$$

В системе (3.1) содержится шесть уравнений и всего три неизвестных. Однако можно показать, что величины A и n , определенные из первого и второго уравнений, удовлетворяют также и третьему, четвертому и шестому уравнениям этой системы. Пятое уравнение служит для определения значения m . Поэтому переопределенность системы уравнений (3.1) является кажущейся. То же самое относится и к уравнениям (3.2).

Первое из уравнений (3.1) является квадратным относительно величины A . Один его корень определяется сразу: $A = A_1$, ему соответствует течение в аналитическом сопле, поэтому для наших целей он не интересен. Второй корень дается равенством

$$A = -\frac{1}{4} A_1 (6 - \Delta_2' - \Delta_1') \quad (3.3)$$

Соответствующее ему значение n определяется из второго уравнения (3.1):

$$n = \frac{48n_1 - 5(\Delta_2' - \Delta_1')}{2(6 - \Delta_2' - \Delta_1')^2} \quad (3.4)$$

Величина m дается теперь соотношением

$$m = \frac{5(\Delta_2' - \Delta_1')^2 - 16n_1(\Delta_2' - \Delta_1') - 2048m_1}{32(6 - \Delta_2' - \Delta_1')^3} \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.2) находим аналогично

$$A = -\frac{1}{4} A_2 (6 + \Delta_2'' + \Delta_1'') \quad (3.6)$$

$$n = \frac{48n_2 + 5(\Delta_2'' - \Delta_1'')}{2(6 + \Delta_2'' + \Delta_1'')^2} \quad (3.7)$$

$$m = \frac{5(\Delta_2'' - \Delta_1'')^2 + 16n_2(\Delta_2'' - \Delta_1'') - 2048m_2}{32(6 + \Delta_2'' + \Delta_1'')^3} \quad (3.8)$$

Приравнивая величины (3.3) — (3.5) соответствующим величинам (3.6)—(3.8), можно получить значения A_2 , n_2 и m_2 , выраженные непосредственно через параметры основного потока.

Точно так же можно рассмотреть течения, когда возмущения, приносимые в центр, отражаются от него по c° -характеристическим поверхностям, которые даются второй формулой (1.4). В результате получим

$$A_1 (6 - \Delta_2' - \Delta_1') = A_2 (6 \mp \Delta_2'' \pm \Delta_1'') \quad (3.9)$$

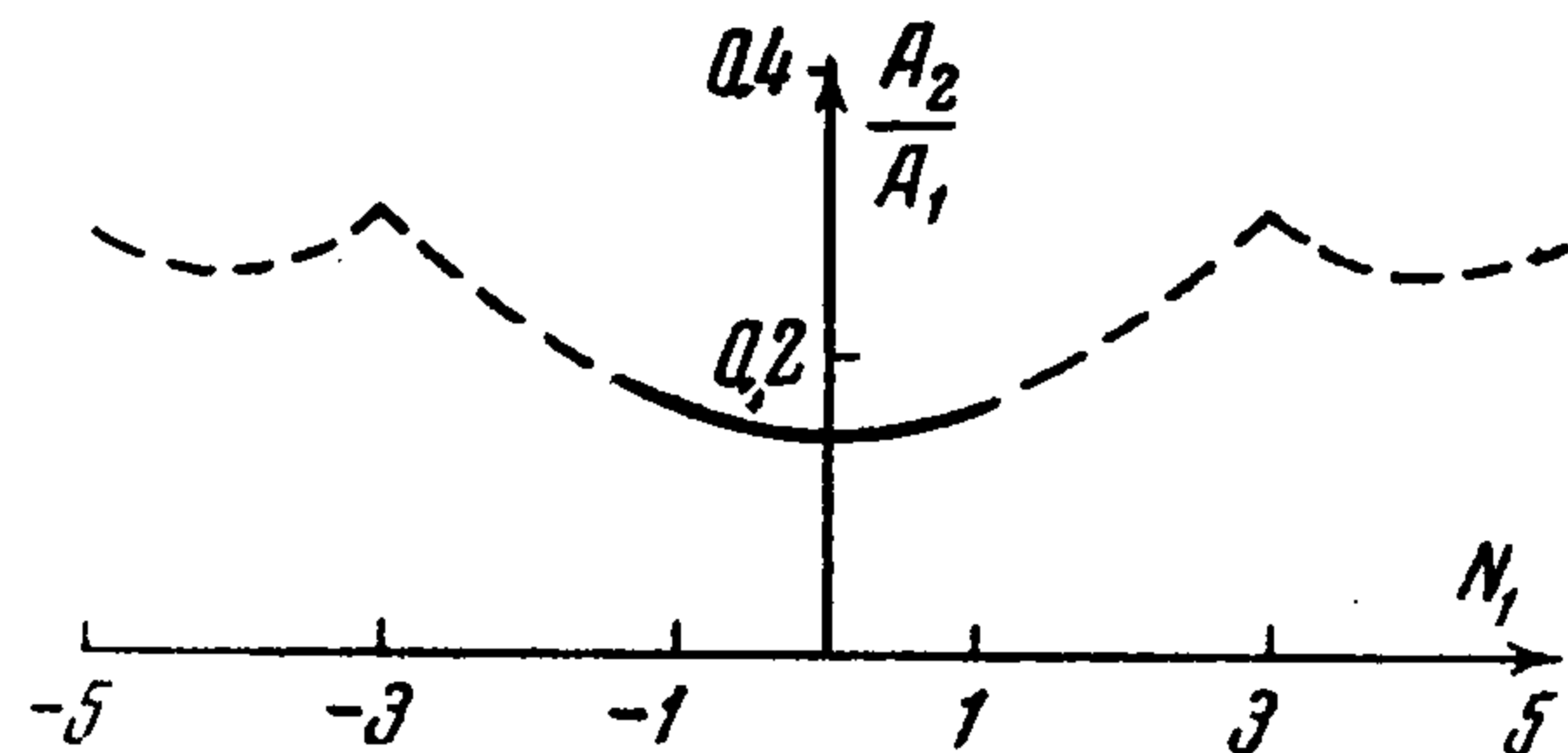
$$\frac{48n_1 - 5(\Delta_2' - \Delta_1')}{(6 - \Delta_2' - \Delta_1')^2} = \frac{48n_2 \mp 5(\Delta_2'' + \Delta_1'')}{(6 \mp \Delta_2'' \pm \Delta_1'')^2} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{5(\Delta_2' - \Delta_1')^2 - 16n_1(\Delta_2' - \Delta_1') - 2048m_1}{(6 - \Delta_2' - \Delta_1')^3} = \\ = \frac{5(\Delta_2'' + \Delta_1'')^2 \mp 16n_2(\Delta_2'' + \Delta_1'') - 2048m_2}{(6 \mp \Delta_2'' \pm \Delta_1'')^3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Знаки в формулах (3.9)—(3.11) выбираются в соответствии со знаками в равенстве (1.4).

Соотношения (3.1)—(3.11) получены сопряжением первых производных $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial r$, $\partial\varphi/\partial\vartheta$, относящихся к аналитически различным решениям, вдоль соответствующих характеристик. Эти условия выражают требование однозначности физических величин. Но они обеспечивают непрерывность и самой функции φ на указанных характеристических поверхностях.

Зависимость отношения A_2/A_1 от величины n_1 , даваемая формулами (3.3), (3.6) и (3.9), представлена на фиг. 1, где $N_1 = 16 n_1$. Зависимость параметра

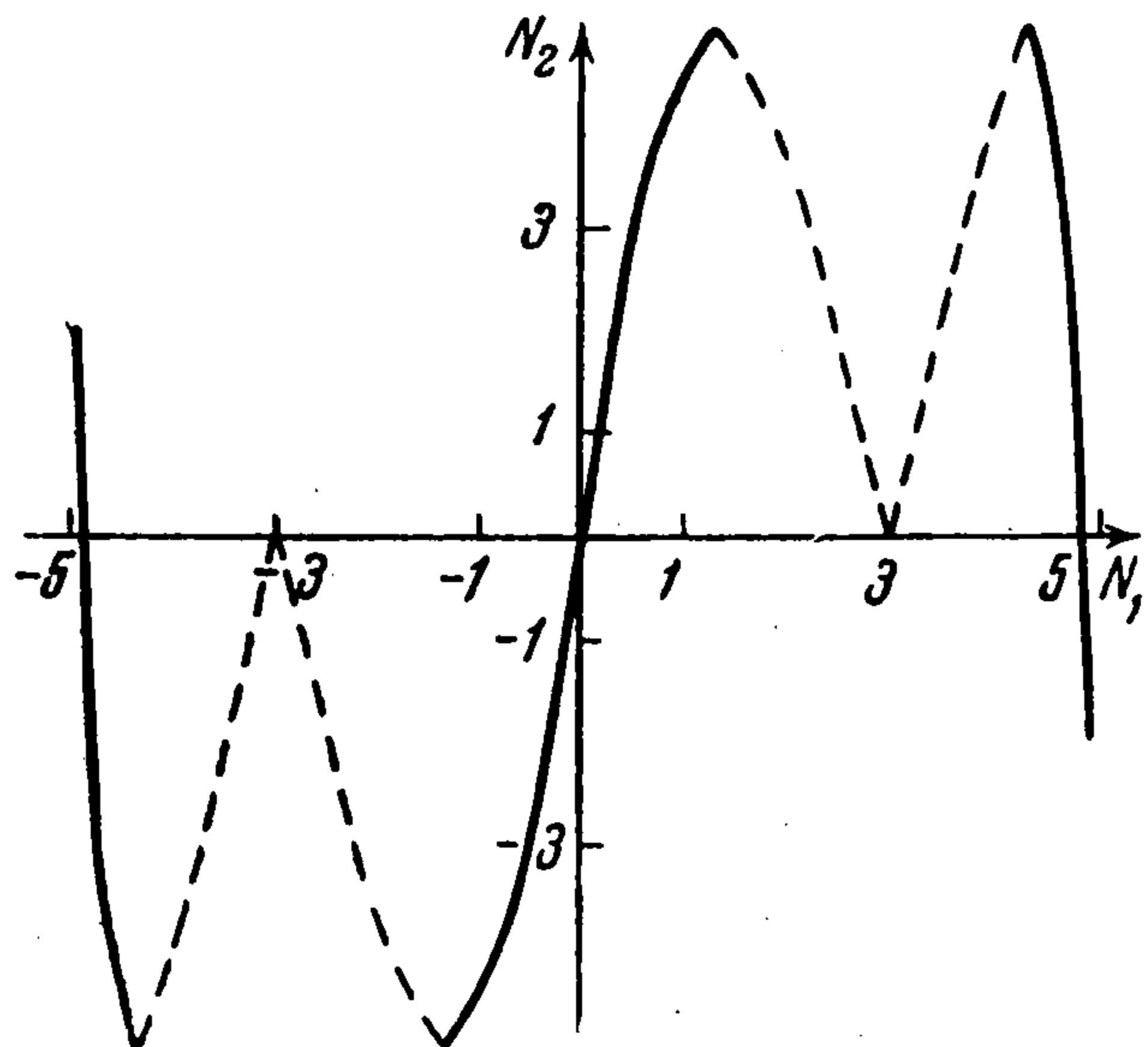


Фиг. 1

n_2 от той же величины n_1 , описываемая равенствами (3.4), (3.7) и (3.10), дана на фиг. 2, где также $N_1 = 16 n_1$ и $N_2 = 16 n_2$. Сплошная линия относится к течениям, у которых слабые разрывы отражаются от центра сопла по характеристическим поверхностям, соответствующим последней из формул (1.4), пунктирная — второй из этих формул.

Из фиг. 2 видно, что невозмущенный поток, обладающий осевой симметрией, преобразуется в осесимметрическое течение. Но если начать искажать основной поток (т. е. слегка изменять величину n_1), то течение за c_+° -эллиптическим параболоидом будет отклоняться от осесимметрического гораздо сильнее, а сам параболоид начнет сплющиваться. При $n_1 \approx \pm 0.047$ имеем $n_2 = \pm 1/4$, т. е. заданное пространственное течение, вообще говоря, близкое к потоку в круглом сопле, преобразуется в плоско-параллельное течение, расположенное внутри c_+° -эллиптического

параболоида. При $n_1 \approx \pm 0.081$ будет $n_2 = \pm 5/16$ и мы получаем течение, у которого оба c_+ -параболоида совпадают друг с другом. При дальнейшем увеличении абсолютного значения n_1 слабые разрывы, приносимые в центр сопла по c_- -характеристике, отражаются от него по поверхности, даваемой второй формулой (1.4). Эта поверхность



Фиг. 2

представляет собой внешний c_+ -эллиптический параболоид, который все более сплюсчивается с увеличением $|n_1|$ и при $|n_1| \approx 0.12$ превращается в c_+ -параболический цилиндр с плоско-параллельным течением внутри него. При $0.12 < |n_1| < 1/4$ характеристическая поверхность, по которой происходит отражение слабых разрывов, является гиперболическим параболоидом, причем при $|n_1| \approx 0.19$ исходное течение преобразуется в осесимметрическое. При $n_1 = \pm 1/4$ имеем $n_2 = \pm 1/4$, т. е. плоский поток переходит в плоский. При $|n_1| > 1/4$ c_- -характеристика превращается в гиперболический параболоид, а c_+ -характеристической поверхностью является сначала внешний, а при $|n_1| > 0.275$ внутренний эллиптические параболоиды, сливающиеся при этом значении $|n_1|$ друг с другом.

Так как при $|n_1| > 0.12$ одной из характеристических поверхностей, на которых терпят разрывы вторые производные функции $\varphi(x, r, \vartheta)$, является гиперболический параболоид, то термин «отражение» при этих значениях n_1 делается неточным (исключением является случай $n_1 = \pm 1/4$).

Отметим, что при $n_1 \approx \pm 0.306$ мы получаем течение с осевой симметрией внутри c_+ -параболоида вращения. Таким образом, рассмотренные течения дают примеры преобразования некоторых пространственных течений в плоско-параллельные и осесимметрические.

Из фиг. 1 следует, что течения в круглых соплах обладают минимальным коэффициентом A_2 при заданном значении A_1 среди всех рассмотренных течений. По аналогии с результатами работ [2,4] можно ожидать, что кривая, приведенная на фиг. 1, описывает минимальное значение отношения A_2/A_1 , которое можно получить при данном значении n_1 .

Поступила 20 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. О газовых течениях в соплах Лавалья. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
2. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 9, № 5, 1945.
3. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
4. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лавалья. ПММ, т. XXII, вып. 4, 1958.