

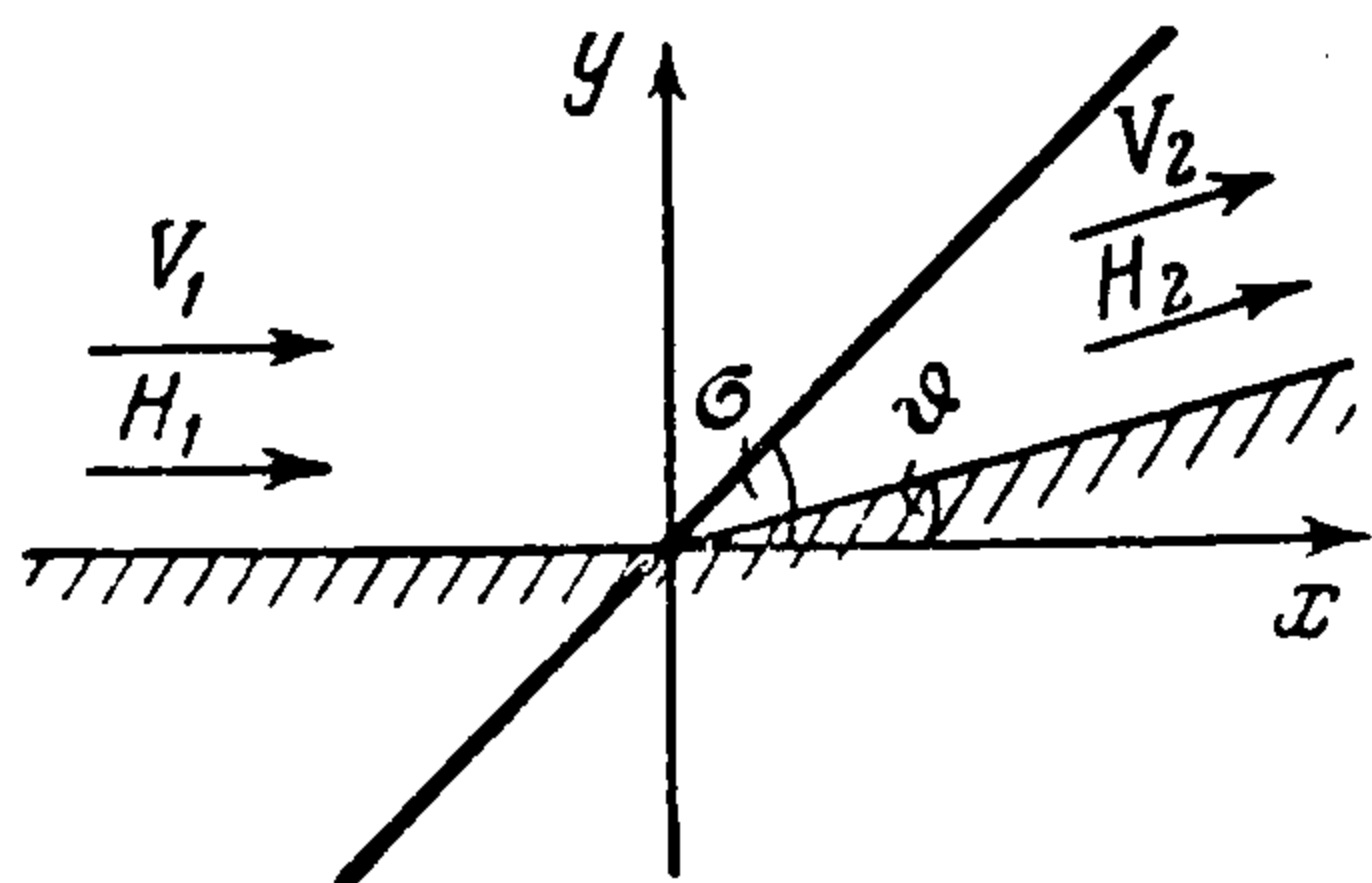
МАГНЕТОДИНАМИКА ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С БЕСКОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

М. Н. Коган

(Москва)

В работе рассматриваются течения идеального газа с бесконечной проводимостью в магнитном поле, параллельном скорости набегающего потока. Показано, что существуют две гиперболические области течений, из которых одна имеет место при дозвуковых скоростях. В этой области течений ударные волны направлены вверх по потоку. При определенном соотношении между магнитным и гидродинамическим давлениями имеет место эллиптический тип течений при сверхзвуковых скоростях. В этой области не существует слабых ударных волн, но имеются сильные ударные волны с углами наклона, начинающимися от прямого. Найдены простые волны в гиперболических областях и построены решения задачи об обтекании тел в линейном и втором приближении.

§ 1. Ударные волны. Пусть магнитное поле H_1 и вектор скорости V_1 параллельны перед ударной волной и пусть ударная волна составляет угол σ с направлением этих векторов (фиг. 1). Тогда давление p ,



Фиг. 1

плотность ρ , скорость V и поле H за (индекс 2) и перед (индекс 1) ударной волной связаны соотношениями [1]:

условием непрерывности нормальной составляющей поля

$$H_n = H_1 \sin \sigma = H_2 \sin (\sigma - \vartheta) \quad (1.1)$$

условием непрерывности плотности потока массы

$$j = \rho_1 V_1 \sin \sigma = \rho_2 V_2 \sin (\sigma - \vartheta) \quad (1.2)$$

условием сохранения тангенциального импульса

$$4\pi\rho_1 V[V_2 \cos (\sigma - \vartheta) - V_1 \cos \sigma] = H_1 [H_2 \cos (\sigma - \vartheta) - H_1 \cos \sigma] \quad (1.3)$$

условием сохранения нормального импульса

$$p_2 + \frac{j^2}{\rho_2} + \frac{H_2^2}{8\pi} \cos^2 (\sigma - \vartheta) = p_1 + \frac{j^2}{\rho_1} + \frac{H_1^2}{8\pi} \cos^2 \sigma \quad (1.4)$$

условием сохранения энергии

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} \quad (1.5)$$

При этом использован тот факт, что углы наклона ϑ векторов H и V за ударной волной одинаковы. Это следует из непрерывности касательной составляющей электрического поля E . В бесконечно проводящей жидкости $E = -(1/c) V \times H$. В нашем случае E перед скачком равно нулю, а следовательно, и за скачком векторное произведение $V \times H = 0$ и H параллельно V .

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\frac{H_2}{\rho_2 V_2} = \frac{H_1}{\rho_1 V_1} \quad (1.6)$$

Рассмотрим ударные волны малой интенсивности. Пусть H_0 , V_0 , ρ_0 и ρ_0 соответствуют основному потоку, причем H_0 и V_0 направлены по оси x . Пусть h_x , h_y , v_x , v_y , p и ρ с индексами 1 и 2 — малые добавки соответственно до и после скачка¹.

Пренебрегая в (1.1) — (1.5) квадратами малых величин и проводя необходимые преобразования, получим следующие соотношения в слабой ударной волне:

$$\begin{aligned} [h_x] \operatorname{tg} \sigma_0 - [h_y] &= 0, & \operatorname{tg} \sigma_0 [v_x] - [v_y] + \frac{V_0}{\rho_0} [\rho] &= 0 \\ [p] + \rho_0 V_0 [v_x] &= 0, & [v_x] + [v_y] \frac{1 - H_0^2 / 4\pi\rho_0 V_0^2}{M_0^2 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} H_0 [v_y] + V_0 [h_y] &= 0 & \left(M_0^2 = \frac{V_0^2}{a_0^2}, a_0^2 = \frac{\kappa p_0}{\rho_0} \right)^2 \\ \operatorname{tg}^2 \sigma_0 &= \frac{1}{M_0^2 - 1} \frac{1/2 \rho_0^2 V_0^2 - (1 - M_0^2) H_0^2 / 8\pi}{1/2 \rho_0 V_0^2 - H_0^2 / 8\pi} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где σ_0 — угол наклона ударной волны нулевой интенсивности, a_0 — скорость звука основного течения. Символ $[A]$ означает $(A_2 - A_1)$.

Рассматриваемое течение имеет два характерных безразмерных параметра: число Маха M и параметр N_0^2 , равный отношению магнитного и гидродинамического давлений. Используя эти параметры, перепишем (1.8) в виде

$$\operatorname{tg} \sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)}{(M_0^2 - 1)(M_0^2 - N_0^2)}} \quad \left(N_0^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\kappa\rho_0} \right) \quad (1.9)$$

Очевидно, что при заданном N_0 всегда существуют столь малые числа M , что правая часть (1.9) будет мнимой. При этих числах M , очевидно, слабых ударных волн не существует. При $M_0 = M_{01} = \sqrt{N_0^2 / (1 + N_0^2)}$ числитель правой части (1.9) меняет знак и вся правая часть становится действительной.

Следовательно, при $M_{01} \leq M_0 \leq \min(1, N_0)$ могут существовать слабые ударные волны.

Здесь представляются три возможности, показанные на фиг. 2, где цифры 1, 2, 3 обозначают соответственно эллиптическую, квази-гиперболическую и вполне гиперболические области.

а) при $N_0 < 1$ рассматриваемая область существования ударных волн заканчивается при дозвуковых скоростях и за ней до $M_0 = 1$ простирается область, в которой ударных волн нет; при $M_0 \geq 1$ снова появляются ударные волны (фиг. 2а).

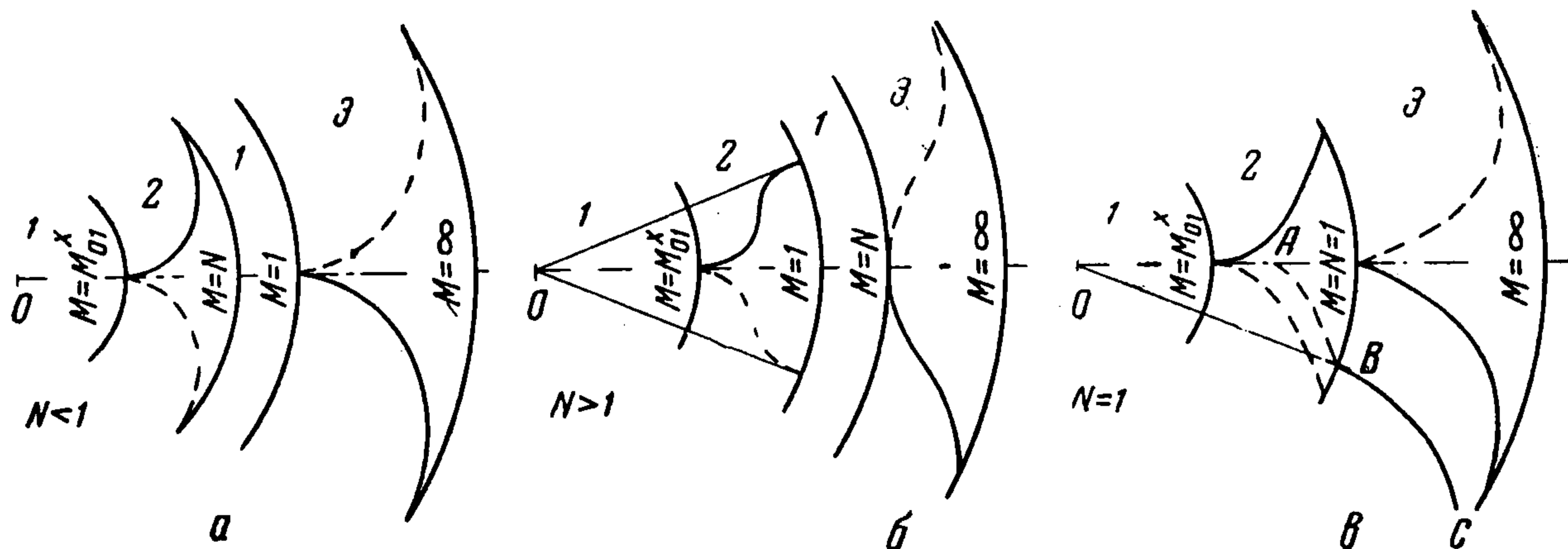
б) при $N_0 > 1$ дозвуковая область существования ударных волн простирается до $M_0 = 1$, а при $M_0 \geq 1$ и до $M_0 = N_0$ простирается область, в которой слабых ударных волн существовать не может; при $M_0 \geq N_0$ вновь существуют слабые ударные волны (фиг. 2б);

¹ Векторы V и H перед скачком могут быть и не параллельны (но почти параллельны).

² Условие сохранения касательной составляющей электрического поля.

в) при $N_0 = 1$ обе области существования слабых разрывов стыкуются при $M = 1$ (фиг. 2в).

Дозвуковую область существования слабых ударных волн будем называть квази-гиперболической¹, а соответствующую сверхзвуковую область вполне гиперболической и просто гиперболической.



Фиг. 2

Как известно [1], в реальных² слабых ударных волнах давление должно расти. Согласно (1.7) и (1.8) в квази-гиперболической области при $\sigma_0 < 1/2\pi$ и $[v_y] > 0$ должно быть $[v_x] > 0$, а следовательно, давление p падает, т. е. в реальной ударной волне при $\sigma_0 < 1/2\pi$ поток должен отклоняться вниз, а не вверх, как в обычной сверхзвуковой аэродинамике. В гиперболической области при $\sigma_0 < 1/2\pi$ реальные скачки отклоняют поток вверх.

Обозначим угол наклона слабой ударной волны ненулевой интенсивности через $\sigma = \sigma_0 + \delta$. Пусть поток за волной (фиг. 1) поворачивается на угол ϑ . Разлагая соотношения (1.1) — (1.5) в ряд по ϑ и сохраняя члены второго порядка, найдем

$$\delta = \frac{(3 + \kappa)(1 - M_1^2)N_1^2 + (\kappa + 1)(N_1^2 - M_1^2)}{4[M_1^2 - N_1^2(1 - M_1^2)](1 - M_1^2)} M_1^2 \vartheta \quad (1.10)$$

Как показано выше, в квази-гиперболической области отклонение потока и поля на положительные углы ϑ происходит в скачках с $\sigma_0 > 1/2\pi$. Из (1.10) следует, что $\delta > 0$ и, следовательно, ударная волна приближается к оси x по мере увеличения ϑ . Ударные волны с углами наклона $|\sigma| < 1/2\pi$ не существуют. В частности, нет ударной волны, перпендикулярной потоку.

В гиперболической области положительным ϑ соответствуют $\sigma_0 < 1/2\pi$ и $|\sigma| \geq |\sigma_0|$, как и в обычной газодинамике. При $N > 1$ и $1 \leq M \leq N$ существует, очевидно, прямой скачок ($\sigma = 1/2\pi$), но не существует слабых ударных волн. Ударные волны с углами наклона $1/2\pi \leq \sigma \leq \pi$ являются здесь сильными ударными волнами.

§ 2. Уравнения магнетогидродинамики и характеристики. Движение газа с бесконечной проводимостью при наличии магнитного поля описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho \mathbf{V} &= 0, & (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

¹ Из дальнейшего будет ясна причина такого наименования.

² С возрастающей энтропией.

В случае плоского течения из последнего уравнения (2.1) следует, что $\mathbf{V} \times \mathbf{H} = \text{const}$. Так как рассматриваются течения, в которых на бесконечности $\mathbf{V}_0 \parallel \mathbf{H}_0$, то $\mathbf{V} \parallel \mathbf{H}$ во всем течении, так как в ударных волнах, как показано в § 1, параллельность этих векторов также не нарушается. Следовательно, во всем потоке

$$V_x H_y - V_y H_x = 0 \quad (2.2)$$

Направим ось x вдоль линии тока. Тогда $V_y = 0$, а по (2.2) и $H_y = 0$. Уравнение неразрывности (2.1) запишем в виде

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_x \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{V_x}{H_x} \frac{\partial H_y}{\partial y} = - \frac{V_x}{H_x} \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (2.4)$$

Исключая $\partial V_y / \partial y$ из (2.3), согласно (2.4) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{H_x}{\rho V_x} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Следовательно, вдоль линии тока $H / \rho V = \text{const}$. Так как в ударной волне согласно (1.6) это отношение непрерывно, то во всем потоке

$$\frac{H}{\rho V} = \frac{H_0}{\rho_0 V_0} \quad (2.6)$$

Ввиду параллельности векторов \mathbf{H} и \mathbf{V} соотношение (2.6) равносильно двум соотношениям:

$$H_x = \frac{H_0}{\rho_0 V_0} \rho V_x, \quad H_y = \frac{H_0}{\rho_0 V_0} \rho V_y \quad (2.7)$$

Используя эти выражения, мы можем исключить магнитное поле из уравнений движения (2.1); имеем

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{H_0^2 V_y}{4\pi \rho_0^2 V_0^2} \left(\frac{\partial \rho V_x}{\partial y} - \frac{\partial \rho V_y}{\partial x} \right) \quad (2.8a)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{H_0^2}{4\pi \rho_0^2 V_0^2} \left(\frac{\partial \rho V_y}{\partial x} - \frac{\partial \rho V_x}{\partial y} \right) \quad (2.8b)$$

Уравнения (2.8) вместе с уравнением неразрывности (2.1) и условием постоянства энтропии вдоль линии тока

$$V_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) + V_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0 \quad (2.9)$$

составляют замкнутую систему уравнений для определения четырех неизвестных V_x , V_y , p и ρ .

Записывая уравнения (2.8a) и (2.9) в координатах, ось x которых направлена по линии тока, замечаем, что модуль вектора скорости V , давление p и плотность ρ связаны вдоль линии тока теми же соотношениями, что и в обычной газовой динамике:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (2.10)$$

или

$$p = \left[\frac{\kappa-1}{2\kappa} (V_{\max}^2 - V^2) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} f^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad \left(f = \frac{p}{\rho^\kappa} \right) \quad (2.11)$$

Здесь V_{\max} — максимальная скорость потока, постоянная во всем течении, согласно (1.5).

Изменения энтропии в скачках уплотнения пропорциональны кубу перепадов давления [1]. Поэтому с точностью до квадратов $f = \text{const}$, а следовательно, p однозначно связано с V , как и в обычной газовой динамике.

Применяя обычные приемы для отыскания характеристик системы уравнений, найдем, что плоские течения магнитогазодинамики обладают двумя семействами характеристик¹, угол наклона которых к линии тока σ_0 определяется выражением

$$\text{tg } \sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{M^2 - N^2(1 - M^2)}{(M^2 - 1)(M^2 - N^2)}} \quad \left(N = \frac{H^2}{8\pi} / \frac{\kappa p}{2}\right) \quad (2.12)$$

Характеристики, соответствующие верхнему знаку, будем считать характеристиками первого семейства, нижнему — второго. Поскольку (2.12) совпадает с (1.19), характеристики действительны в тех же диапазонах M и N , в которых существуют слабые ударные волны. Как и должно быть, характеристики совпадают с ударными волнами нулевой интенсивности. Вдоль этих характеристик искомые функции связаны соотношениями:

$$\mp (M^2 - N^2) |\text{tg } \sigma_0| d\vartheta - N^2 d \ln H - \frac{d \ln p}{\kappa} = 0 \quad (2.13)$$

где верхний и нижние знаки стоят в соответствии с (2.12). Если энтропия постоянна во всей области течения, то (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$\pm (M^2 - N^2) |\text{tg } \sigma_0| d\vartheta + [M^2 - N^2(1 - M^2)] d \ln V = 0 \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) видно, что вдоль одного и того же семейства характеристик в гиперболической ($M > N$) и квази-гиперболической ($M < N$) областях направление изменения скорости и давления при одинаковом изменении ϑ противоположно. В плоскости годографа характеристики имеют вид, показанный на фиг. 2².

В гиперболической области при $N \rightarrow 0$ все формулы переходят в соответствующие формулы обычной газовой динамики.

§ 3. Простые волны. Как и в обычной газовой динамике, в каждой из гиперболических областей существуют два типа простых волн: волны сжатия и волны разрежения.

Каждая из волн вырождается в плоскости годографа в характеристику. В магнитогазодинамике свойства простой волны различны в каждой из гиперболических областей.

В соответствии с (2.14) и фиг. 2 течения около вогнутой и выпуклой стенок имеют вид, показанный соответственно на фиг. 3 и 4. Поведение

¹ Линия тока также является четырежды вырожденной характеристикой, вдоль которой справедливы четыре соотношения: (2.7), (2.9), (2.11).

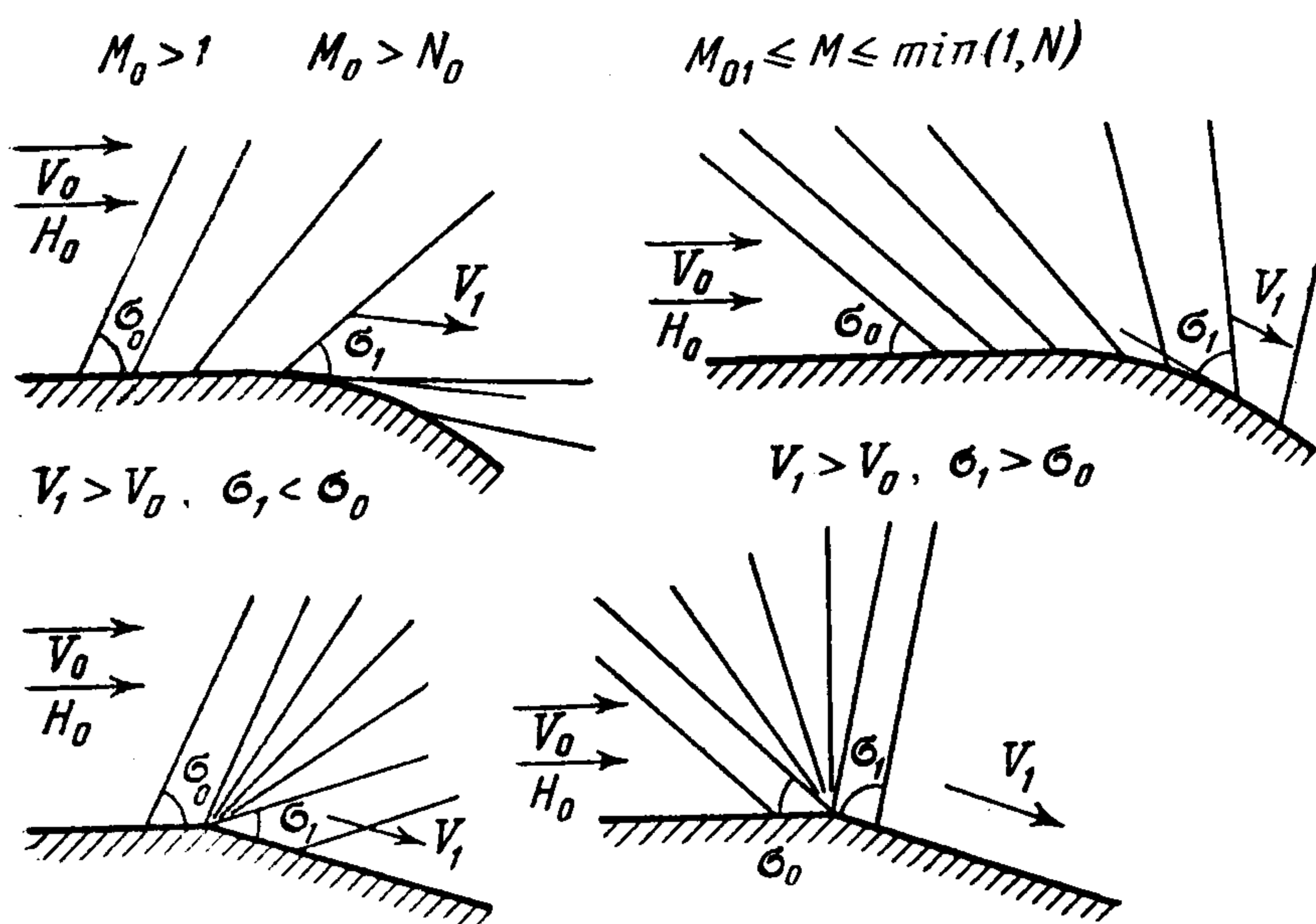
² На фиг. 2 характеристики первого семейства показаны пунктирными линиями, второго — сплошными.

течений вблизи предельных линий ($M = M_{01}$, $M = N$ и т. д.) существенно различно для $N > 1$ и $N < 1$. При $N < 1$ вблизи линий $M = M_{01}$ и $M = 1$ малым изменениям угла соответствуют большие изменения скорости. На внешних же границах гиперболических областей ($M = N$ и $M \rightarrow \infty$) для изменения скорости необходима очень большая кривизна линий тока. При $N > 1$ на обеих границах квази-гиперболической области модуль вектора скорости резко изменяется при малом его повороте. Напротив, на обеих границах вполне гиперболической области изменение модуля вектора скорости требует больших его поворотов.

Интересен случай $N = 1$ (фиг. 5).

В этом случае расширение идет до $M = 1$, например, по характеристике первого семейства AB (фиг. 2с), а при $M > 1$ — по характеристике второго семейства BC . Наклон характеристик в физической плоскости непрерывно изменяется, проходя при $M = 1$ через $1/2\pi$.

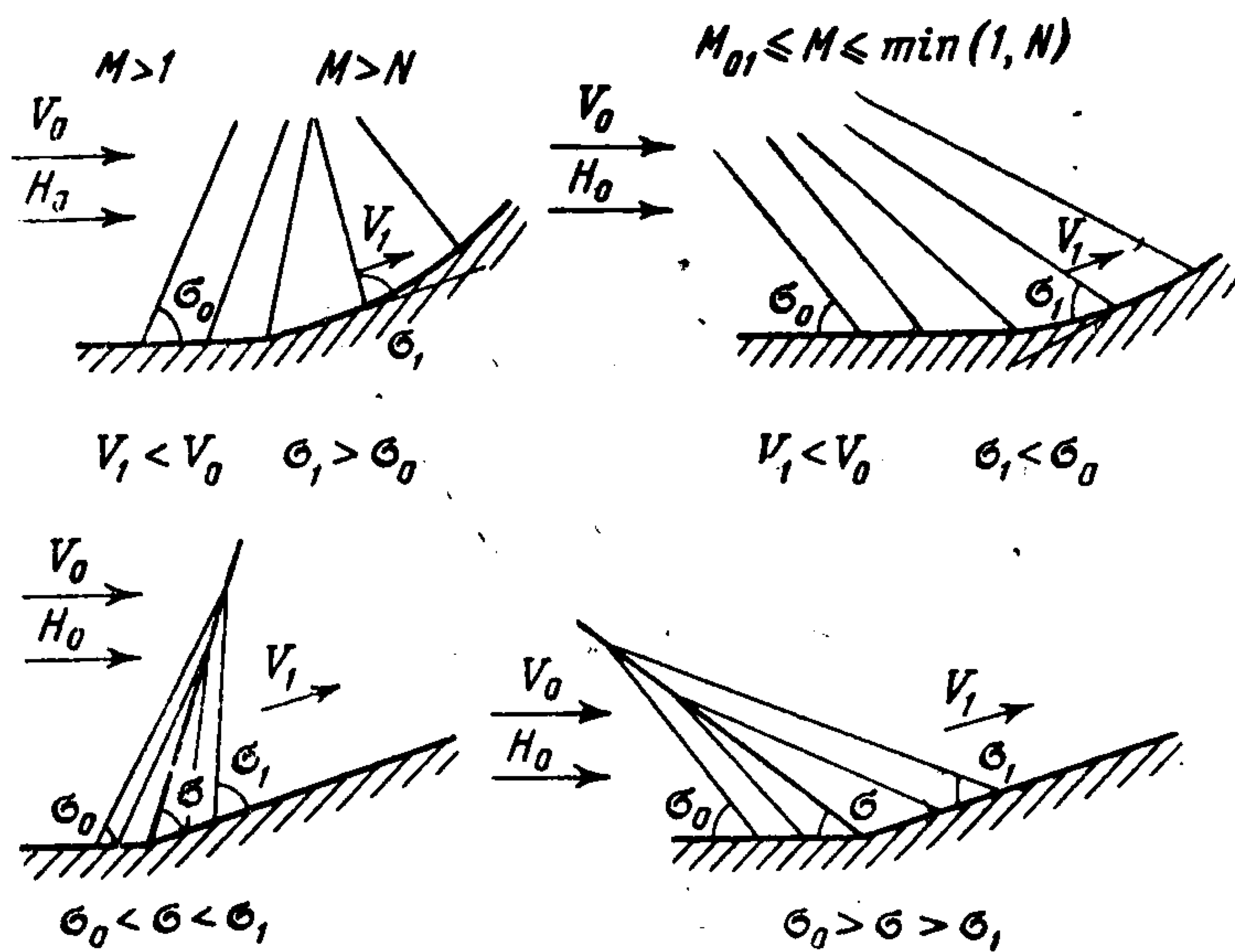
§ 4. Обтекание конечных тел. Пусть некоторое тело обтекается потоком бесконечно проводящего газа, обладающего скоростью V_0 на бес-



Фиг. 4

конечности, в магнитном поле H_0 , параллельном V_0 . Будем считать тело достаточно тонким, так что если набегающий поток принадлежит, например, одной из гиперболических областей, то и все течение не выходит за рамки этой области. Во вполне гиперболической области течение аналогично сверхзвуковому обтеканию профиля (фиг. 6).

Если пренебречь кубами возмущенных скоростей, то, как указывалось выше, течение изэнтропично. С этой точностью изменения в ударной волне совпадают с изменениями в простой волне. Поэтому течение около профиля может быть построено по аналогии с методом Буземана. В квази-гиперболической области формально можно построить аналогичное (по схеме фиг. 6) решение, в котором везде сжатие заменено разрежением. Однако такого течения существовать не может, так как в этом случае в ударных волнах энтропия должна была бы падать. Невозможность существования такого течения понятна еще и из других соображений. В решении, построенном по схеме фиг. 6, течение вверх



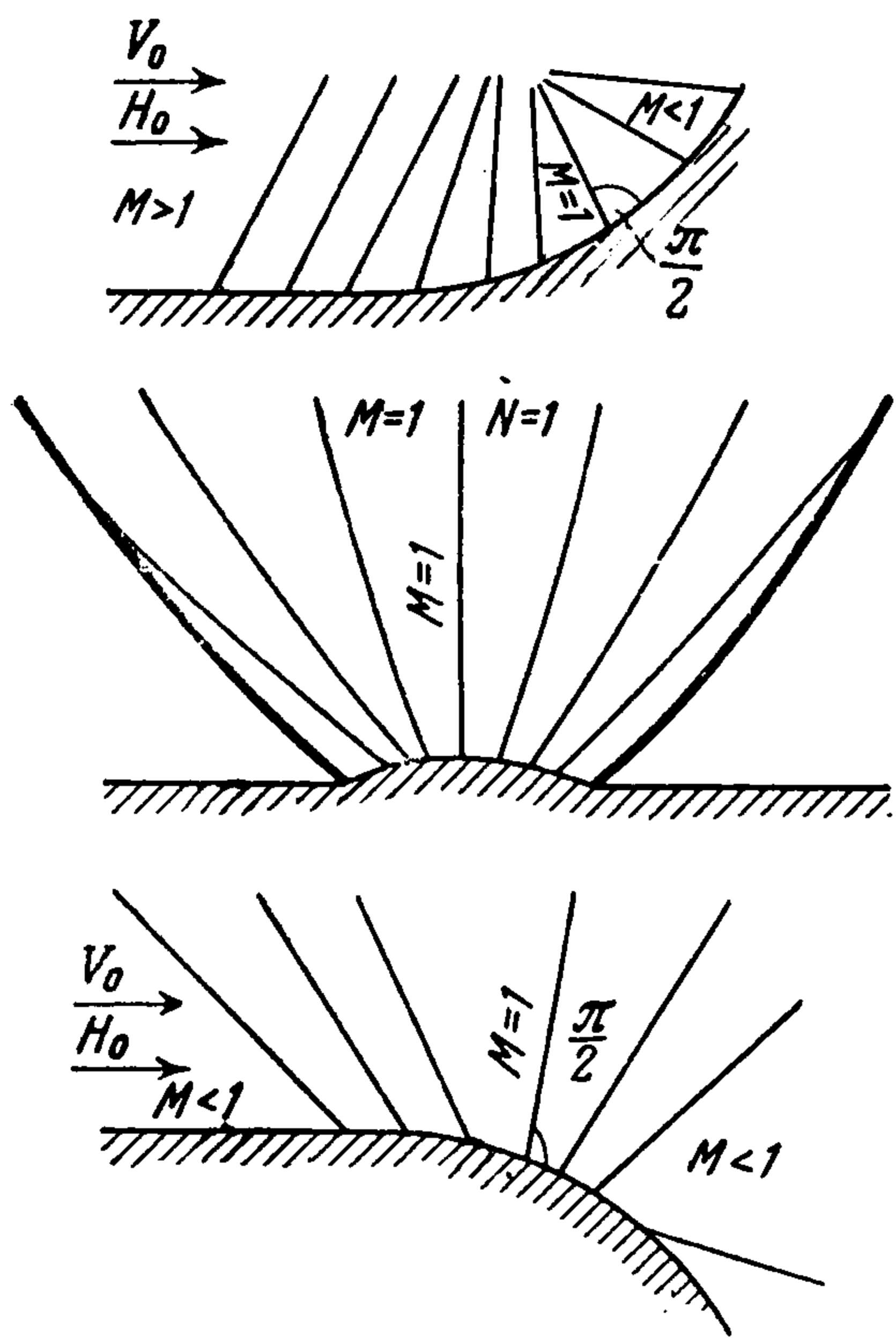
Фиг. 3

по потоку от переднего скачка уплотнения не возмущено. Известно [1], что в магнитной гидродинамике существуют два типа волн, распространяющихся в каждом направлении с двумя различными скоростями.

Скорость распространения этих волн u определяется из уравнения [1]

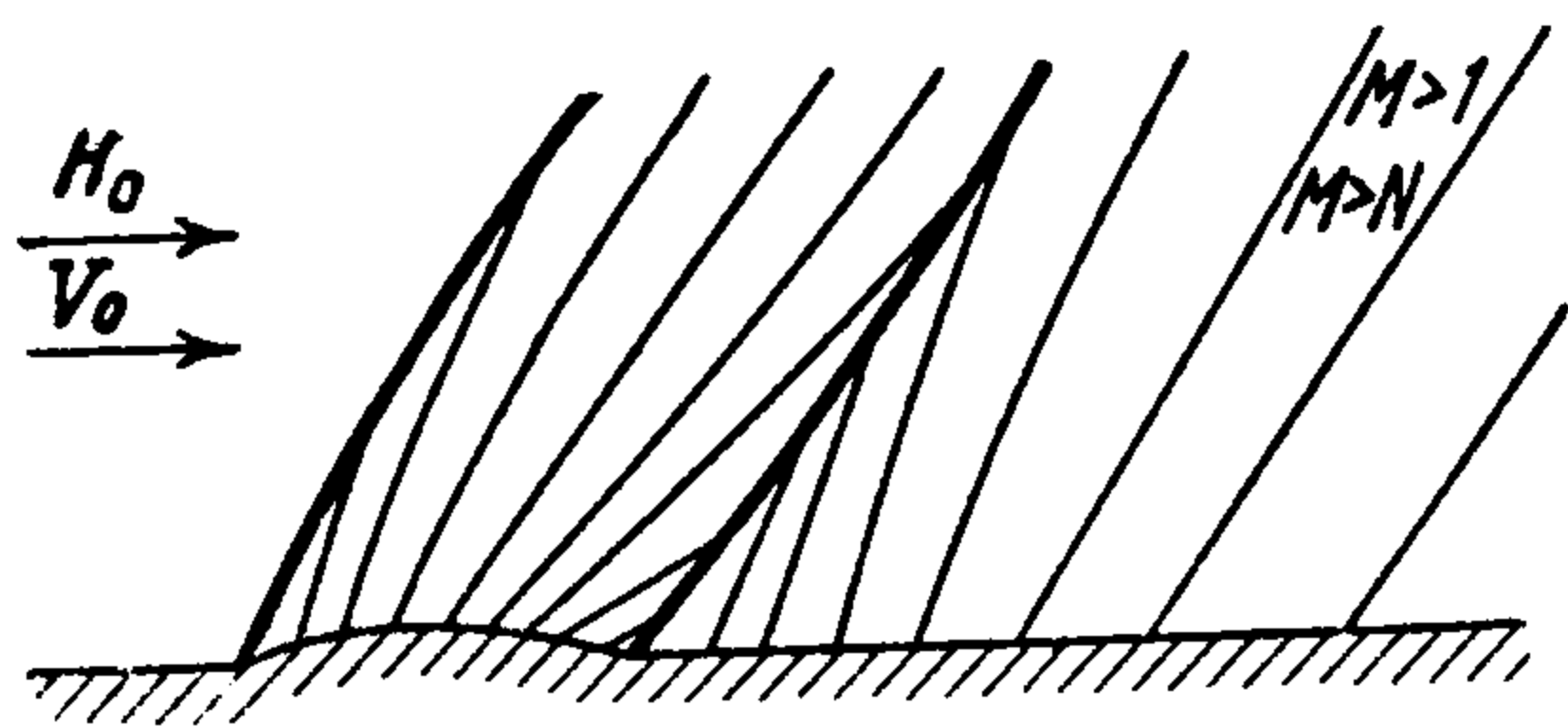
$$(u^2 - a_0^2)(u^2 - N^2 a_0^2 \sin^2 \sigma) = u^2 N^2 \cos^2 \sigma \quad (4.1)$$

где a_0 — скорость звука в основном потоке и σ — угол наклона фронта волны к оси x , вдоль которой в нашем случае направлены векторы V_0 и H_0 . Навстречу потоку ($\sigma = 1/2\pi$), очевидно, распространяются волны со скоростями a_0 и Na_0 . Так как в квази-гиперболической области $M < 1$ и $M < N$, то обе волны проникают вверх по потоку. По мере уменьшения наклона фронта волны скорость одной из волн уменьшается до нуля при $\sigma \rightarrow 0$, а другой — увеличивается до $(N_0 + 1)a_0$. При $N_0 < 1$ уменьшается скорость семейства волн, имеющих при $\sigma = 1/2\pi$ скорость, равную Na_0 . При $N > 1$, наоборот, скорость распространения этого семейства волн возрастает при $\sigma \rightarrow 0$, а скорость второго семейства (имеющего скорость, равную a_0 при $\sigma = 1/2\pi$) падает. Таким образом, одно из семейств волн всегда проникает вверх по потоку. Другое же семей-

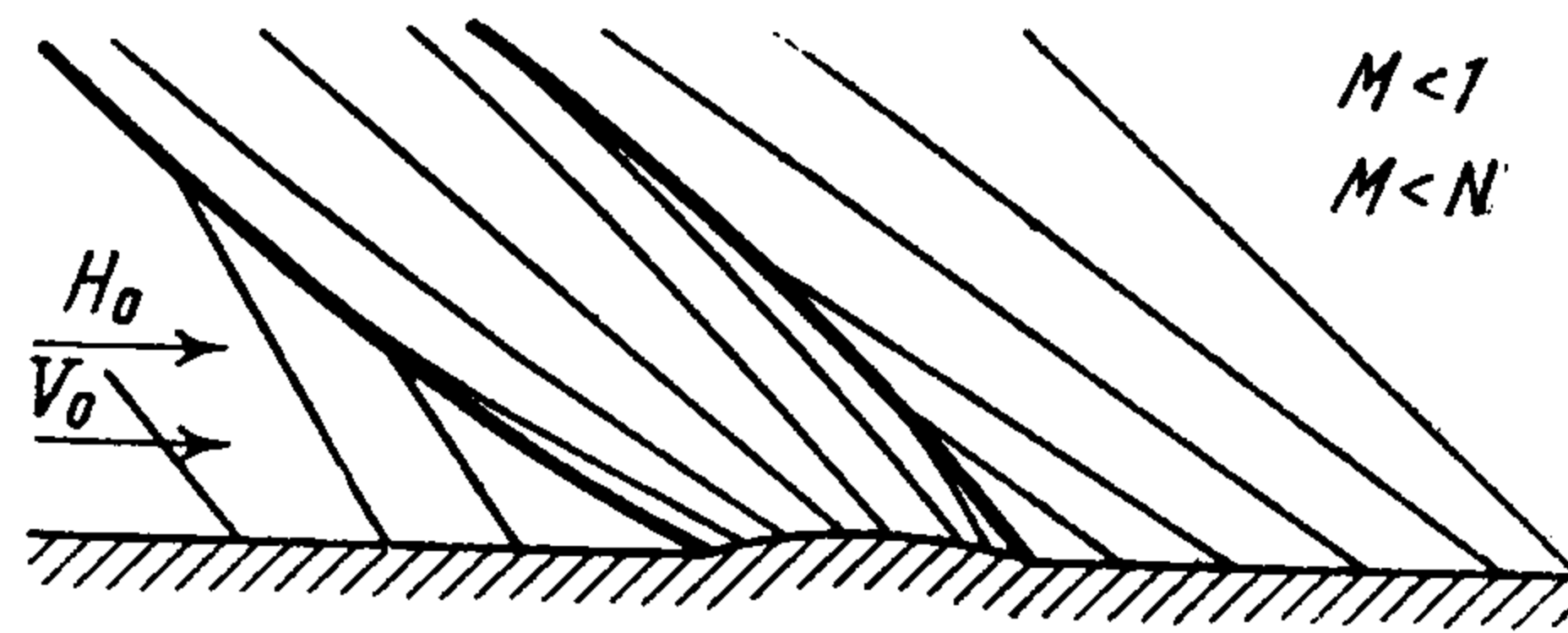


Фиг. 5

равную Na_0 . При $N > 1$, наоборот, скорость распространения этого семейства волн возрастает при $\sigma \rightarrow 0$, а скорость второго семейства (имеющего скорость, равную a_0 при $\sigma = 1/2\pi$) падает. Таким образом, одно из семейств волн всегда проникает вверх по потоку. Другое же семей-



Фиг. 6



Фиг. 7

ство, начиная с некоторого $\sigma_0 < 1/2\pi$, проникнуть вверх по потоку не может. Этому семейству волн мы и обязаны появлением характеристик при $M < 1$. Очевидно, что угол σ_0 равен углу наклона характеристик.

Таким образом, в квази-гиперболической области возмущения могут проникать вверх по потоку. С другой стороны, если бы характеристики второго семейства могли приходить из невозмущенного на бесконечности впереди тела потока, то единственным решением оказалось бы решение, построенное по схеме фиг. 6, с уменьшающейся энтропией. Поэтому характеристики должны упираться в уходящую вверх по потоку ударную волну, как показано на фиг. 7. В этом случае в невозмущенный поток в бесконечности за телом уходят характеристики первого семейства. Все течение получается как бы зеркально отображенным по отношению к привычному сверхзвуковому течению обычной газовой динамики. Однако между этими течениями существует прин-

ципиальная разница. В сверхзвуковой аэродинамике, как и во вполне гиперболических течениях магнетогазодинамики, течение перед скачком уплотнения не возмущено. Поэтому течение перед головным скачком уплотнения известно и методом характеристик можно шаг за шагом, начиная от носка тела, построить все течение и ударные волны. По аналогии с этим естественно попытаться рассчитать течение методом характеристик, идя от конца тела вверх по потоку в квази-гиперболической области. Однако в этом случае поток за хвостовым скачком оказывается возмущенным вследствие изменения энтропии в скачках уплотнения. Поэтому в общем случае все точки течения связаны между собой и обычный метод характеристик не дает возможности построить течение. Чтобы оттенить эту характерную для эллиптических областей особенность рассматриваемых течений, мы и назвали их квази-гиперболическими.

Если ограничиться вторым приближением и пренебречь изменением энтропии, то указанное свойство связности пропадает и решение может быть построено вполне аналогично методу Буземана. Отличие в данном случае состоит лишь в том, что мы двигаемся вдоль характеристик первого семейства из бесконечности за телом, а не вдоль характеристик второго семейства из бесконечности впереди тела. В соответствии с этим в плоскости годографа все течение изображается характеристикой первого семейства, а не второго.

В рассматриваемом случае, как показано выше, магнитное поле \mathbf{H} всюду параллельно вектору скорости \mathbf{V} . Поэтому на границе тела нормальная составляющая поля равна нулю. Поскольку внутри тела нет источников магнитного поля, то согласно уравнениям Максвелла поле равно нулю внутри тела. Таким образом, на границе тела имеет место касательный разрыв магнитного поля и соответствующий ему поверхностный ток. Магнитное поле старается прижать этот ток к телу, чем и обусловлено магнитное давление на тело, равное $H^2/8\pi$. Это явление вполне аналогично пинч-эффекту.

§ 5. Линейная теория. Пусть вдоль оси x течет основной поток со скоростью V_0 и опять поле H_0 на бесконечности параллельно скорости. Обозначим через v_x , v_y , h_x , h_y , p и ρ возмущенные скорости, поле и т. д. Пренебрегая квадратами этих величин, получим из (2.1) и (2.8)

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$[M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)] \frac{\partial v_x}{\partial y} - [M_0^2 - N_0^2] \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

Наклон характеристик этой системы уравнений определяется, очевидно, формулой (1.9). Вдоль характеристик выполняются соотношения (2.14), которые после линеаризации принимают вид:

$$\pm (M_0^2 - N_0^2) |\operatorname{tg} \sigma_0| dv_y + [M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)] dv_x = 0 \quad (5.2)$$

Коэффициент полного давления равен

$$\frac{p}{p_n} = \frac{p + p_m}{\frac{1}{2}\rho_0 V_0^2} = - 2 \frac{M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)}{M_0^2} \frac{v_x}{V_0} \quad (5.3)$$

где $p = -\rho_0 V_0 v_x$ — дополнительное гидродинамическое давление и $p_m = \frac{1}{4} H_0 h_x = H_0^2 (1 - M_0^2) v_x / 4\pi V_0$ — магнитное давление.

Приведем систему (5.1) к виду, привычному в линейной теории течений сжимаемой жидкости. Для этого введем скорость

$$v_x^* = \frac{M_0^2 - N_0^2 (1 - M_0^2)}{M_0^2 - N_0^2} v_x \quad (5.4)$$

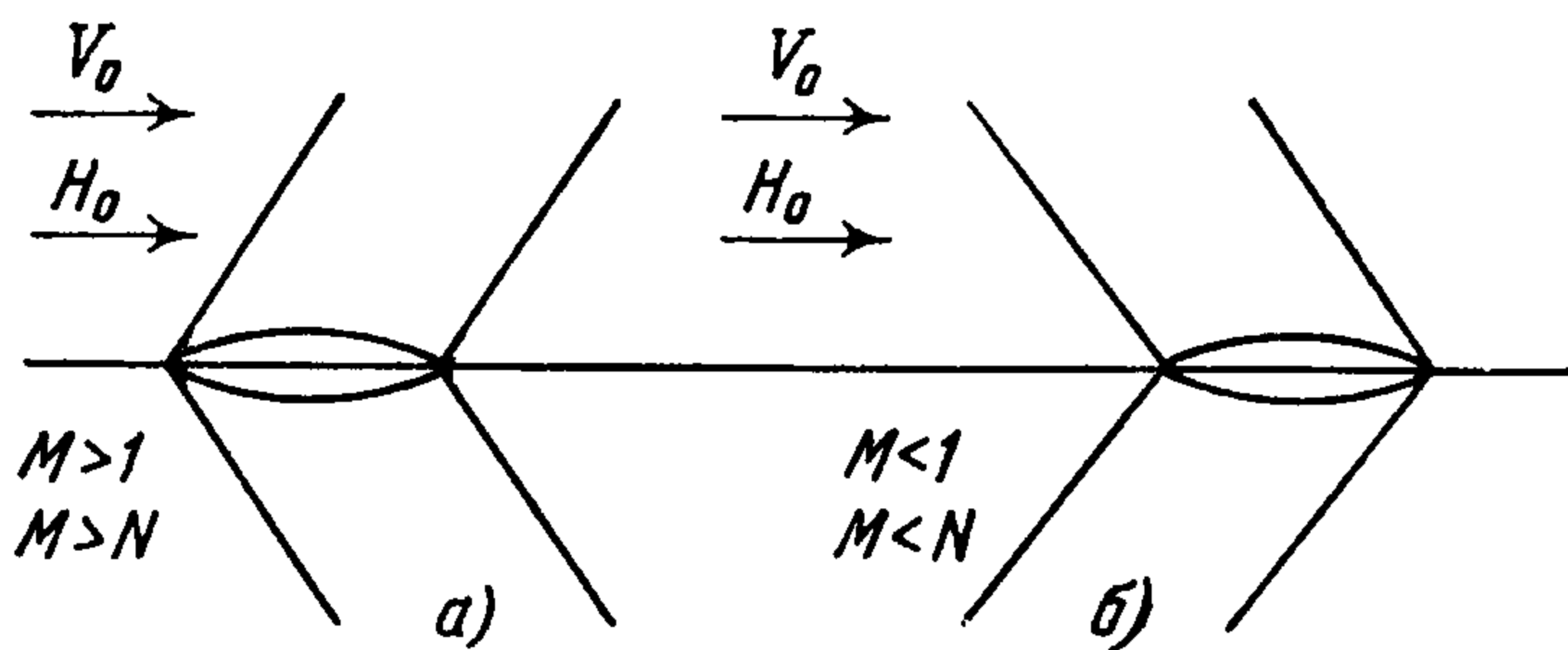
Тогда вместо (5.1) получим

$$\frac{(1 - M_0^2) (M_0^2 - N_0^2)}{M_0^2 - N_0^2 (1 - M_0^2)} \frac{\partial v_x^*}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x^*}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

Коэффициент при $\partial v_x^* / \partial x$, очевидно, положителен в эллиптических областях и отрицателен в гиперболических. Соответственно этому система

(5.5) сводится или к уравнению Лапласа, или к волновому уравнению.

Согласно (5.4) — (5.5) в первой эллиптической дозвуковой области ($M < M_{01}$) характер распределения скоростей будет тот же, что и в идеальной несжимаемой



Фиг. 8

жидкости. Однако по (5.3) зоны разрежения заменяются зонами сжатия. Носителем всех свойств дозвуковых течений является вторая дозвуковая эллиптическая зона, существующая при $N \leq M \leq 1$. При $N \rightarrow 0$ эта зона расширяется и охватывает всю дозвуковую область.

В сверхзвуковой эллиптической области согласно (5.4) — (5.5) картина дополнительных скоростей, а по (5.3) и давлений обратна той картине, к которой мы привыкли в идеальной несжимаемой жидкости. Здесь и дополнительные скорости и дополнительные давления имеют обратный знак.

В гиперболических областях (фиг. 8), идя из бесконечности соответственно вдоль характеристик второго семейства при $M > 1$ и вдоль характеристик первого семейства при $M < 1$, получим согласно (5.2)

$$\frac{v_x}{V_0} = -\vartheta \sqrt{\frac{M_0^2 - N_0^2}{(M_0^2 - 1) [M_0^2 - N_0^2 (1 - M_0^2)]}} \quad (5.6)$$

Следовательно, в этом случае

$$\bar{p} = \frac{2\vartheta}{M_0^2} \sqrt{\frac{(M_0^2 - N_0^2) [M_0^2 - N_0^2 (1 - M_0^2)]}{M_0^2 - 1}} \quad (5.7)$$

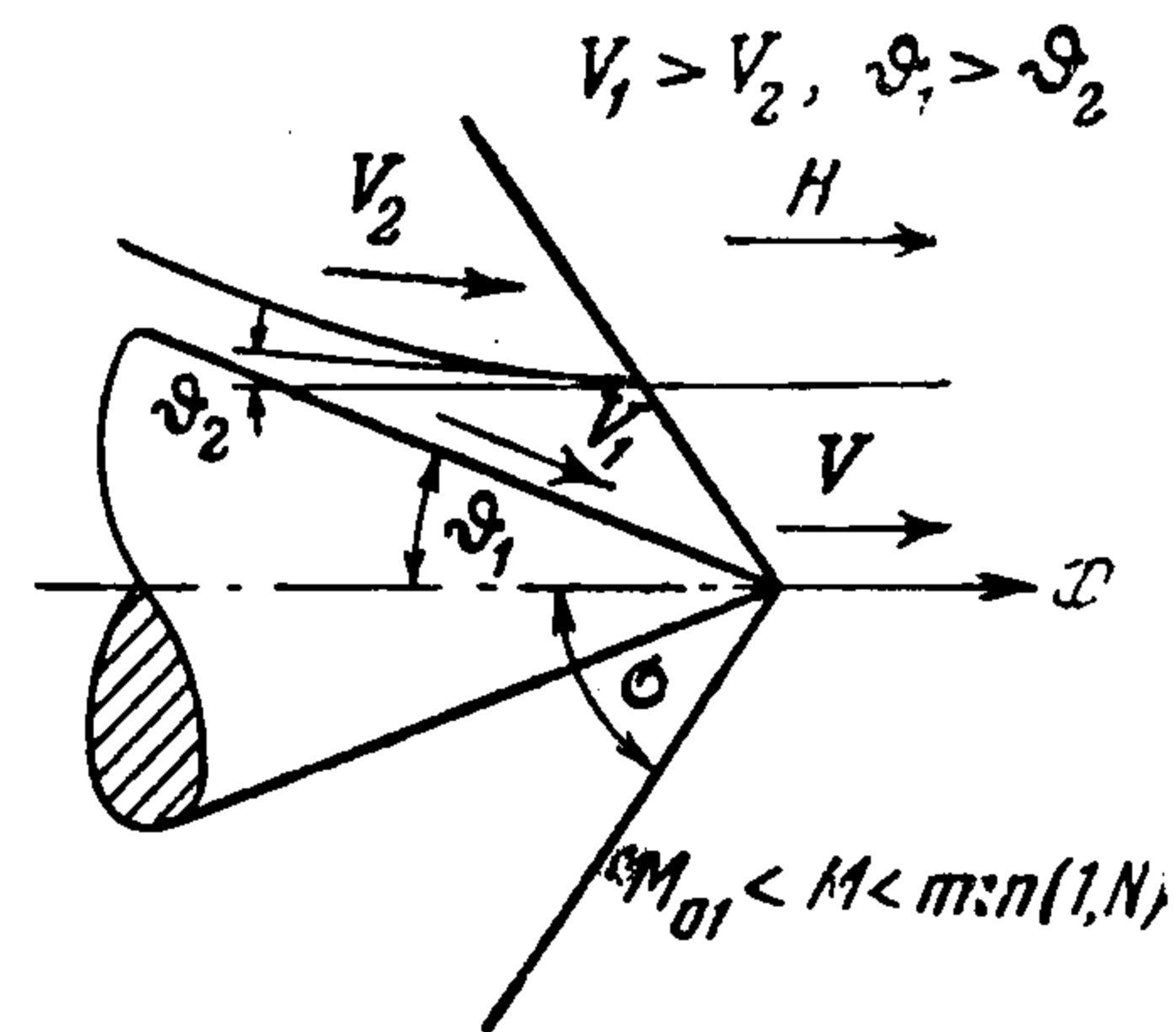
Это выражение отличается лишь множителем от привычного выражения $\bar{p} = 2\vartheta / \sqrt{M_0^2 - 1}$ сверхзвуковой аэродинамики.

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае при $M_0 < 1$ существуют течения (при $M_{01} \leq M_0 \leq \min(N_0, 1)$), в которых не выполняется парадокс Даламбера. В эллиптических областях, наоборот, этот парадокс имеет место по крайней мере в рамках линейной теории¹. Поэтому при $M_0 > 1$ всегда можно подобрать такое магнитное поле H_0 , чтобы

¹ При немалых возмущениях в эллиптических зонах могут появиться сильные ударные волны (см. § 1)

сопротивление тела стало равным нулю. Напротив, при $M < 1$ можно подобрать поле так, чтобы у тела появилось волновое сопротивление. Этих возможностей нет в обычной аэродинамике.

§ 6. Пространственные течения. Рассмотренные выше плоские течения не являются плоскими в полном смысле слова, так как возникающие токи перпендикулярны плоскости течения. Если в некоторой части пространственного течения (в котором токи замкнуты) изменения параметров потока и поля в направлении оси z малы по сравнению с изменениями в плоскости xu , то течение в этой плоскости мы рассматриваем как плоское. Течение в ударных волнах по своей природе плоское [1], так как векторы V и H до и после скачка уплотнения и нормали к волне n лежат в одной плоскости. Поэтому соотношения в ударных волнах остаются теми же, что и выше, если углы σ и ϑ откладывать в плоскости, проходящей через векторы V , H и n .



Фиг. 9

Если до пространственной ударной волны векторы V и H были параллельны, то они остаются параллельными и за ней. Используя это свойство и (2.4), найдем, что $V \parallel H$ во всем пространственном потоке, если эти векторы параллельны на бесконечности. Легко обычными приемами показать, что при тех же соотношениях между V и H , при которых существуют характеристики в плоском течении, в пространственном течении существуют характеристические поверхности и конуса возмущений, угол полураствора которых определяется выражением (2.12).

Рассмотрим течение около тела вращения, когда векторы V_0 и H_0 на бесконечности параллельны его оси. Характер обтекания тела в каждой из рассмотренных в § 4 областей течений будет таким же, как и в плоском случае.

Некоторая специфика появляется в квази-гиперболической области. Здесь, так же как и в плоском случае, течение имеет характер, показанный на фиг. 7.

В обычной сверхзвуковой аэродинамике одно из немногих точных решений было получено для конического течения около круглого конуса с присоединенной головной волной. В рассматриваемом случае аналогичное течение получается у бесконечного обратного (хвостового) конуса (фиг. 9). Однако здесь на поверхности конуса получается разрежение и давление увеличивается по мере передвижения от конуса к скачку уплотнения.

В сверхзвуковой аэродинамике, если конечное тело имеет коническую головку, то течение около этой головки такое же, как и на бесконечном конусе. В квази-гиперболическом же случае вследствие изменения энтропии в головной и хвостовой ударных волнах течение около конической хвостовой части не будет в общем случае коническим. Если пренебречь изменениями энтропии (т. е. в линейном и втором приближении), то течение может быть рассчитано аналогично обычному сверхзвуковому течению около осесимметричного тела. Только здесь расчет начинается

с хвостовой части тела, как будто тело обтекается обратным потоком.

Рассмотрим обтекание тела вращения в линейном приближении. В цилиндрических координатах уравнения движения имеют вид:

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (6.1)$$

$$[M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)] \frac{\partial v_x}{\partial r} + (N_0^2 - M_0^2) \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0$$

где v_x и v_r — дополнительные скорости соответственно по осям x и r . Вводя замену

$$x = -x_1, \quad r = r_1, \quad v_x = \frac{N_0^2 - M_0^2}{M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)} v_x^*, \quad v_r = v_r^*$$

получим

$$\beta^2 \frac{\partial v_x^*}{\partial x_1} - \frac{\partial v_r^*}{\partial r_1} - \frac{v_r^*}{r_1} = 0, \quad \frac{\partial v_x^*}{\partial r_1} - \frac{\partial v_r^*}{\partial x_1} = 0, \quad \text{где } \beta^2 = \frac{(1 - M_0^2)(N_0^2 - M_0^2)}{M_0^2 - N_0^2(1 - M_0^2)} \quad (6.2)$$

Эта система тождественна с соответствующей системой уравнений сверхзвуковой аэродинамики. Решение этой системы для тонкого тела в нашем случае имеет вид:

$$v_x^* = \frac{V_0}{2\pi} \int_0^{x_1 - \beta r_1} \frac{d^2 S}{dx_1^2} \frac{d\xi_1}{V(x_1 - \xi_1)^2 - \beta^2 r_1^2}, \quad v_r^* = -\frac{V_0}{2\pi r_1} \int_0^{x_1 - \beta r_1} \frac{d^2 S}{dx_1^2} \frac{(x_1 - \xi_1) d\xi_1}{V(x_1 - \xi_1)^2 - \beta^2 r_1^2} \quad (6.3)$$

где S — площадь поперечного сечения тела и интегрирование ведется по x_1 (т. е. от хвостика тела к носу). Как и следовало ожидать, на конической хвостовой части получается разрежение.

Известно, что в хвостовой части заостренного с обеих сторон тела вращения, обтекаемого сверхзвуковым потоком непроводящего газа, имеет место восстановление давления. При этом у самого хвостика появляется область дозвукового течения и хвостовая волна начинается на некотором расстоянии до конца тела. В квази-гиперболическом случае аналогичное течение получается у носовой части тела.

Пользуясь аналогией с обычной аэродинамикой, можно было бы построить еще ряд точных решений и указать характерные особенности тех или иных течений. Однако мы стремились отметить главным образом те свойства магнетогидродинамических течений, которых нет в обычной аэродинамике.

В настоящей работе мы не рассматривали важный класс внутренних течений в плоских и осесимметричных каналах (соплах, диффузорах и т. п.) в продольном магнитном поле. Рассмотрению этого вопроса, а также анализу более общего класса течений с непараллельными векторами скорости и магнитного поля мы посвятим специальные исследования.

Поступила 3 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, т. II, ГТИ, 1948.