

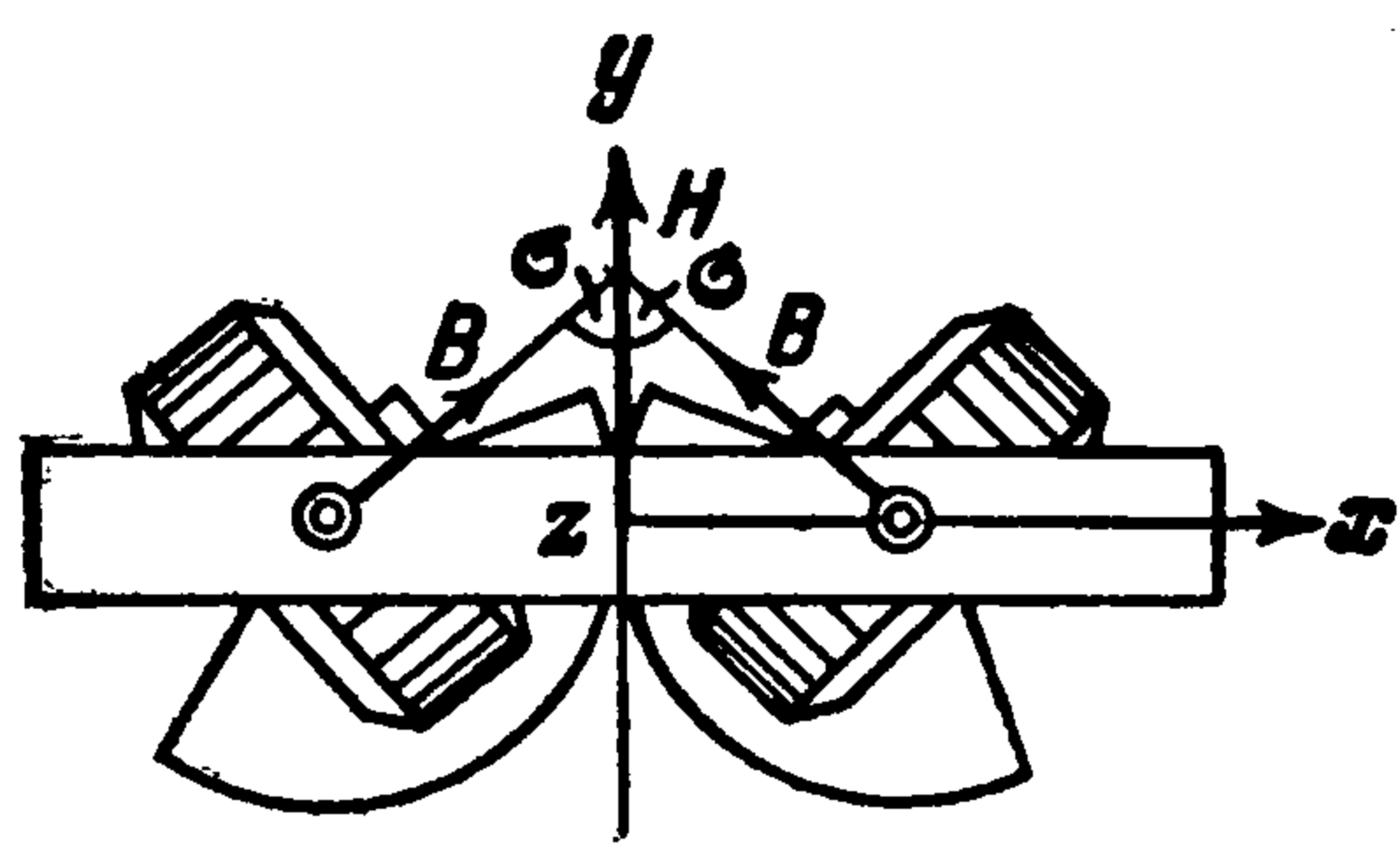
## ОБ АВТОНОМНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА ПОСРЕДСТВОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА, ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ И ИНТЕГРИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

А. Ю. Ишлинский

(Москва)

В статье [1] было рассмотрено теоретическое решение задачи об определении местоположения движущегося объекта посредством гироскопов, измерителей ускорения и интегрирующих устройств. Указанная там схема сочетания перечисленных элементов может подвергаться различным модификациям путем объединения функций отдельных ее частей в более сложных гироскопических системах. Ниже рассматривается один из подобных вариантов несколько иного решения упомянутой задачи. В нем используются свойства пространственного гироскопического компаса Геккелера, точная теория которого изложена в работе [2]<sup>1</sup>. Такой вариант решения задачи об автономном определении координат движущегося по земной сфере объекта требует для своего осуществления еще наличия гироскопа направления и устройства, интегрирующего совокупность трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Заметим, что математическая сторона вопроса остается при этом в общем почти такой же, как и в работе [1], и по структуре уравнений и по трудности их интегрирования.

1°. Приведем прежде всего основные свойства двухгироскопического чувствительного элемента<sup>2</sup> пространственного гироскопа (фиг. 1). Примем поверхность Земли за сферу, а поле ее тяготения будем считать



Фиг. 1

центральным. Тогда при соблюдении определенных начальных условий, касающихся ориентации чувствительного элемента и величины угла  $2\sigma$  между осями собственного вращения роторов гироскопов, прямая, соединяющая точку подвеса чувствительного элемента с его центром тяжести, постоянно проходит через центр земной сферы, по какому бы закону не перемещалась точка подвеса, оставаясь, однако, на ее поверхности<sup>3</sup>.

Далее, вектор суммы собственных [кинетических моментов гироскопов чувствительного элемента  $H$  остается все время перпендикулярным к вектору скорости точки подвеса в ее движении относительно невращающейся

<sup>1</sup> Следует упомянуть работу [3], где посредством сложной гироскопической системы, содержащей также и гироскопас, при помощи измерений гироскопических реакций решается по существу та же задача.

<sup>2</sup> А также чувствительный элемент двухгироскопической вертикали, описанной в [4].

сферы  $S$  с тем же центром и радиусом, что и земная сфера<sup>1</sup>. Наконец, величина этой скорости  $v$  оказывается связанной с половиной угла между осями собственного вращения роторов гироскопов чувствительного элемента пространственного компаса  $I$  соотношением

$$2B \cos \sigma = mav \quad (1)$$

где  $B$  — значение собственного кинетического момента каждого из гироскопов,  $m$  — масса всего чувствительного элемента и  $a$  — расстояние между его центром тяжести и точкой подвеса<sup>2</sup>.

2°. Из перечисленных свойств пространственного гироскопического компаса между прочим следует, что при неподвижной, относительно земной сферы, точке подвеса чувствительного элемента вектор суммы собственных кинетических моментов его гироскопов  $H$  строго направлен на север.

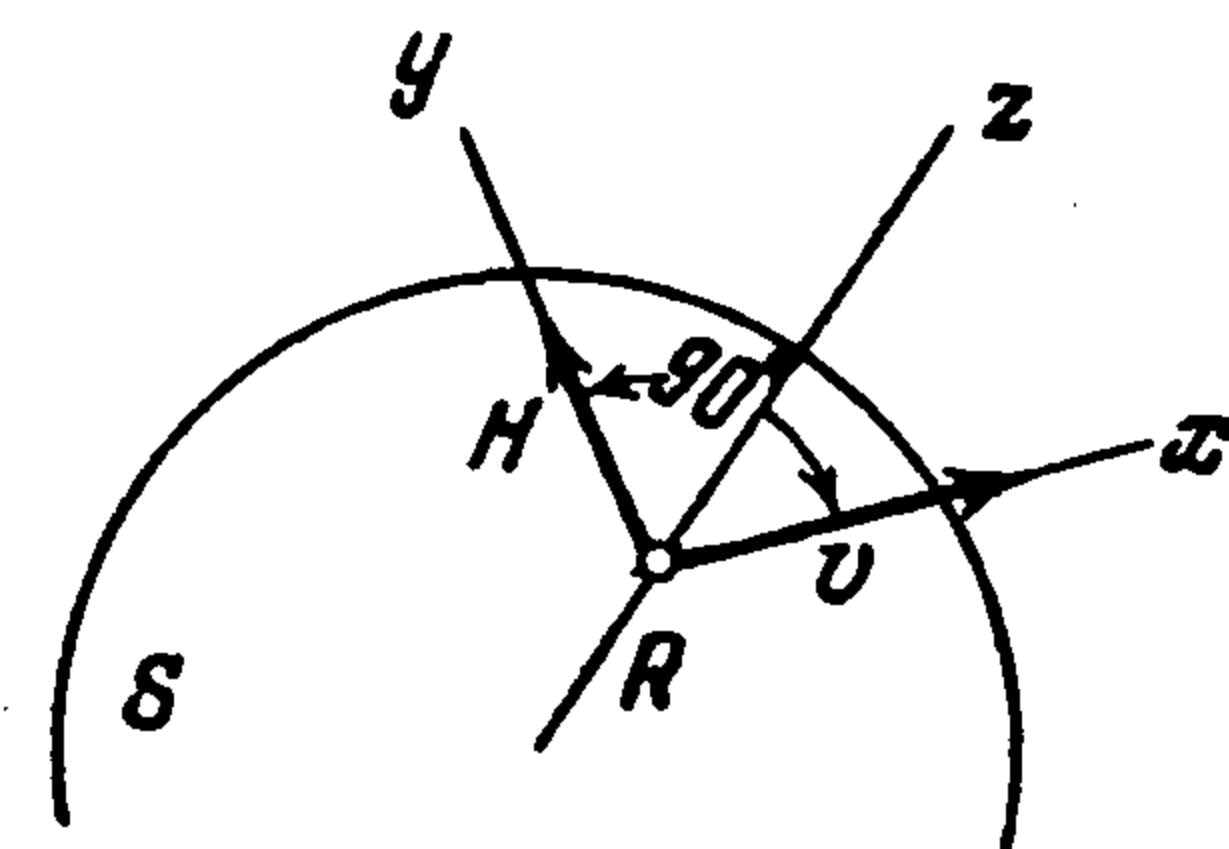
Учитывая, что в данном случае

$$v = RU \cos \varphi \quad (2)$$

где  $\varphi$  — геоцентрическая широта места,  $R$  — радиус земной сферы и  $U$  — угловая скорость Земли, можно по углу  $2\sigma$  между осями собственного вращения гироскопов, используя формулу (1), определить геоцентрическую широту  $\varphi$ .

Однако, если точка подвеса движется, то, пользуясь одним лишь гироскопом, определить направление меридиана и широту места невозможно; необходимо знать еще величину и направление скорости точки подвеса чувствительного элемента относительно земной сферы.

3°. Перейдем теперь к теоретическому рассмотрению упомянутого в начале настоящей статьи нового варианта решения проблемы об определении местоположения движущегося объекта. Свяжем с чувствительным элементом пространственного гироскопического компаса правую систему координат  $xuz$  с началом в точке его подвеса. Направим ось  $y$  этой системы координат по вектору суммы собственных кинетических моментов гироскопов  $H$ , а ось  $z$  — по прямой (фиг. 2), соединяющей центр тяжести чувствительного элемента с точкой его подвеса; направление оси  $x$  определится тем самым однозначно.



Фиг. 2

В соответствии с приведенными выше свойствами пространственного гироскопа ось  $x$  постоянно будет направлена по вектору  $v$  скорости

<sup>1</sup> Введение такой сферы, как бы «невращающейся Земли» представляет значительные удобства при изложении ряда вопросов теории гироскопов [см. 1, 2, 4–6].

<sup>2</sup> Можно показать, что точно такими же свойствами обладает любое аналогичное двухгироскопическое устройство с иным расположением центра тяжести, чем в работах [2, 4]. При этом необходимо, чтобы: 1) центр тяжести его чувствительного элемента находился в плоскости, перпендикулярной к вектору суммарного собственного кинетического момента гироскопов и содержащей точку подвеса; 2) расстояние  $a$  от точки подвеса до центра тяжести должно быть таким же, как и в пространственном гироскопе Геккелера [2] или двухгироскопической вертикали [4].

точки подвеса относительно невращающейся сферы  $S$ , а ось  $z$  — по радиусу этой сферы или, что то же, по радиусу сферы Земли<sup>1</sup>.

Обозначим через  $\omega$  угловую скорость чувствительного элемента и, следовательно, системы координат  $xuz$  относительно невращающейся сферы  $S$  или, что то же, относительно некоей системы координат  $\xi^*\eta^*\zeta^*$  с осями, ориентированными по неподвижным звездам.

Как нетрудно видеть (фиг. 2), проекции угловой скорости  $\omega$  на оси  $xuz$  представляются соответственно выражениями

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{v}{R}, \quad \omega_z = \frac{v}{\rho_g} = \Omega(t) \quad (3)$$

Согласно этим выражениям проекция угловой скорости  $\omega_x$  известна; она равна нулю. Проекцию  $\omega_y$  можно также считать известной: для этой цели следует только непрерывно передавать информацию о значении угла  $2\sigma$  между осями собственного вращения чувствительного элемента и воспользоваться соотношением (1).

Что же касается вертикальной (точнее, радиальной) составляющей угловой скорости чувствительного элемента  $\omega_z$ , то она зависит также и от геодезического радиуса кривизны<sup>2</sup> траектории движения точки подвеса по невращающейся сфере  $S$  и, следовательно, является неизвестной функцией времени  $\Omega(t)$ .

4°. Введем так называемый географический трехгранник  $\xi\eta\zeta$  с вершиной в точке подвеса чувствительного элемента гирокомпаса.

Ребро  $\zeta$  этого трехгранника направим по радиусу земной сферы, ребро  $\eta$  — по касательной к меридиану места на север и ребро  $\xi$  — по касательной к параллели на восток.

Проекции угловой скорости  $u$  географического трехгранника относительно поступательно перемещающейся системы координат  $\xi^*\eta^*\zeta^*$  на его собственные ребра  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  выражаются известными формулами [7]

$$u_\xi = -\frac{V_N}{R}, \quad u_\eta = \frac{V_E}{R} + U \cos \varphi, \quad u_\zeta = \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi + U \sin \varphi \quad (4)$$

Здесь  $\varphi$  — широта места<sup>3</sup>,  $V_N$  и  $V_E$  — соответственно северная и восточная составляющие скорости точки подвеса чувствительного элемента относительно земной сферы.

Если воспользоваться [7] равенствами

$$V_N = \frac{d\varphi}{dt}, \quad V_E = R \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \quad (5)$$

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что направление вертикали места (линии отвеса) совпадает с радиусом Земли лишь в точках ее экватора и на полюсах (отклонение достигает 7' на широте 45°). Таким образом, плоскость  $xu$  в общем случае не является горизонтальной в обычном смысле этого слова. Ее можно назвать плоскостью геоцентрического горизонта.

<sup>2</sup> Геодезическая кривизна в данной точке кривой, расположенной на поверхности, равна кривизне в той же точке проекции этой кривой на плоскость, касающуюся в данной точке поверхности.

<sup>3</sup> Широта  $\varphi$  является здесь геоцентрической широтой данного места. Она отличается от географической на величину угла отклонения линии отвеса от радиуса Земли в силу вращения последней.

то формулы (4) преобразуются к виду

$$u_{\xi} = -\frac{d\varphi}{dt}, \quad u_{\eta} = \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right) \cos \varphi, \quad u_{\zeta} = \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right) \sin \varphi \quad (6)$$

где  $\lambda$  — долгота места.

5°. Обозначим через  $\vartheta$  угол между осью  $x$  системы координат  $xyz$ , связанной с чувствительным элементом пространственного гирокомпаса и ребром  $\xi$  географического трехгранника  $\xi\eta\zeta$ . Нетрудно заметить, что с точностью до знака угол  $\vartheta$  является углом так называемой скоростной девиации гирокомпаса [7]. Очевидно (фиг. 3), что

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{V_N}{RU \cos \varphi + V_E} \quad (7)$$

Заметим, что угол  $\vartheta$  не может быть определен посредством одного только гирокомпаса, что собственно уже отмечалось в п. 2°. Вместо формулы (7) для определения угла  $\vartheta$  может быть предложена следующая формула, более удобная для практического использования:

$$\sin \vartheta = \frac{V_y}{RU \cos \varphi} \quad (8)$$

Здесь  $V_y$  — проекция скорости  $V$  на направление вектора кинетического момента  $H$  (ось  $y$ ). В морском деле для этой цели необходимы лаг и знание карты морских течений.

6°. Для дальнейшего существенно, что угловая скорость  $u$  географического трехгранника относительно невращающейся сферы  $S$  отличается от угловой скорости  $\omega$  системы координат  $xyz$ , связанной с чувствительным элементом пространственного гирокомпаса лишь составляющей вдоль ребра  $\zeta$  (или, что то же, оси  $z$ ). Именно (фиг. 3)

$$\omega_z = u_z + \frac{d\vartheta}{dt} \quad (9)$$

В силу сделанного замечания имеют место соотношения

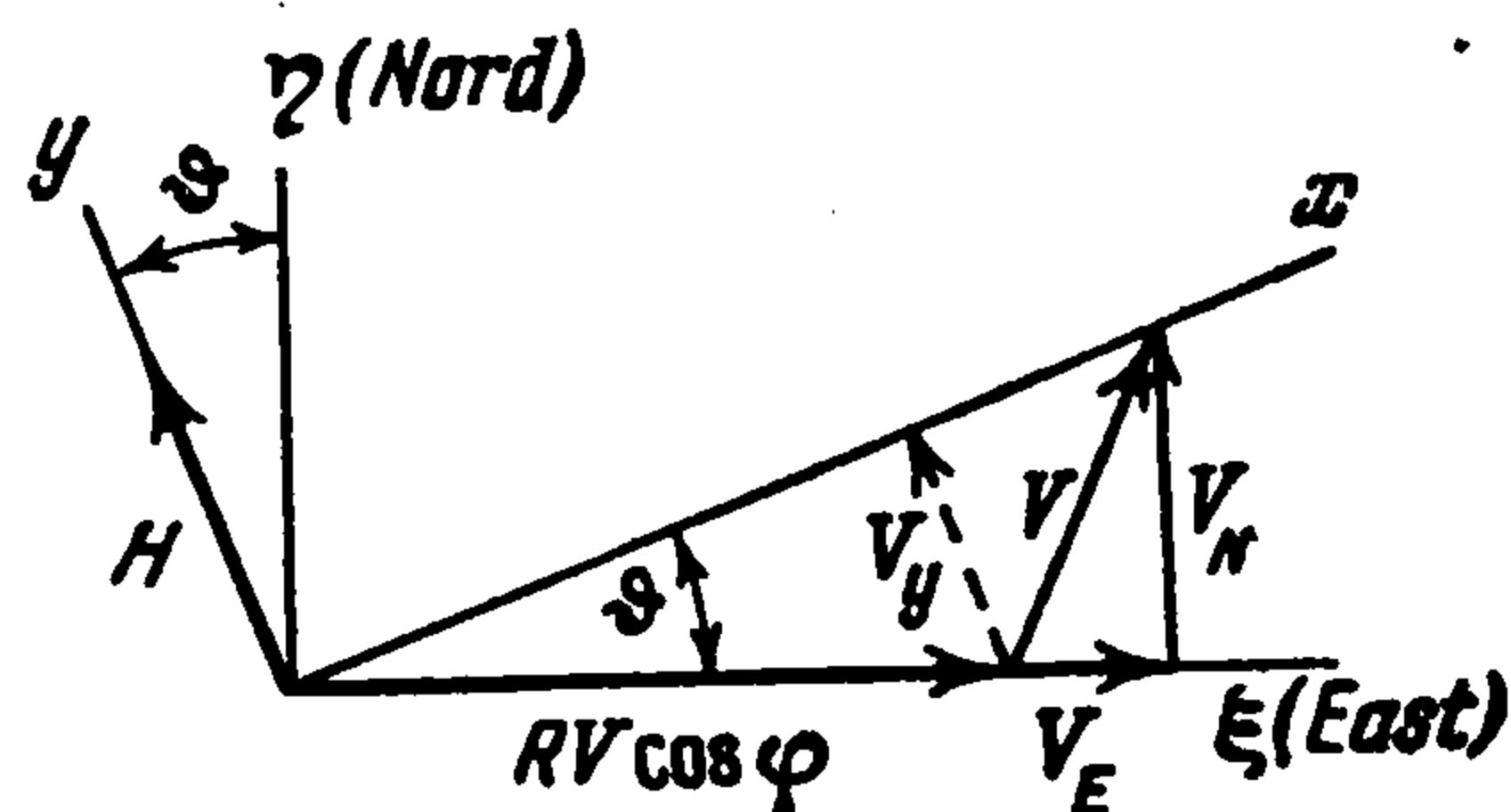
$$u_{\xi} = \omega_x \cos \vartheta - \omega_y \sin \vartheta, \quad u_{\eta} = \omega_x \sin \vartheta + \omega_y \cos \vartheta, \quad u_{\zeta} = \omega_z - \frac{d\vartheta}{dt} \quad (10)$$

Используя теперь формулы (3) и (6), получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} \sin \vartheta, \quad \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right) \cos \varphi = \frac{v}{R} \cos \vartheta, \quad \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right) \sin \varphi = \Omega(t) - \frac{d\vartheta}{dt} \quad (11)$$

Если бы  $\Omega(t)$  была известной функцией времени, то соотношения (11) представляли бы собой совокупность трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех искомых функций  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\vartheta$ .

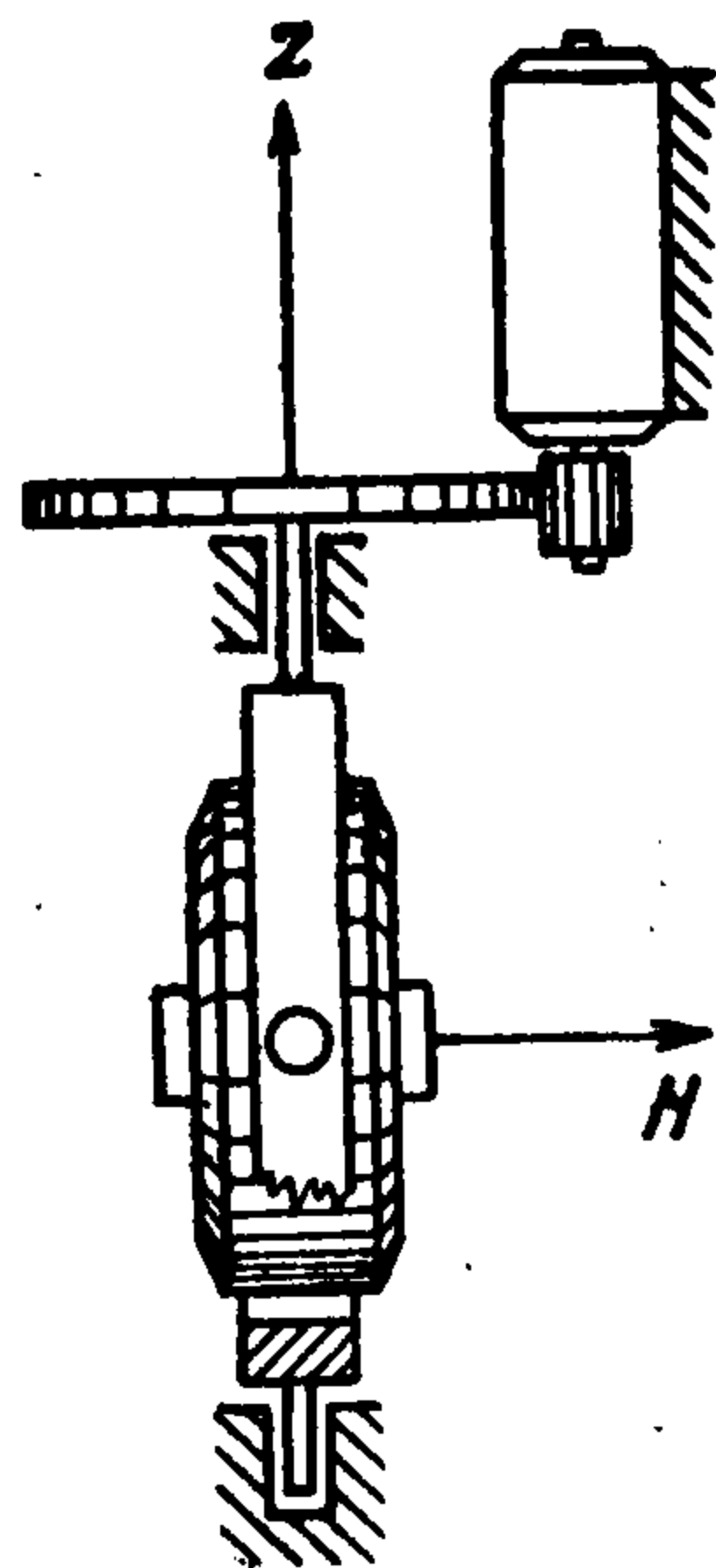
7°. Для определения функции  $\Omega(t)$  необходимо наличие гироскопа направления (фиг. 4) или какого-либо другого, например двухгироскопного гироазимута (фиг. 5). Можно воспользоваться текущим значением угла  $\alpha$  между осью  $x$ , связанной с чувствительным элементом, и нормалью  $\nu$  к плоскости внешнего кольца гироскопа направления (фиг. 6).



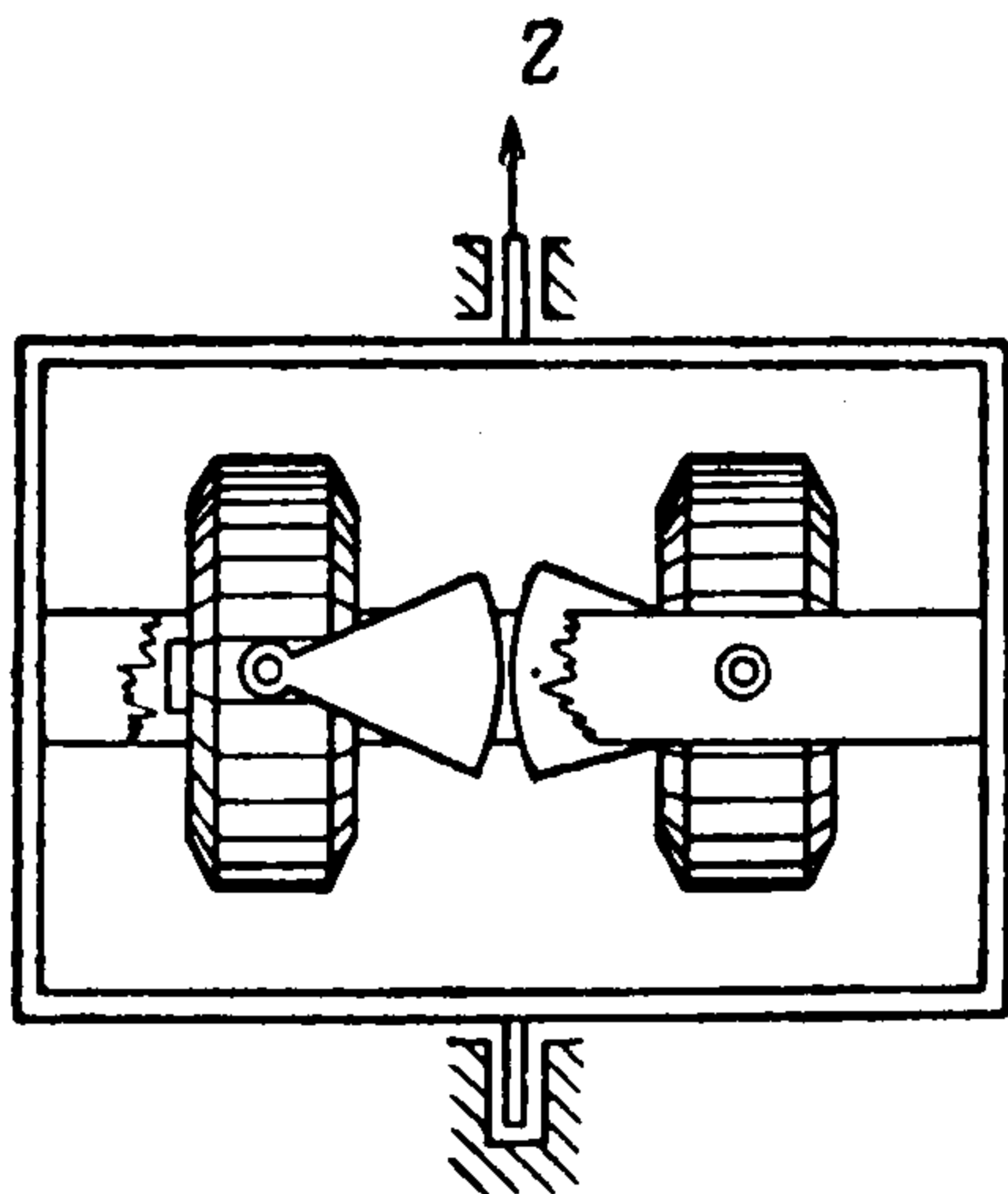
Фиг. 3

При отсутствии трения в оси кожуха гироскопа направления и при равенстве нулю момента разбалансировки системы кожух — ротор вокруг той же оси проекция угловой скорости внешнего кольца подвеса гироскопа на ось этого кольца равна нулю, как бы не перемещалось основание гироскопа направления.

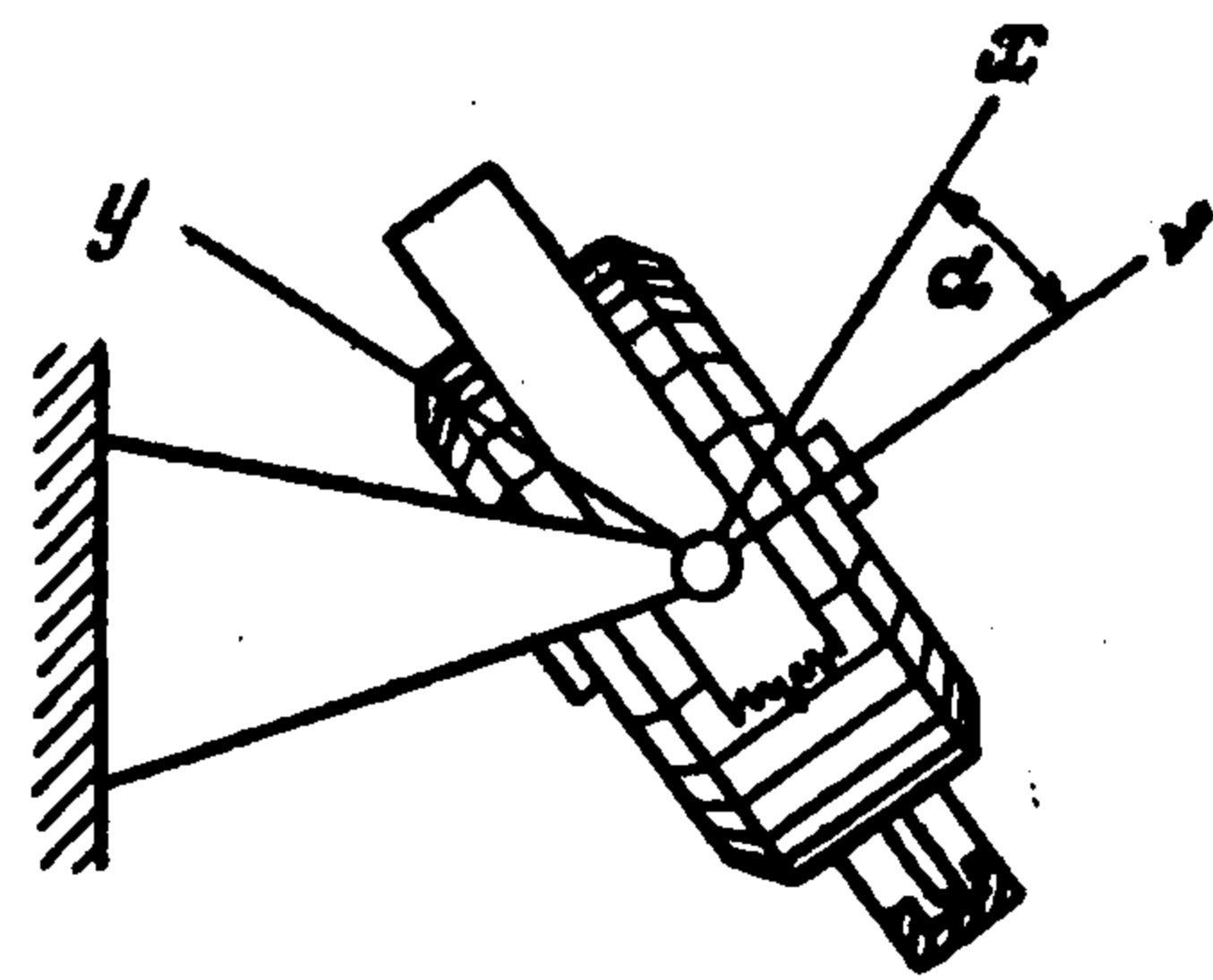
В отличие от свободного гироскопа ось собственного вращения гироскопа направления посредством специально создаваемого момента вокруг оси внешнего кольца непрерывно приводится в плоскость, перпендикуляр-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

ную плоскости внешнего кольца. Для нашей цели ось внешнего кольца гироскопа направления должна совпадать с радиусом Земли, на котором находится точка подвеса чувствительного элемента пространственного гироскопа. Это можно осуществить при помощи специальных следящих систем, связывающих чувствительный элемент пространственного гироскопа с основанием гироскопа направления. В таком случае угловая скорость чувствительного элемента будет отличаться от угловой скорости внешнего кольца гироскопа направления лишь на составляющую вдоль оси  $z$ , т. е. вдоль радиуса Земли. В результате немедленно получаем, что

$$\omega_z = \Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} \quad (12)$$

и функция  $\Omega(t) = \omega_z$  оказывается известной.

8°. Несколько преобразуя совокупность дифференциальных уравнений (11), можно представить их теперь в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{v}{R} \cos \vartheta \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{v \cos \vartheta}{R \cos \varphi} - U \quad (13)$$

разрешенном относительно производных искомых функций  $\varphi$ ,  $\vartheta$  и  $\lambda$ .

Первые два дифференциальных уравнения этой совокупности интегрируются независимо от третьего, и, следовательно, при учете начального значения функций  $\varphi$  и  $\vartheta$  соответствующее интегрирующее устройство будет вырабатывать непрерывно широту места и скоростную поправку к гироскопу, давая тем самым возможность получить направление меридиана места без знания скорости движения точки подвеса относительно земной сферы.

Если  $\varphi$  и  $\vartheta$  уже найдены, то последнее из уравнений (13) после простой квадратуры дает возможность определить долготу места  $\lambda$  (также при учете ее начального значения).

Тем самым поставленная задача об автономном определении координат движущегося объекта оказывается решенной.

9°. Следует остановиться на случае, когда начальные условия, при соблюдении которых пространственный гироскопас следует законам, изложенным в 1°, соблюдены не совсем точно. Тогда, как было показано [2], чувствительный элемент гироскопического компаса будет совершать малые колебания относительно осей естественного трехгранника Дарбу  $x^\circ y^\circ z^\circ$ , связанного со сферической траекторией точки подвеса. Ребро  $x^\circ$  этого трехгранника направлено по скорости  $v$  точки подвеса относительно невращающейся сферы  $S$ , ребро  $z^\circ$  — по радиусу Земли; положение ребра  $y^\circ$  определяется тем самым полностью.

Кроме того, угол  $2\varepsilon$  между осями собственного вращения гироскопов чувствительного элемента также будет совершать малые колебания около значения  $2\sigma$ , определяемого равенством (1). Все эти колебания с большой точностью могут быть представлены посредством суперпозиции двух простых гармонических колебаний с частотами, отличающимися от так называемой частоты Шуллера  $\sqrt{g/R} = 0.00124065 \text{ сек}^{-1}$ , в большую и меньшую сторону, на величину вертикальной составляющей угловой скорости Земли, т. е.  $U \sin \varphi$  (отличие от Геккелера [8], ошибочно предполагавшего эти частоты равными частоте Шуллера).

Можно показать, что колебание оси  $z$ , связанной с чувствительным элементом пространственного гироскопа, оказывает малое влияние на искажения угла  $\alpha$ . Однако вращательные колебания чувствительного элемента вокруг оси  $z$  сказываются на значении угла  $\alpha$  в полной мере.

Таким образом, на интегрирующие устройства будут теперь вводиться не истинные значения  $\Omega(t)$  и  $v$ , а данные, определяемые фактическим углом разведения гироскопов, пространственного гироскопа в соответствии с формулой (1), и текущий угол между компасом и гироазимутом. Оценка возникающих при этом ошибок в определении координат места движущегося объекта посредством интегрирования уравнений (10) представляет для практики важную задачу, которая может стать предметом отдельного исследования.

Поступила 5 IX 1958

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И ш л и н с к и й А. Ю. Определение местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.
2. И ш л и н с к и й А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
3. F o x Charles. The mechanical determination of position and velocity on the earth's surface. Proceedings of the cambridge philosophical society, vol. 45, pt. 2, 1948.
4. И ш л и н с к и й А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
5. И ш л и н с к и й А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
6. И ш л и н с к и й А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
7. Б у л г а к о в Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
8. G e c k e l e r J. W. Kreiselmeehanik des Anschütz-Raumkompasses. Ingenieur — Archiv, t. VI, B. 4, Berlin, 1935.