Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АНАЛИЗ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ В МАГНИТНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

В. Н. Жигулев

(Москва)

§ 1. Предположения. Слабым разрывом называется поверхность, на которой сами элементы, характеризующие состояние потока газа, непрерывны, но их первые или более высокие производные претерпевают разрыв. На порядок величины разрыва никаких ограничений не налагаем, кроме того, что он конечен.

Среду, в которой изучаем слабые разрывы, предполагаем идеальной, т. е. лишенной процессов диссипации энергии (нет джоулевых потерь, что соответствует бесконечной проводимости среды, потери на внутреннее трение и теплопроводность отсутствуют). Плотность ρ, давление p и энтропия единицы массы предполагаются связанными уравнением состояния общей формы $p = f(\rho, s)$.

Уравнения магнитной гидромеханики для идеальной среды имеют вид (см., например, [1]):

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \qquad \frac{ds}{dt} = 0$$
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi}[\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}], \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{v}$ — вектор скорости; символом d/dt обозначена полная производная по времени для фиксированной частицы.

§ 2. Кинематические условия на слабом разрыве. Пусть поверхность $\varphi(x, y, z, t) = 0$ будет поверхностью слабого разрыва и пусть функция $u(x, y, z, t)$ непрерывна на этой поверхности, а ее первые производные претерпевают разрыв при переходе через нее. Образуем тогда две функции u_1 и u_2 такие, что функция u_1 совпадает с u по одну, а функция u_2 совпадает с u по другую сторону поверхности $\varphi = 0$, причем сами функции u_1 и u_2 определены по обе стороны поверхности $\varphi = 0$ и непрерывны вместе с первыми производными на ней.

Составив разность $u_2 - u_1$ и дифференцируя ее вдоль $\varphi(x, y, z, t) = 0$, получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] dy + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] dz + \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] dt = 0 \qquad ([\alpha] = \alpha_2 - \alpha_1) \tag{2.1}$$

Здесь дифференциалы dx, dy, dz, dt подчинены единственному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0 \tag{2.2}$$

Из сопоставления выражений (2.1) и (2.2) следует, что

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu_u(x, y, z, t) \qquad (2.3)$$

Таким образом, кинематическое условие (2.3) на слабом разрыве состоит в том, что задание разрыва одной из первых производных функции $u(x, y, z, t)$ при переходе через поверхность $\varphi(x, y, z, t) = 0$ необходимо и достаточно для отыскания разрывов всех других первых производных. Поэтому слабый разрыв какой-либо величины $u(x, y, z, t)$ можно характеризовать одной функцией $\mu_u(x, y, z, t)$ и

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \mu_u \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \mu_u \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

или, что то же,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \lambda_u \mathbf{n}_x, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -\lambda_u \mathbf{N} \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности $\varphi(x, y, z, t) = 0$, а $\mathbf{N}$ — скорость распространения разрыва:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{n}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

На основании (2.4) легко могут быть получены следующие выражения:

$$[\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})] = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H} \times \mathbf{v}), \qquad [\operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v})] = \rho(\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \lambda_\rho v_n \qquad (2.5)$$

$$\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = -\theta \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v}, \qquad [\operatorname{grad} p] = \lambda_p \mathbf{n}, \qquad [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}] = \mathbf{H} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H})$$

Здесь

$$\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} = \lambda_{v_x}\mathbf{i} + \lambda_{v_y}\mathbf{j} + \lambda_{v_z}\mathbf{k}, \qquad \theta = \dot{N} - v_n, \qquad v_n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат x, y, z.

§ 3. Динамические условия на разрыве. Динамические условия на разрыве, или связь между величинами λ_i, получим, используя выражения (2.5) и уравнения магнитной гидромеханики путем составления из них разностей до и после разрыва. Будем иметь

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H}\theta + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v}\theta - \frac{1}{\rho}\lambda_p \mathbf{n} - \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H}) = 0 \\ \lambda_\rho\theta - \rho(\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \\ \lambda_s\theta = 0, \qquad \lambda_p = a^2\lambda_\rho + q\lambda_s \qquad \left(a^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial s}\right)\end{gathered} \qquad (3.1)$$

Последнее из уравнений (3.1) получено дифференцированием уравнения $p = f(\rho, s)$, a — скорость звука. Первое уравнение (3.1) означает, что производные от нормальной к разрыву составляющей напряженности магнитного поля непрерывны при переходе через поверхность слабого разрыва.

Выразив $\lambda_\mathbf{H}$ из второго и четвертого уравнений (3.1) в виде

$$\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H} = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v}}{\theta}H_n + \mathbf{H}\frac{\lambda_\rho}{\rho} \qquad (3.2)$$

и подставив в третье уравнение, а также учитывая шестое уравнение (3.1), имеем

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}\left(\theta-\frac{b_n^2}{\theta}\right)-\frac{\lambda_\rho}{\rho}\left(a^2\mathbf{n}+\mathbf{b}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\right)-\frac{q}{\rho}\lambda_s\mathbf{n}+\frac{b_n}{\theta}(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{n}=0 \qquad (3.3)$$

(здесь $\mathbf{b}=\mathbf{H}/2\sqrt{\pi\rho}$).

Умножив скалярно уравнение (3.3) на $\mathbf{b}$, найдем

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{b}=\frac{a^2b_n}{\theta}\frac{\lambda_\rho}{\rho}+\frac{qb_n}{\theta}\frac{\lambda_s}{\rho} \qquad (3.4)$$

и подставим это обратно в (3.3). Таким образом, системой уравнений, эквивалентной системе (3.1), может быть

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{n}=0,\qquad \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{H}}=-\frac{\lambda_{\mathbf{v}}}{\theta}H_n+\mathbf{H}\frac{\lambda_\rho}{\rho},\qquad \lambda_\rho\theta-\rho\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}=0\\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}\left(\theta-\frac{b_n^2}{\theta}\right)=\frac{\lambda_\rho}{\rho}\left(a^2\mathbf{n}\left(1-\frac{b_n^2}{\theta^2}\right)+\mathbf{b}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\right)+q\mathbf{n}\frac{\lambda_s}{\rho}\left(1-\frac{b_n^2}{\theta^2}\right)\\ \lambda_s\theta=0\end{gathered} \qquad (3.5)$$

Последнее уравнение (3.1) служит теперь лишь для определения λ_p.

Уравнения (3.1) получены в предположении, что разрывны уже первые производные. Однако может представиться случай, когда претерпевают разрыв более высокие производные. Именно, предположим к примеру, что сами элементы потока и их первые производные непрерывны, а вторые производные испытывают разрыв при переходе через поверхность $\varphi(x, y, z, t)=0$. Дифференцируя (например, по x) все уравнения магнитной гидромеханики и составляя их разности до и после поверхности разрыва, получим систему уравнений для величин λ_i ту же, что и (3.1), где величины $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}$, $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{H}}$, λ_ρ и т. д. теперь вводятся согласно следующим равенствам:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right)\right]=\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}n_y,\qquad \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x}\right)\right]=\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{H}}n_y,\qquad \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\right]=\lambda_\rho n_y \text{ и т. д.}$$

Аналогично и для разрывов производных любого порядка. Приведенное рассуждение показывает фундаментальную роль системы (3.1) или системы (3.5) в магнитной гидромеханике.

Система уравнений (3.5) — это линейная однородная система восьмого порядка относительно величин λ_i. Следовательно, отличные от нуля λ_i существуют только в том случае, когда определитель системы (3.5) обращается в нуль. Последнее условие определяет величину скорости распространения поверхности слабого разрыва относительно частиц газа θ.

Вычисляя определитель системы (3.5) и приравнивая его нулю, получим

$$\theta^2(\theta^2-b_n^2)\left[\theta^4-\theta^2(a^2+b^2)+a^2b_n^2\right]=0 \qquad (3.6)$$

В соответствии с характером зависимости θ от элементов потока газа и принятой терминологией для плоских волн бесконечно малой амплитуды в потоке $\mathbf{v}=\mathrm{const}_1$; $\mathbf{H}=\mathrm{const}_2$ можно классифицировать слабые разрывы в магнитной гидромеханике следующим образом:

магнитогидродинамический разрыв

$$\theta^2 = b_n^2 \tag{3.7}$$

магнитозвуковой разрыв

$$\theta^4 - \theta^2(a^2 + b^2) + a^2 b_n^2 = 0 \tag{3.8}$$

энтропийный разрыв

$$\theta = 0 \tag{3.9}$$

§ 4. Магнитогидродинамический разрыв. В этом случае скорость разрыва $\theta = \pm b_n$. Выбирая за ось x направление вектора $\mathbf{n}$, за плоскость x, y — плоскость, где расположены векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}$, будем иметь на основании второго и пятого уравнений системы (3.5)

$$\lambda_{v_z} = \mp b_n \lambda_{H_z}, \qquad \lambda_s = 0 \tag{4.1}$$

Из остальных уравнений системы (3.5) следует, что в случае, если векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}$ не параллельны:

$$\lambda_\rho = \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{H} = \boldsymbol{\lambda}_H \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda}_H \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{4.2}$$

Если же векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}$ параллельны и если, кроме того, $a^2 = b^2$, то на основании (3.4) и (3.4) $\boldsymbol{\lambda}_H \cdot \mathbf{n} = 0$, но $\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{n}$ произвольно, в соответствии с чем отлично, вообще говоря, от нуля и λ_ρ (под осью z здесь следует понимать любое направление, перпендикулярное $\mathbf{n}$).

Рассмотрим теперь стационарные течения. Вследствие того, что в этом случае поверхность разрыва неподвижна, $\theta = -v_n$; поэтому

$$(\mathbf{v} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.3}$$

Выражение (4.3) можно рассматривать как уравнение для возможных положений поверхности слабого разрыва в рассматриваемой точке.

На основании (4.3) видно, что в стационарном случае магнитогидродинамическая поверхность разрыва ориентирована так, что нормаль к ней ортогональна либо к вектору $\mathbf{v} + \mathbf{H}/2\sqrt{\pi\rho}$, либо к вектору $\mathbf{v} - \mathbf{H}/2\sqrt{\pi\rho}$.

§ 5. Магнитозвуковой разрыв. Для функций λ_i получим на основании (3.5) следующие соотношения:

$$\lambda_s = 0, \qquad \boldsymbol{\lambda}_v = \left(\frac{a^2}{\theta}\mathbf{n} + \frac{\theta \mathbf{b} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b})}{\theta^2 - b_n^2}\right)\frac{\lambda_\rho}{\rho}$$

$$\lambda_p = a^2 \lambda_\rho, \qquad \boldsymbol{\lambda}_H = 2\sqrt{\pi\rho}\left(\mathbf{b} - \frac{b_n a^2}{\theta^2}\mathbf{n} - \frac{b_n \mathbf{b} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b})}{\theta^2 - b_n^2}\right)\frac{\lambda_\rho}{\rho} \tag{5.1}$$

Рассмотрим вначале нестационарный случай, считая $\mathbf{n}$ величиной заданной. Разрешая уравнение (3.8) относительно θ^2, получим

$$2\theta_{\alpha,\beta}^2 = (a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_n^2} \tag{5.2}$$

Очевидны следующие оценки:

$$\max(a^2, b^2) \leqslant \theta_\alpha^2 \leqslant a^2 + b^2, \qquad 0 \leqslant \theta_\beta^2 \leqslant \min(a^2, b^2) \tag{5.3}$$

Здесь $\max(a^2, b^2)$ и $\min(a^2, b^2)$ означают величины, максимальные и минимальные среди величин a^2 и b^2. Рассмотрим далее стационарный случай. Выберем направление скорости $\mathbf{v}$ за ось x, плоскость векторов $\mathbf{v}$ и

H — за плоскость x, y; тогда уравнение (3.8) может быть переписано

$$v^4l^4 - v^2l^2(a^2+b^2) + a^2b^2(\cos\gamma l + \sin\gamma m)^2 = 0 \qquad (5.4)$$

Здесь $l = \cos(\mathbf{n}, x)$, $m = \cos(\mathbf{n}, y)$, а через γ обозначен угол между направлениями **v** и **H**. Решая уравнение (5.4) относительно m, получим

$$m = -\frac{l}{\sin\gamma}\left(\cos\gamma \pm \frac{v}{ab}\sqrt{a^2+b^2-v^2l^2}\right) \qquad (5.5)$$

Выражение (5.5) можно рассматривать как уравнение для определения возможных элементов поверхности слабого разрыва. Совокупность этих элементов расположена в плоскостях, касательных к некоторой коничеcкой поверхности с вершиной в рассматриваемой точке. На основании (5.3) и (5.5) следует, что условие

$$v^2 = a^2 + b^2 \qquad (5.6)$$

является достаточным для того, чтобы существовала рассматриваемая коническая поверхность. Оценки (5.3) показывают, что, вообще говоря, коническая поверхность для случая сверхзвукового течения состоит из двух замкнутых поверхностей: одной, расположенной вне конуса Маха ($v^2l^2 = a^2$) и внутри кругового конуса $v^2l^2 = a^2 + b^2$, и другой, расположенной внутри конуса Маха.

В частном случае, когда векторы **v** и **H** параллельны, первая поверхность является круговым конусом $v^2l^2 = a^2 + b^2 - a^2b^2/v^2$, а вторая вырождается в прямую $l = 0$. Условие существования поверхностей слабого разрыва в этом случае, очевидно, будет

$$0 \leqslant l^2 \leqslant 1$$

или

$$\begin{array}{lll} \text{либо} & v^2 > a^2, & b^2 \leqslant v^2 \\ \text{либо} & v^2 < a^2, & v^2 \leqslant b^2 \leqslant \dfrac{a^2v^2}{a^2-v^2} \\ \text{либо} & v^2 = a^2, & b^2\text{—произвольно} \end{array} \qquad (5.7)$$

§ 6. Энтропийный разрыв. Для энтропийного разрыва $\theta = 0$, т. е. он перемещается вместе с частицами газа, а в стационарном потоке совпадает с поверхностью тока. Из четвертого уравнения системы (3.1) следует, что $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$, а тогда на основании второго уравнения (3.1)

$$\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} H_n = 0 \qquad (6.1)$$

Если $H_n \neq 0$, то $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v} = 0$, и из третьего уравнения системы (3.1) следует, что $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H} = \lambda_p = 0$, но тогда

$$\lambda_\rho = -(q/a^2)\lambda_s \qquad (6.2)$$

Если $H_n = 0$, то

$$\lambda_p = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}, \qquad \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

$$\lambda_\rho = \frac{\lambda_p}{a^2} - \frac{q\lambda_s}{a^2} \qquad (6.3)$$

Таким образом, в последнем случае ($H_n = 0$) могут претерпевать разрыв производные составляющих скорости и напряженности магнитного поля в плоскости, касательной к поверхности разрыва.

Поступила 7 II 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Электродинамика сплошных сред. 1957.