

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ НА ДАВЛЕНИЕ ВОЗДУХА НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЕЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ, ОБТЕКАЕМОГО ПОТОКОМ С БОЛЬШОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Г. И. Майкапар

(Москва)

Основная геометрическая особенность обтекания тел потоком большой сверхзвуковой скорости — близость головного скачка уплотнения к поверхности тела (и соответствующая ей большая плотность воздуха в слое за скачком) использована в ряде работ для создания приближенных методов расчета (см., например, [1]). Особенное внимание привлек предельный случай отношения теплоемкостей $\gamma \rightarrow 1$ и числа $M \rightarrow \infty$ при исчезающей толщине тела, в котором скачок совпадает с поверхностью тела, а плотность воздуха за скачком бесконечно велика. Несмотря на то, что толщина слоя воздуха за скачком в пределе равна нулю, давление воздуха на поверхность тела отлично от давления непосредственно за скачком вследствие действия центробежной силы на тонкий слой большой плотности. Влияние центробежной силы на давление на поверхность плоских и осесимметричных тел впервые учтено А. Буземаном. В работах [2,3] решение А. Буземана использовалось либо как первый член разложения в ряд по степеням малых величин ($\epsilon = (\gamma + 1) / (\gamma - 1), 1 / M_1^2$), либо как первое приближение в процессе последовательных приближений [4,5].

Во всех упомянутых работах вследствие двумерности рассмотренного течения было возможно применение функции тока, что существенно облегчило расчет. В работе [6] показано, что первые члены разложения функции тока в ряд по степеням расстояния от скачка также дают удовлетворительное приближение. Делались попытки оценки влияния центробежных сил на давление при обтекании под углом атаки тела вращения [7], однако достаточно обоснованного метода расчета, аналогичного методу А. Буземана, для тел произвольной формы нет. Попытка предложить такой метод делается в настоящей работе.

Для предельного случая слоя воздуха исчезающей толщины за головным скачком излагается способ расчета давления воздуха на поверхность тела произвольной формы. Линии тока частиц воздуха в слое за скачком определяются как траектории движения этих частиц по поверхности тела без ускорения под действием начальной скорости. Распределение линий тока по высоте слоя находится из уравнения неразрывности. При известных линиях тока вычисляется давление воздуха на поверхность тела.

1. Уравнения движения в системе криволинейных координат, связанной с головным скачком. Известно, что система поверхностей, параллельных данной поверхности S , и двух семейств развертывающихся поверхностей, образованных нормальными к поверхности S вдоль линий ее кривизны, образует тройную ортогональную систему [8]¹. Примем за поверхность S головной скачок уплотнения, за криволинейные координаты ξ , η — параметры линий кривизны, а за координату ζ — расстояние по нормали от поверхности скачка к телу.

¹ Такую систему применил В. В. Струминский для вывода уравнений пограничного слоя.

Применяя обычные обозначения: E, G — коэффициенты первой основной квадратичной формы, L, N — коэффициенты второй основной квадратичной формы, R_ξ, R_η — главные радиусы кривизны [8], для коэффициентов Лямэ будем иметь¹

$$H_\xi = \sqrt{E} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\xi}\right), \quad R_\xi = \frac{E}{L}, \quad \frac{\partial \ln H_\xi}{\partial \zeta} = \frac{1}{\zeta - R_\xi}, \quad H = 1$$

$$H_\eta = \sqrt{G} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\eta}\right), \quad R_\eta = \frac{G}{N}, \quad \frac{\partial \ln H_\eta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\zeta - R_\eta},$$

В этой системе координат уравнения Эйлера, неразрывности и изэнтропичности для идеального газа имеют вид: (1.1)

$$\frac{u}{H_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{H_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + w \frac{\partial u}{\partial \zeta} + v \left(\frac{u}{H_\eta} \frac{\partial \ln H_\xi}{\partial \eta} - \frac{v}{H_\xi} \frac{\partial \ln H_\eta}{\partial \xi} \right) + uw \frac{\partial \ln H_\xi}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\rho H_\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi}$$

$$\frac{u}{H_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{H_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + w \frac{\partial v}{\partial \zeta} - u \left(\frac{u}{H_\eta} \frac{\partial \ln H_\xi}{\partial \eta} - \frac{v}{H_\xi} \frac{\partial \ln H_\eta}{\partial \xi} \right) + vw \frac{\partial \ln H_\eta}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\rho H_\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

$$\frac{u}{H_\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{v}{H_\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} + w \frac{\partial w}{\partial \zeta} - u^2 \frac{\partial \ln H_\xi}{\partial \zeta} - v^2 \frac{\partial \ln H_\eta}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial \rho u H}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho v H_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho w H_\xi H_\eta}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{u}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + w \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Здесь u, v, w — составляющие скорости в направлении координатных линий. Система уравнений (1.1) представляет собой систему пяти квазилинейных уравнений с пятью неизвестными u, v, w, p, ρ . Из этих пяти уравнений по данным непосредственно за скачком можно определить пять первых производных по ζ при $\zeta = 0$, производные $\partial u / \partial \zeta, \partial v / \partial \zeta$ вычисляются непосредственно из первых двух уравнений (1.1), а определитель остальных трех уравнений, из которых определяются производные от w, p и ρ по ζ :

$$\begin{vmatrix} w & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \rho & 0 & w \\ 0 & w\rho^{-\gamma} & -\gamma\rho w\rho^{-(\gamma+1)} \end{vmatrix} = \frac{w}{\rho^\gamma} \left(\gamma \frac{p}{\rho} - w^2 \right)$$

обращается в нуль только, когда скачок вырождается в слабую волну. Следующие производные по ζ можно найти, дифференцируя уравнения (1.1) по ζ , причем определитель последних трех уравнений тот же.

2. Скорость, плотность и давление непосредственно за головным скачком уплотнения. Нормальная составляющая скорости w_2 , плотность ρ_2 и давление воздуха p_2 непосредственно за скачком уплотнения выражаются через нормальную составляющую скорости w_1 , плотность ρ_1 и давление воздуха p_1 — перед скачком следующим образом:

$$w_2 = w_1 \left(\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{w_1^2} a_1^2 \right), \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{a_1^2}{w_1^2} \quad (2.1)$$

$$p_2 = (1 - \varepsilon) \rho_1 w_1^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{a_1^2}{w_1^2} \right) \quad (a_1 \text{ — скорость звука})$$

¹ Индекс обозначает величину, изменяющуюся вдоль координатной линии.

Замечание. Если за скачком можно считать теплосодержание

$$i_2 = \frac{\gamma_2 p_2}{\gamma_2 - 1 \rho_2}$$

но вследствие высокой температуры $\gamma_2 \neq \gamma_1$, то

$$w_2 = \frac{w_1 \gamma_2}{\gamma_2 + 1} \left[1 + \frac{a_1^2}{\gamma_1 w_1^2} - \left(\frac{1}{\gamma_1^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{w_1^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \right) \left[1 + \frac{2a_1^2}{(\gamma_1 - 1)w_1^2} \right] \right)^{1/2} \right]$$

и при $\gamma_2 \rightarrow 1$ [скорость за скачком $w_2 \rightarrow 0$ независимо от w_1 / a_1].

Предположим, что вектор скорости невозмущенного потока V (перед скачком) [расположен в плоскости xy и составляет угол α с осью x , тогда проекция скорости в системе криволинейных координат будет

$$w_1 = \frac{V}{V EG} \left[\cos \alpha \frac{\partial(y, z)}{\partial(\xi, \eta)} + \sin \alpha \frac{\partial(z, x)}{\partial(\xi, \eta)} \right] \quad (2.2)$$

$$u_1 = u_2 = \frac{V}{V E} \left(\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial \xi} + \sin \alpha \frac{\partial y}{\partial \xi} \right), \quad v_1 = v_2 = \frac{V}{V G} \left(\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial \eta} + \sin \alpha \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$$

Для того чтобы было возможно ввести функцию тока, одна из производных в уравнении неразрывности (четвертое уравнение 1.1), например $\partial \rho v H_\xi / \partial \eta$, должна равняться нулю, в частности, непосредственно за скачком. Это возможно только в том случае, когда все производные координат x, y, z по ξ и η на скачке зависят только от ξ или же в случае $\cos \alpha \partial x / \partial \eta + \sin \alpha \partial y / \partial \eta = 0$ на скачке.

В первом случае скачок имеет форму цилиндрической поверхности и линии η являются прямыми, во втором случае скачок имеет форму осесимметричной или винтовой поверхности, а линии η являются либо окружностями, либо прямыми. Указанными формами скачков исчерпываются случаи, когда может быть введена функция тока.

3. Приближенные уравнения для случая «сильного» скачка. Уравнения (1.1) существенно упрощаются в том случае, когда плотность воздуха за скачком уплотнения значительно больше плотности воздуха в невозмущенном потоке (в пределе $(\rho_2 / \rho_1) \rightarrow \infty$). Это имеет место, если $\epsilon \rightarrow 0$ и $a_1^2 / w_1^2 \rightarrow 0$, т. е. при числе $M_1 \rightarrow \infty$ и угле между нормалью к поверхности скачка и вектором скорости V , не стремящемся к $1/2\pi$ (не исчезающей толщине тела). Этому случаю соответствует критерий подобия при сверхзвуковых скоростях $K \rightarrow \infty$. При указанных условиях можно предположить, что величины в слое за скачком имеют такой же порядок, как и непосредственно за скачком, а именно,

$$w = \epsilon V w', \quad u = V u', \quad v = V v', \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\epsilon}{\rho'} \quad p = \rho_1 V^2 p'$$

Здесь ϵ — малая величина, w', u', v', p', ρ' — величины порядка единицы. Координата ζ [имеет порядок малой величины ϵ по сравнению с двумя другими координатами. Исключение [в уравнениях (1.1) малых величин порядка ϵ и более высокого по сравнению с величинами порядка единицы дает следующие упрощенные уравнения:

$$\frac{u}{V E} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{V G} \frac{\partial u}{\partial \eta} + w \frac{\partial u}{\partial \zeta} + v \left(\frac{u}{V G} \frac{\partial \ln V E}{\partial \eta} - \frac{v}{V E} \frac{\partial \ln V G}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{u}{V E} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{V G} \frac{\partial v}{\partial \eta} + w \frac{\partial v}{\partial \zeta} - u \left(\frac{u}{V G} \frac{\partial \ln V E}{\partial \eta} - \frac{v}{V E} \frac{\partial \ln V G}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{u^2}{R_\xi} + \frac{v^2}{R_\eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho u \sqrt{G}}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho v \sqrt{E}}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho w \sqrt{GE}}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{u}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + w \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Умножая первое уравнение на u , второе на v и складывая, имеем

$$\frac{u}{\sqrt{E}} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial \eta} + w \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.6)$$

т. е. проекция скорости на касательную плоскость к скачку вдоль линии тока не меняется. Таким образом, в случае большой плотности воздуха за скачком и ограниченной величины давления, воздух в тонком слое между скачком и телом движется по инерции без ускорения в касательной плоскости, а нормальная к поверхности скачка (тела) составляющая ускорения уравнивается градиентом давления по нормали к поверхности скачка. Обозначим через $\operatorname{tg} \theta = u/v$, $q = \sqrt{u^2 + v^2}$; тогда вместо уравнений (3.1)—(3.5), учитывая (3.6), получим

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{w}{q} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial \eta} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial \xi} \quad (3.7)$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{R_\xi} + \frac{\sin^2 \theta}{R_\eta} = -\frac{1}{\rho q^2} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad (3.8)$$

$$\sqrt{EG} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\rho w}{q} \right) + \frac{\partial \rho \cos \theta \sqrt{G}}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho \sin \theta \sqrt{E}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{w}{q} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Принятые выше предположения о малой толщине слоя за скачком и большой плотности воздуха в нем допустимы до тех пор, пока давление на поверхности тела не станет [малым ($p \approx 0$) и соответственно не уменьшится плотность воздуха, а скачок не отойдет от тела. При таких условиях возмущения уже становятся малыми и в уравнениях движения нельзя отбрасывать величины порядка ϵ . Учет порядка членов в уравнениях движения в случае [малых возмущений ($K > 0$, но $K \neq \infty$), приводит к некоторому упрощению [1], однако применение системы координат, связанных со скачком, в этом случае нецелесообразно¹.

4. Приближенное решение. Одним из способов расчета течения за скачком является применение рядов по степеням ζ , коэффициенты которых вычисляются из уравнений (1.1)—(1.5) или (3.1)—(3.5).

Корректность таких вычислений (сходимость рядов), в частности для области дозвукового течения перед притупленной головной частью тела, требует исследования, однако результаты достаточно строгих вычислений [9] для тела вращения ($M = 5.8$) показывают, что в дозвуковой

¹ Интересно то обстоятельство, что в случае тонкого крыла, плоскость которого совпадает с плоскостью xz , уравнения движения с малыми возмущениями приводятся к уравнениям нестационарного движения поршня для каждого сечения плоскостью, параллельной плоскости xy .

области изменение составляющих скорости с изменением ζ , по-видимому может быть удовлетворительно описано первыми членами рядов [6]. Для давления и плотности лучше пользоваться уравнением Бернулли

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{1 + \varepsilon p}{2\varepsilon \rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{1 + \varepsilon p_1}{2\varepsilon \rho_1}$$

С целью подтверждения высказанного предположения приведем результаты вычисления расстояния скачка от критической точки (Δ) притупленного осесимметричного тела при помощи рядов. Из уравнений (3.1)—(3.5) получаем на продолжении оси тела за скачком

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_2 = -\frac{2V}{R_c}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_2 = \frac{V^2}{w_2 R_c^2}$$

Здесь R_c — радиус кривизны скачка. Следовательно,

$$w = w_2 - \frac{2V\xi}{R_c} + \frac{V^2\xi^2}{2w_2 R_c^2} + \dots$$

В критической точке тела $w = 0$, отсюда для расстояния скачка от критической точки получаем

$$\Delta = (2 - \sqrt{2}) \frac{w_2}{V} R_c, \quad \frac{\Delta}{R_c} = (2 - \sqrt{2})\varepsilon \quad \text{при } M_1 \rightarrow \infty$$

Значение Δ при $M_1 \rightarrow \infty$ оказалось близким к значению, вычисленному методом [6]. В случае тела произвольной формы применение рядов приведет к сложным вычислениям; мы здесь применим другой прием расчета, пригодный для решения системы уравнений (3.7)—(3.10) при задании нормальной составляющей скорости, плотности и давления на скачке, в соответствии с уравнениями (2.1)—(2.3) ($\varepsilon \neq 0$, $1/M_1^2 \neq 0$).

Считая слой воздуха между скачком и телом весьма тонким, допустим, что траектории всех частиц воздуха располагаются на поверхности скачка; тогда вместо (3.7) получим

$$\frac{\cos \theta}{V\bar{E}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\sin \theta}{V\bar{G}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\cos \theta}{V\bar{G}} \frac{\partial \ln V\bar{E}}{\partial \eta} - \frac{\sin \theta}{V\bar{E}} \frac{\partial \ln V\bar{G}}{\partial \xi} \quad (4.1)$$

Такое допущение может вызвать заметные погрешности только в окрестности критической точки притупленного тела. Если уравнение линии тока $\eta = \eta(\xi)$, то $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{G/E} d\eta/d\xi$, а левая часть уравнения (4.1) есть не что иное, как производная угла θ по длине дуги линии тока, т. е. $(\partial \theta / \partial \xi) \cos \theta / \sqrt{E}$. Следовательно, вместо (4.1) имеем

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{V\bar{G}} \left(\frac{\partial V\bar{E}}{\partial \eta} - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial V\bar{G}}{\partial \xi} \right) \quad (4.2)$$

Из этого уравнения получаем обыкновенное нелинейное уравнение второго порядка для определения линии тока: (4.3)

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial \xi} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^3 + \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \left(\frac{V\bar{G}}{E} \right) \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left(\frac{G}{V\bar{E}} \right) \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial \eta} = 0$$

Имея проекции линий тока на поверхность скачка уплотнения, теперь надо распределить их по высоте слоя так, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности.

Линии тока, пересекающие нормаль к поверхности скачка в точке (ξ, η) , проходят через некоторую линию L на поверхности скачка. Возьмем на поверхности скачка площадку, образованную элементами линии $L (d\tau_2)$ и нормали к ней (dn_2) в точке (ξ_2, η_2) . Уравнение неразрывности для струйки тока, проходящей через эту площадку, будет:

$\rho_1 w_1 d\sigma_2 dn_2 = \rho q d\zeta dn$, где dn — расстояние между линиями тока, образующими струйку (проходящими через концы отрезка dn_2).

Пусть уравнение линии тока дано в виде $\eta = \eta(\xi_2, \eta_2; \xi)$. Приращение координаты η при изменении параметров ξ_2, η_2 и перемещении вдоль линии тока должно быть равно приращению координаты η при перемещении вдоль нормали к линии тока в точке (ξ, η) :

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \eta_2} d\eta_2 + \frac{d\eta}{d\xi} d\xi = -\sqrt{\frac{E}{G}} \operatorname{ctg} \theta d\xi.$$

Отсюда

$$d\xi = -\frac{\frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \eta_2} d\eta_2}{\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{E}{G}} \operatorname{ctg} \theta} = -\sqrt{\frac{G}{E}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \eta_2} d\eta_2 \right) \cos \theta \sin \theta$$

Приращения параметров ξ_2, η_2 найдем через величину dn_2 , получим

$$-\sqrt{E_2} d\xi_2 = dn_2 \sin \gamma_2, \quad \sqrt{G_2} d\eta_2 = dn_2 \cos \gamma_2$$

где γ_2 — угол между касательными к линии L и координатой линии ξ в точке (ξ_2, η_2) . Так как $d\xi = -(1/\sqrt{E}) \sin \theta dn$, то

$$dn = dn_2 \cos \theta \sqrt{G} \left(\frac{\cos \gamma_2}{\sqrt{G_2}} \frac{\partial \eta}{\partial \eta_2} - \frac{\sin \gamma_2}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} \right) = m(\sigma_2) dn_2$$

Подставляя это выражение в уравнение неразрывности, получим

$$d\zeta = \frac{\rho_1 w_1 d\sigma_2}{\rho q m(\sigma_2)} \quad (4.4)$$

Теперь можно заменить в (3.8) переменную интегрирования ζ на σ_2 :

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_2} = -\frac{\rho_1 w_1 q}{m(\sigma_2)} \left(\frac{\cos^2 \theta}{R_\xi} + \frac{\sin^2 \theta}{R_\eta} \right) \quad (4.5)$$

Входящие в (4.5) величины зависят от координат точки (ξ, η) , как от параметров, и от координат точки (ξ_2, η_2) на линии L , вдоль которой производится интегрирование. Интегрирование (4.5) может быть выполнено, начиная от точки (ξ, η) на поверхности скачка [до любой точки на линии L , [а затем из (4.4) может быть [определена соответствующая координата ζ , в том числе и координата точки на поверхности тела. Формула (4.5) является обобщением формулы Буземана для тела произвольной формы.

Поступила 20 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М., Б у н и м о в и ч А. И., М и х а й л о в а М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Сб. статей «Теоретическая гидромеханика», № 4, 1949.
2. Ч е р н ы й Г. Г. Обтекание тел газом при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, т. CVII, № 2, 1956.
3. C o l e J. D. Newtonian flow theory for slender bodies. JAS, vol. 24, No. 6, 1957.
4. C h e s t e r W. Supersonic flow past a bluff body with a detached shock. Pt 1. Two-dimensional body. JFM, vol. 1, p. 4, 1956, Pt 2. Axisymmetrical body. JFM, vol. 1, p. 5, 1956.
5. F r e e m a n N. C. On the theory of hypersonic flow past plane and axially symmetric bluff bodies. JFM, vol. 1, p. 4, 1956.
6. V a n D y k e M. D. A model of supersonic flow past blunt axisymmetric bodies with application to Chester solution. JFM, vol. 3, p. 5, 1958.
7. G r i m m i n g e r G., W i l l i a m s E. P., Y o u n g G. B. W. Lift on inclined bodies of revolution in hypersonic flow. JAS, vol. 17, No. 11, 1950.
8. Г у р с а Э. Курс математического анализа, т. I, ч. 2. ГТТИ, 1933.
9. G a r a b e d i a n P. R., L i e b e r s t e i n H. M. On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow. JAS, vol. 25, No. 2, 1958.