Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

В статье рассматриваются такие же задачи теории линейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, как и в работе [1]: граничная задача для эллиптического уравнения, задача Коши для уравнения гиперболического типа и задача о построении частного интеграла для уравнения произвольного типа. Считается, как и в [1], что граничные значения для искомой функции и ее производных (или свободный член уравнения) зависят от большого параметра k и представляют собой быстро колеблющиеся функции. В отличие от [1] предполагается, что в уравнение входит малый параметр h в коэффициенты при старших производных. Исследуется характер решения упомянутых задач и указываются различные процессы для приближенного построения этих решений в зависимости от соотношения, в котором находятся значения параметров k и h. Содержание работы [1] считается известным читателю.

Метод, на котором основана предлагаемая работа, применялся автором в монографии [2] к теории упругих тонких оболочек. Там формулировались и некоторые из излагаемых здесь результатов, однако в [2] это часто имело характер предварительных предположений. В настоящей статье, оставляя во главе угла вопросы эффективности предлагаемых методов, автор стремился по возможности уточнить условия, обеспечивающие их корректность.

§ 1. 1. Рассмотрим уравнение

$$hN(\Phi) + L(\Phi) = 0 \tag{1.1}$$

где h — малый постоянный параметр, а L и N — дифференциальные операторы порядка l и n соответственно (всюду считается, что $n > l$):

$$L = \sum_{\nu=0}^{\nu=l} \sum_{j=0}^{j=\nu} a_{j,\,\nu-j}^{(\nu)} \frac{\partial^\nu}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{\nu-j}}, \qquad N = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{j=0}^{j=\nu} b_{j,\,\nu-j}^{(\nu)} \frac{\partial^\nu}{\partial\alpha^j\,\partial\beta^{\nu-j}}$$

Пока предполагается только, что коэффициенты обоих операторов достаточно гладки. Остальные предположения относительно L и N удобно будет сформулировать ниже.

Уравнение (1.1) будем интегрировать с учетом граничных условий, зависящих от большого параметра k. Связь между k и h установим при помощи формулы

$$k = h^{-t} \tag{1.2}$$

где t — положительное число.

2. Будем искать интегралы уравнения (1.1) в виде

$$\Phi = \Phi_* e^{kf} \qquad \left(f = f_0 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\zeta-\varkappa-1} k^{-\frac{\varkappa+\lambda}{\zeta}} f_{\varkappa+\lambda},\ \Phi_* = \sum_{u=0}^{u=R_*} k^{-u}\Phi_u\right) \tag{1.3}$$

Здесь $\varkappa$, ζ — целые положительные числа, подчиняющиеся неравенству $\varkappa < \zeta$; знак Σ^* (здесь и в дальнейшем) обозначает суммирование по всем таким значениям соответствующего индекса, которые имеют вид $\sigma + \tau/\zeta$ (σ, τ — целые неотрицательные числа),

$$f_0,\ f_\varkappa,\ f_{\varkappa+1}, \ldots, f_{\zeta-1},\ \Phi_0,\ \Phi_{1/\zeta}, \ldots, \Phi_{R-1/\zeta} \tag{1.4}$$

суть функции (α, β), не зависящие от k, из которых f_0 отлично от константы, а Φ_0 отлично от тождественного нуля, Φ_R — функция (α, β, k).

В дальнейшем будем называть f_0 — главной частью функции изменяемости, $f_{\varkappa+\lambda}$ — коэффициентами разложения функции изменяемости, Φ_u ($u < R$) — коэффициентами разложения функции интенсивности, Φ_R — остаточным членом.

Число k в формулах (1.3) связано с h отношением (1.2). При фиксированном h с ростом t увеличивается скорость изменения функции Φ. В связи с этим будем называть t показателем изменяемости рассматриваемого интеграла. Наша ближайшая задача заключается в исследовании свойств интегралов вида (1.3) в зависимости от значений показателя изменяемости t.

3. Операторы L и N имеют такую же структуру, что и оператор L, рассмотренный в статье [1]. Для L и N остается в силе формула (1.9) этой статьи и можно написать

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= e^{kf}\left\{k^l \sum_{v=0}^{v=l} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-u} L_v(\Phi_u)\right\} \\ N(\Phi) &= e^{kf}\left\{k^n \sum_{q=0}^{q=n} k^{-q} \sum_{p=0}^{p=R}{}^{*} k^{-p} N_q(\Phi_p)\right\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

В этих формулах L_v и N_q — дифференциальные операторы, порядок которых равен соответственно v и q, а коэффициенты суть полиномы относительно производных от f степени $l-v$ и $n-q$, соответственно Учитывая выражение (1.3) для f, можно написать

$$\begin{aligned} L_v &= L_{v,\,0} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\lambda'} k^{-\frac{\varkappa+\lambda}{\zeta}} L_{v,(\varkappa+\lambda)/\zeta} \\ N_q &= N_{q,\,0} + \sum_{\mu=0}^{\mu=\mu'} k^{-\frac{\varkappa+\mu}{\zeta}} N_{q,\,(\varkappa+\mu)/\zeta} \end{aligned} \tag{1.6}$$

где L и N с двойными индексами уже не зависят от k,

$$\lambda' = (l-v)(\zeta-\varkappa-1), \qquad \mu' = (n-q)(\zeta-\varkappa-1)$$

Подставив (1.6) в (1.5), получим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= e^{kf}\left\{k^l \sum_{r=0}^{r=l+R}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=r}{}^{*} k^{-r} L_{[r-u]}(\Phi_u)\right\} \qquad (r-u \leqslant l,\ u \leqslant R) \\ N(\Phi) &= e^{kf}\left\{k^n \sum_{s=0}^{s=n+R}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=s}{}^{*} k^{-s} N_{[s-p]}(\Phi_p)\right\} \qquad (s-p \leqslant n,\ p \leqslant R) \end{aligned} \tag{1.7}$$

В этих и во всех последующих формулах в суммах должны сохраняться только те слагаемые, в которых индексы подчиняются неравенствам, указанным в скобках. Выражения $L_{[w]}$ и $N_{[w]}$ составляются следующим образом:

$$L_w = \sum_{r+\gamma/\zeta=w} L_{r,\gamma|\zeta}, \qquad N_{[w]} = \sum_{r+\gamma/\zeta=w} N_{r,\gamma|\zeta}$$

(суммирование по всем таким целым неотрицательным значениям r и γ, при которых $r+\gamma/\zeta = w$).

Можно показать, что $L_{[w]}$ обладает следующими свойствами (всюду считается, что w' — целая часть w).

(a) $L_{[w]}$ — дифференциальный оператор порядка w', коэффициенты которого относительно $f_0, f_\varkappa, f_{\varkappa+1}, \ldots, f_{\zeta-1}$ и их производных — полиномы, а относительно $a_{jk}^{(\nu)}$ — линейные функции.

(b) При w целом главная часть $L_{[w]}$ совпадает с главной частью оператора $L_w|_{f=f_0}$, в частности, согласно формулам (1.7) и (1.8) статьи [1]

$$L_{[0]} = \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\,l-j}^{(l)} f_{0\alpha}^{\,j} f_{0\beta}^{\,l-j} \tag{1.8}$$

$$L_{[1]} = \frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\beta} + \ldots \tag{1.9}$$

($f_{0\alpha}$, $f_{0\beta}$ — производные от f_0 по α и β; точки обозначают слагаемые, не содержащие символов дифференцирования).

(c) Имеют место формулы

$$L_{[w]} \equiv 0, \qquad 0 < w < \frac{\varkappa}{\zeta}$$

$$L_{[\varkappa/\zeta]} = \frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\beta} \tag{1.10}$$

$$L_{[(\varkappa+\lambda)/\zeta]} = \frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\beta} + F(f_{<\varkappa+\lambda})$$

$$(\lambda = 1, \ldots, \zeta-\varkappa-1)$$

Здесь и в дальнейшем символ вида $F(f_{<\varkappa+\lambda})$ обозначает функцию от $f_0, f_\varkappa, f_{\varkappa+1}, \ldots, f_{\varkappa+\lambda-1}$ и их производных.

Совершенно аналогичны свойства $N_{[w]}$.

4. Подставим (1.7) в исходное уравнение, заменим h через k при помощи (1.2) и отбросим экспоненциальный множитель. Получим

$$k^{n-1/t}\left\{\sum_{s=0}^{s=n+R}{}^{*}\sum_{p=0}^{p=s}{}^{*} k^{-s} N_{[s-p]}(\Phi_p)\right\} + k^l\left\{\sum_{r=0}^{r=l+R}{}^{*}\sum_{u=0}^{u=r}{}^{*} k^{-r} L_{[r-u]}(\Phi_u)\right\} = 0 \tag{1.11}$$

$$(r-u \leqslant l,\ u \leqslant R,\ s-p \leqslant n,\ p \leqslant R)$$

Далее, как и в [1], будем приравнивать нулю коэффициенты при различных степенях k, начиная с самой старшей. В связи с этим могут иметь место три различных случая.

Случай 1

$$l > n - 1/t \quad \text{или} \quad t < \frac{1}{n-l} = t_0$$

Тогда, приняв, что $l = n - 1/t + \rho$, и приравняв нулю коэффициенты при всех степенях k от l до $l - R - 1 + 1/\zeta$, получим

$$\sum_{u=0}^{u=r}{}^{*} L_{[r-u]}(\Phi_u) = 0 \qquad (r - u \leqslant l;\ u \leqslant R;\ r = 0,\ 1/\zeta, \ldots, \rho - 1/\zeta) \tag{1.12.1}$$

$$\sum_{u=0}^{u=r}{}^{*} L_{[r-u]}(\Phi_u) + \sum_{p=0}^{p=r-\rho}{}^{*} N_{[r-\rho-p]}(\Phi_p) = 0 \tag{1.12.2}$$

$$-u \leqslant l;\ u \leqslant R;\ r - \rho - p \leqslant n;\ \ p \leqslant R;\ r = \rho,\ \rho + 1/\zeta,\ \rho + 2/\zeta, \ldots, R + 1 - 1/\zeta)$$

$$\sum_{r=R+1}^{r=l+R}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-r} L_{[r-u]}(\Phi_u) + \sum_{s=R+1}^{s=n+R+\rho}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=s-\rho}{}^{*} k^{-s} N_{[s-\rho-p]}(\Phi_p) = 0 \tag{1.12.3}$$

$$(r - u \leqslant l,\ s - \rho - p \leqslant n,\ p \leqslant R)$$

Случай 2

$$l < n - 1/t \quad \text{или} \quad t > \frac{1}{n - l} = t_0$$

Тогда, приняв, что $n - 1/t = l + \rho$, получим аналогично

$$\sum_{p=0}^{p=s}{}^{*} N_{[s-p]}(\Phi_p) = 0 \qquad (s - p \leqslant n;\ p \leqslant R;\ s = 0,\ 1/\zeta,\ 2/\zeta, \ldots, \rho - 1/\zeta) \tag{1.13.1}$$

$$\sum_{p=0}^{p=s}{}^{*} N_{[s-p]}(\Phi_p) + \sum_{u=0}^{u=s-\rho}{}^{*} L_{[s-\rho-u]}(\Phi_u) = 0 \tag{1.13.2}$$

$$(s - p \leqslant n;\ p \leqslant R;\ s - \rho - u \leqslant l,\ u \leqslant R;\ s = \rho,\ \rho + 1/\zeta,\ \rho + 2/\zeta, \ldots, R + 1 - 1/\zeta)$$

$$\sum_{s=R+1}^{s=n+R}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=R}{}^{*} k^{-s} N_{[s-p]}(\Phi_p) + \sum_{r=R+1}^{r=l+R+\rho}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=r-\rho}{}^{*} k^{-r} L_{[r-\rho-u]}(\Phi_u) = 0 \tag{1.13.3}$$

$$(s - p \leqslant n;\ r - \rho - u \leqslant l;\ u \leqslant R)$$

Случай 3

$$l = n - 1/t \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{n - l} = t_0$$

Тогда также получим

$$\sum_{u=0}^{u=r}{}^{*} L_{[r-u]}(\Phi_u) + \sum_{p=0}^{p=s}{}^{*} N_{[s-p]}(\Phi_p) = 0 \tag{1.14.1}$$

$$(u \leqslant R;\quad r - u \leqslant l;\quad p \leqslant R;\quad s - p \leqslant n;\quad r,\ s = 0,\ 1/\zeta,\ 2/\zeta, \ldots, R + 1 - 1/\zeta)$$

$$\sum_{r=R+1}^{r=l+R}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-r} L_{[r-u]}(\Phi_u) + \sum_{s=R+1}^{s=n+R}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=R}{}^{*} k^{-s} N_{[s-p]}(\Phi_p) = 0 \tag{1.14.2}$$

$$(r - u \leqslant l;\ s - p \leqslant n)$$

5. Выпишем головные уравнения систем (1.12), (1.13) и (1.14). После отбрасывания ненулевого множителя Φ_0 они принимают вид:

$$L_{[0]} \equiv \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\,l-j}^{(l)} f_{0\alpha}^{j} f_{0\beta}^{l-j} = 0 \tag{1.15}$$

$$N_{[0]} \equiv \sum_{j=0}^{j=n} b_{j,\,n-j}^{(n)} f_{0\alpha}^{j} f_{0\beta}^{n-j} = 0 \tag{1.16}$$

$$L_{[0]} + N_{[0]} \equiv \sum_{j=0}^{j=l} a_{j,\,l-j}^{(l)} f_{0\alpha}{}^{j} f_{0\beta}^{l-j} + \sum_{j=0}^{j=n} b_{j,\,n-j}^{(n)} f_{0\alpha}{}^{j} f_{0\beta}^{n-j} = 0 \tag{1.17}$$

Так как $L_{[0]}$ и $N_{[0]}$ — характеристические многочлены операторов L и N соответственно, то из (1.15) — (1.17) следует, что если интегралы вида (1.3) существуют, то линии уровня главной части функции изменяемости f_0[1]:

(a) при $t < t_0$ будут совпадать с одним из семейств характеристик оператора L;

(b) при $t > t_0$ будут совпадать с одним из семейств характеристик оператора N;

(c) при $t = t_0$ будут проходить вдоль линий, которые либо не являются характеристиками ни L, ни N, либо являются характеристиками для обоих этих операторов.

Замечание. Тривиальное решение $f_0 = \text{const}$ уравнений (1.15)—(1.17) во внимание не принимается.

Интегралы вида (1.3), у которых линии уровня главной части функции изменяемости совпадают с некоторым семейством действительных или мнимых кривых, назовем интегралами, соответствующими этому семейству. Тогда можно утверждать, что при $t < t_0$ мы будем получать интегралы, соответствующие семействам характеристик оператора L, а при $t > t_0$ — интегралы, соответствующие семействам характеристик оператора N. Обе эти группы интегралов в совокупности мы будем называть основными интегралами.

§ 2. 1. Примем, что $t > t_0$, т. е. имеет место случай 2, и рассмотрим более подробно систему (1.13).

Она имеет смысл только тогда, когда

$$n = l + 1/t + \rho \tag{2.1}$$

а ρ — число вида $\sigma + \tau/\zeta$ (σ, τ — целые положительные). В противном случае не будут иметь смысла выражения $L_{[s-\rho-u]}$. В дальнейшем всегда считается, что $\rho = \sigma + \tau/\zeta$; это, если учесть (2.1), значит, что мы считаем показатель изменяемости t рациональным числом (в монографии [2] считалось, что $1/t$ — целое число).

2. Пусть $\rho < 1$. Покажем, что в этом случае для определения функции (1.4) можно построить рекуррентный процесс, положив $\varkappa/\zeta = \rho$.

В уравнениях (1.13.1) при $\rho = \varkappa/\zeta$ индексы при N будут меньше $\varkappa/\zeta$ и в силу свойств (c) операторов $L_{[w]}$, $N_{[w]}$ все уравнения (1.13.1) удовлетворятся, если положить $N_{[0]} = 0$, т. е. система (1.13.1) эквивалентна уравнению (1.16)

В системе (1.13.2) выделим уравнения, соответствующие ($s < 1$). Они составят систему алгебраических уравнений, так как содержат L и N только с индексами, меньшими единицы, которые по свойству (a) не содержат символов дифференцирования (являются операторами нулевого порядка).

После очевидных преобразований эта система приводится к виду

$$N_{[(\varkappa+\lambda)/\zeta]} = -L_{[\lambda/\zeta]} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \zeta - \varkappa - 1) \tag{2.2}$$

[1] Так же как в [1], интеграл (1.3) строится, вообще говоря, в комплексной области, так что и линии уровня могут быть мнимыми.

Отсюда определяются все коэффициенты разложения функции изменяемости ценой последовательного решения уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\beta}=-L_{[0]}$$
$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\beta}=-F(f_{<\varkappa+\lambda}) \qquad (2.3)$$

(см. свойство (с) выражений $L_{[w]}$, $N_{[w]}$). Уравнения (1.13.2), соответствующие $s\geqslant 1$, можно теперь переписать так:

$$N_{[1]}(\Phi_0)+L_{[1-\rho]}\Phi_0=0$$
$$N_{[1]}(\Phi_{s-1})+L_{[1-\rho]}(\Phi_{s-1})= \qquad (2.4.1)$$
$$=-\sum_{p=0}^{p=s-1-1/\zeta}{}^{*}N_{[s-p]}(\Phi_p)-\sum_{u=0}^{u=s-1-1/\zeta}{}^{*}L_{[s-\rho-u]}(\Phi_u)=0$$
$$(s-p\leqslant n;\quad s-\rho-u\leqslant l;\quad s=1+1/\zeta,\ldots,R+1-1/\zeta)$$

или, если расшифровать левые части этих уравнений при помощи формулы, аналогичной (1.9):

$$\left[\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\beta}+\ldots\right](\Phi_0)=0$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\beta}+\ldots\right](\Phi_{s-1})=$$
$$=-\sum_{p=0}^{p=s-1-1/\zeta}{}^{*}N_{[s-p]}(\Phi_p)-\sum_{u=0}^{u=s-1-1/\zeta}{}^{*}L_{[s-\rho-u]}(\Phi_u)$$

(в левых частях выписаны только главные части; индексы подчиняются прежним соотношениям).

Отсюда определяются коэффициенты разложения функций интенсивности ценой последовательного интегрирования линейных уравнений первого порядка. Для определения остаточного члена остается уравнение (1.13.3), которое можно переписать так:

$$\sum_{s=R+1}^{s=n+R}{}^{*}k^{-s}N_{[s-R]}(\Phi_R)+\sum_{r=R+\theta}^{r=l+R+\rho}{}^{*}k^{-r}L_{[r-\rho-R]}(\Phi_R)=F \qquad (2.5)$$

где F — некоторое определенное выражение от функции (1.4), θ — наибольшее из чисел 1 и ρ.

3. Пусть теперь $\rho\geqslant 1$. Тогда можно принять, что функция изменяемости не зависит от k, т. е. $f=f(\alpha,\beta)=f_0(\alpha,\beta)$, и что коэффициенты разложения функции изменяемости Φ_u с нецелыми индексами тождественно равны нулю при $u<\rho$. При этом для определения функций

$$f_0,\ \Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_{\rho'},\ \Phi_\rho,\ \Phi_{\rho+1/\zeta},\ \ldots,\ \Phi_{R-1/\zeta}$$

(ρ' — наибольшее целое число, меньшее ρ) получается рекуррентный процесс, который описывается ниже.

Функция изменяемости f_0 определяется из уравнения (1.16). Функции $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{\rho'}$ определяются из уравнений

$$N_1(\Phi_{s-1})=-\sum_{p=0}^{p=s-2}N_{s-p}(\Phi_p)\qquad (s-p\leqslant n;\ s=1,\ldots,\theta) \qquad (2.4.2)$$

где θ — наименьшее из чисел R и ρ'. Функции Φ_ρ, $\Phi_{\rho+1/\zeta}, \ldots \Phi_{R-1/\zeta}$ (для случая $\rho' < R$) определяются из уравнений

$$N_1(\Phi_{s-1}) = -\sum_{p=0}^{p=s-1-1/\zeta}{}^{*} N_{s-p}(\Phi_p) - \sum_{u=0}^{u=s-\rho}{}^{*} L_{s-\rho-u}(\Phi_u) \qquad (2.4.3)$$

$$(s-p \leqslant n; \quad s=\rho, \quad \rho+1/\zeta, \ldots, R+1-1/\zeta)$$

Остаточный член, как и при $\rho < 1$, определяется из уравнения (2.5).

Замечания.

(a) При $\rho \geqslant 1$, когда все $f_{\varkappa+\lambda}$ полагаются тождественно равными нулю, $L_{[w]}$, $N_{[w]}$ не отличаются от L_w, N_w соответственно.

(b) При ρ целом можно считать, что все Φ_u с дробными индексами равны нулю, т. е. искать интеграл в таком же виде, как и в [1].

(c) При $\rho < 1$ рекуррентный процесс для определения функции (1.4) можно получить, положив $\varkappa/\zeta = \rho/m$ (m — целое); точно так же при $\rho \geqslant 1$ можно положить $\varkappa/\zeta = 1/m$. Описанные процессы построения функций (1.4) не единственны. Они только наиболее просты и приводят к интегралам, достаточно общим для решения интересующих нас задач.

4. Коэффициенты исходного уравнения предполагаются достаточно гладкими, поэтому особыми точками уравнений (1.16), (2.3), (2.4) и (2.5) будут только те точки, где одновременно обращаются в нуль все коэффициенты при старших производных от искомых фракций.

Для уравнения (1.16) и (2.5) это будут точки, в которых исчезают одновременно все $b_{ij}^{(n)}$, т. е. особые точки оператора N.

Для уравнений (2.3) и (2.4) это могут быть только точки, в которых выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{N_{[0]}\} = \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{N_{[0]}\} = 0 \qquad (2.6)$$

т. е. (a) особые точки оператора N; (b) стационарные точки функции f_0; (c) точки, в которых характеристики N кратны, или точки взаимного касания характеристик N, принадлежащих различным семействам.

Тривиальные решения $f_0 = \mathrm{const}$ не принимаются во внимание. Случай, когда все $b_{ij}^{(n)}$ в интересующей нас области G тождественно равны нулю, также можно исключить из рассмотрения без ущерба для общности. Поэтому можно считать, что для уравнений (1.16) и (2.5) не может быть случая, когда все точки области G — особые точки, а для уравнений (2.3) и (2.4) это может иметь место только в случае, когда в области G оператор N имеет кратные семейства характеристик.

5. В уравнениях, определяющих $f_\varkappa$ при ($\rho < 1$) или $\Phi_{\rho-1}$ (при $\rho \geqslant 1$), член, зависящий от оператора L, имеет коэффициент $L_{[0]}$, который может обратиться в тождественный нуль только тогда, когда в рассматриваемой области L и N имеют совпадающее семейство характеристик. Считая такой случай исключенным, можно утверждать, что в уравнения (2.4) слагаемые, зависящие от оператора L, войдут в вычисления, начиная с того момента, когда мы приступим к определению $\Phi_{\rho-1}$. Будем поэтому говорить, что если $t > t_0$, то интеграл вида (1.3) при $\rho \geqslant 1$ можно определить из приближенного уравнения

$$hN(\Phi) = 0 \qquad (2.7)$$

с асимптотической погрешностью порядка $k^{-\rho+1}$. Это значит, что для всякой такой задачи, для которой при $R=\rho-1$ остаточный член $\Phi_R=\Phi_{\rho-1}$ будет ограниченным, замена уравнения (1.1) приближенным уравнением (2.7) не оказывает влияния на функцию изменяемости и дает погрешность вида $O(k^{-\rho+1})$ при определении функции интенсивности. При $\rho<1$ (2.7) для определения функции интенсивности не пригодно и дает погрешность уже при определении функции изменяемости.

Однако главная часть функции изменяемости при помощи (2.7) может быть построена точно при любом ρ.

Если $L_{[0]}=0$, то асимптотическая погрешность уравнения (2.7) уменьшается, но более подробно на этом вопросе мы остановиться не можем.

§ 3. 1. Пусть $t<t_0$, т. е. имеет место случай 1. Тогда для определения коэффициентов разложения функций изменяемости и интенсивности надо пользоваться системой (1.12). Она отличается от (1.13) только тем, что в ней L заменено на N, и наоборот. Поэтому по аналогии с § 2 можно формулировать окончательные результаты, не останавливаясь на пояснениях.

2. Пусть имеет место соотношение

$$l=n-1/t+\rho$$

(ρ, как и раньше, число вида $\sigma+\tau/\zeta$).

Тогда при $\rho<1$, положив $\varkappa/\zeta=\rho$, получим:

(a) для определения главной части функции изменяемости уравнение (1.15);

(b) для определения коэффициентов разложения функции изменяемости уравнения

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\beta}=-N_{[0]} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\beta}=-F(f_{<\varkappa+\lambda}) \tag{3.2}$$

$$(\lambda=1,2,\ldots,\zeta-\varkappa-1)$$

(c) для определения коэффициентов разложения функции интенсивности уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\beta}+\ldots\right](\Phi_{r-1})=$$

$$=-\sum_{u=0}^{u=r-1-1/\zeta}{}^{*}L_{[r-u]}(\Phi_u)-\sum_{p=0}^{p=r-1-1/\zeta}{}^{*}N_{[r-p-\rho]}(\Phi_p) \tag{3.3.1}$$

$$(r-u\leqslant l;\ r-p-\rho\leqslant n;\ r=1,1+1/\zeta,\ldots,R+1-1/\zeta)$$

(d) для определения остаточного члена уравнение

$$\sum_{r=R+1}^{r=l+R}{}^{*}k^{-r}L_{[r-R]}(\Phi_R)+\sum_{s=R+\theta}^{s=n+R+\rho}{}^{*}k^{-s}N_{[s-\rho-R]}(\Phi_R)=F \tag{3.4}$$

где F — некоторое определенное выражение от функции (1.4), θ — наибольшее из чисел 1 и ρ.

3. Если $\rho\geqslant1$, то можно положить, что $f=f_0$, а Φ_u при $u<\rho$ отличны от нуля только при целых значениях u; при этом:

(a) f_0 определяется также из уравнения (1.15);

(b) функции $\Phi_u\,(u<\rho)$ определяются из уравнений

$$L_1(\Phi_{r-1}) = -\sum_{u=0}^{u=r-2} L_{r-u}(\Phi_u) \qquad (r-u\leqslant l;\ \ r=1,\ldots,\theta) \quad (3.3.2)$$

(θ — наименьшее из чисел R и ρ', а ρ' — наибольшее из целых чисел, меньших ρ);

(c) функции $\Phi_u\,(u\geqslant\rho)$ для случая $\rho'<R$ определяются из уравнений

$$L_1(\Phi_{r-1}) = -\sum_{u=0}^{u=r-1-1/\zeta}{}^{*} L_{r-u}(\Phi_u) - \sum_{p=0}^{p=r-\rho}{}^{*} N_{r-p-\rho}(\Phi_p)$$

$$(r-u\leqslant n;\quad r-p-\rho\leqslant n\colon\quad r=\rho+1,\ \ \rho+1+1/\zeta,\ldots,R+1-1/\zeta)$$

(d) остаточный член Φ_R определяется из уравнения (3.4).

4. Особыми точками для уравнений, определяющих функции (1.4) и остаточный член Φ_R, могут быть только особые точки оператора L, стационарные точки f_0 и точки кратности характеристик L или точки взаимного касания характеристик L, принадлежащих различным семействам.

5. Если по-прежнему считать, что L и N в рассматриваемой области не имеют совпадающих семейств характеристик, то $N_{[0]}\not\equiv 0$ и величины, связанные с оператором N, войдут в выкладки только тогда, когда мы дойдем до определения функции $\Phi_{\rho-1}$. Следовательно, при $t<t_0$ интеграл вида (1.3) может быть определен из приближенного уравнения

$$L(\Phi) = 0 \qquad (3.5)$$

с асимптотической погрешностью порядка $k^{-\rho+1}$. Это утверждение должно пониматься в таком же смысле, как и в § 2.

§ 4. 1. Примем, что $t=t_0$, т. е. имеет место случай 3, и рассмотрим систему (1.14). Рекуррентный процесс для определения функций (1.4) в этом случае может быть получен при любом рациональном значении $\varkappa/\zeta<1$ (можно, в частности, положить и $\varkappa/\zeta=0$, т. е. считать, что $f=f_0$, но это не дает интегралов, достаточно общих для решения предстоящих задач). Опишем процесс, соответствующий $\varkappa/\zeta\neq 0$, не останавливаясь на рассуждениях,— они идентичны § 2 для случая $\rho<1$.

(a) Для определения f_0 мы имеем уравнение (1.17).

(b) Коэффициенты разложения функции изменяемости определяются из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial f_{\varkappa+\lambda}}{\partial\beta} + \ldots + F(f_{<\varkappa+\lambda}) = 0 \quad (4.1)$$

$$(\lambda = 1,2,\ldots,\ \zeta-\varkappa-1)$$

(c) Коэффициенты разложения функции интенсивности последовательно определяются из уравнений

$$\left[\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\beta}+\ldots\right](\Phi_0) = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}\frac{\partial}{\partial\beta}+\ldots\right](\Phi_{r-1}) =$$

$$= -\sum_{u=0}^{u=r-1-1/\zeta}{}^{*} L_{[r-u]}(\Phi_u) - \sum_{p=0}^{p=s-1-1/\zeta}{}^{*} N_{[s-p]}(\Phi_p) \qquad (4.2)$$

$$(r-u\leqslant l;\ \ s-p\leqslant n;\ \ r,\,s = 1+1/\zeta,\ \ 1+2/\zeta,\ldots,R+1-1/\zeta)$$

Остаточный член определяется из уравнения

$$\sum_{r=R+1}^{r=l+R}{}^{*} k^{-r} L_{[r-R]}(\Phi_R) + \sum_{s=R+1}^{s=n+R}{}^{*} k^{-s} N_{[s-R]}(\Phi_R) = \tag{4.3}$$
$$= -\sum_{r=R+1}^{r=l+R}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=R-1/\zeta}{}^{*} k^{-r} L_{[r-u]}(\Phi_u) - \sum_{s=R+1}^{s=n+R}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=R-1/\zeta}{}^{*} k^{-s} N_{[s-p]}(\Phi_p)$$
$$(r-u \leqslant l;\ s-p \leqslant n)$$

2. Будем искать такие решения уравнения (1.17), которые имеют нулевые значения на заданном действительном контуре γ, ни в одной точке не касающемся характеристик L или N.

Пусть контур γ совмещен (если нужно, при помощи предварительного действительного преобразования независимых переменных) с линией $\alpha = \alpha_0$. Тогда $f_0 = 0$ на γ и (1.17) дает

$$a_{l,0}^{(l)} f_{0\alpha}{}^{l} + b_{n,0}^{(n)} f_{0\alpha}{}^{n} = 0 \quad \text{на } \gamma \tag{4.4}$$

Функции $a_{l,0}^{(l)}$ и $b_{n,0}^{(n)}$ отличны от нуля во всех точках γ, так как иначе характеристики L или N, соответственно, касались бы контура γ. Поэтому (4.4) дает $n-l$ ненулевых значений для $f_{0\alpha}$ на γ:

$$f_{0\alpha} = \nu \sqrt[n-l]{\left|\frac{a_{l,0}^{(l)}}{b_{n,0}^{(n)}}\right|} \quad \text{на } \gamma \tag{4.5}$$

где ν — корень уравнения

$$\nu^{n-l} + \operatorname{sign}\left(\frac{a_{l,0}^{(l)}}{b_{n,0}^{(n)}}\right) = 0 \tag{4.6}$$

Дифференцируя (1.17) по α и полагая в получаемых соотношениях $\alpha = \alpha_0$, можно построить уравнения для последовательного определения контурных значений производных от f_0 по α любого порядка. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}} \left[a_{l,0}^{(l)} f_{0\alpha}{}^{l} + b_{n,0}^{(n)} f_{0\alpha}{}^{n}\right] \frac{\partial^r f_0}{\partial \alpha^r} = F\left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial \alpha^2}, \ldots \frac{\partial^{r-1} f_0}{\partial \alpha^{r-1}}\right) \quad \text{на } \gamma \tag{4.7}$$

где F — известная функция перечисленных аргументов.

Коэффициент при производной порядка r в левой части заведомо отличен от нуля, так как под $f_{0\alpha}$ подразумевается ненулевой корень уравнения (4.4), а последний как корень двухчленного уравнения не может быть кратным. Следовательно, каждому решению (4.5) соответствует некоторый интеграл уравнения (1.17), который при очевидных допущениях можно определить в окрестности γ при помощи ряда Тейлора.

3. Если известно f_0, то остальные функции (1.4) и остаточный член получаются интегрированием уравнений (4.1), (4.2), (4.3). Таким образом, каждому из решений (4.5) соответствует некоторый класс интегралов вида (1.3). Их, так же как в [2], мы будем называть интегралами с опорным контуром γ. Из сказанного вытекает, что это такие решения вида (1.3) уравнения (1.1), в которых на γ главная часть функции изменяемости имеет нулевые значения.

Покажем, что уравнения (4.1), (4.2), (4.3) на γ особых точек иметь не могут. На γ по предположению $b_{n,0}^{(n)} \neq 0$. Поэтому на γ нет особых точек оператора N, а следовательно, нет и особых точек уравнения

(4.3). Особые точки уравнений (4.1), (4.2) могут быть только там, где

$$\frac{\partial}{\partial f_{\alpha 0}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}=\frac{\partial}{\partial f_{0\beta}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\}=0$$

а так как контурное значение $f_{0\beta}$ равно нулю, то должно выполняться и соотношение

$$\frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{L_{[0]}+N_{[0]}\} = \frac{\partial}{\partial f_{0\alpha}}\{a_{l,0}{}^{(l)}f_{0\alpha}{}^{l}+b_{n,0}{}^{(n)}f_{0\alpha}{}^{n}\}=0 \quad \text{на} \quad \gamma$$

а это противоречит доказанному выше.

Контурное значение $f_{0\alpha}$ в интегралах с опорным контуром γ пропорционально соответствующему корню двухчленного уравнения (4.6).

Вообще говоря, эти корни разделяются на две группы: $^1/_2\,(n-l)$ из них имеет положительную действительную часть, $^1/_2\,(n-l)$ — отрицательную. Исключение представляют случаи, когда $n-l$ — нечетное число или когда уравнение (4.6) имеет два чисто мнимых корня.

§ 5. 1. Рассмотрим задачу, аналогичную задаче A статьи [1]. В конечной односвязной области $\overline{\Gamma}=\Gamma+\gamma$, ограниченной контуром γ, параметры $(\alpha,\ \beta)$ соответствуют системе координат, подобной полярной системе, т. е. контур γ задается уравнением $\alpha=\alpha_0>0$, область Γ определяется неравенствами

$$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0, \qquad 0\leqslant\beta\leqslant 2\pi$$

а соответствие между точками области Γ и парами чисел $(\alpha,\ \beta)$ взаимнооднозначно всюду, кроме точек $\alpha=0$ и линий $\beta=0$, $\beta=2\pi$.

Задача A заключается в построении решения уравнения (1.1) в области Γ при граничных условиях

$$\frac{\partial^{\mu}\Phi}{\partial\alpha^{\mu}}\equiv D^{(\mu,0)}(\Phi)=k^{\mu}g^{(\mu)}e^{ik\varphi} \qquad \text{на} \qquad \gamma \tag{5.1}$$

$$\left(\mu=0,1,2,\ldots,\ \frac{n}{2}-1\right) \qquad (n\text{ — четное})$$

где $g^{(\mu)}$, φ — заданные функции β, не зависящие от k, при этом φ считается действительной функцией. Параметры задачи, как в статье [1], считаются достаточно гладкими, т. е. γ — достаточно гладкий контур, а $g^{(\mu)}$ и $e^{ik\varphi}$ достаточно гладки как функции точки контура γ. Кроме того, считается, что φ' нигде на γ не обращается в нуль. Нашей целью будет показать, что приближенное решение задачи A при известных обстоятельствах составляется либо только из основных интегралов, либо из основных интегралов и интегралов с опорным контуром γ (где γ — граница области).

2. Решение задачи A, как выяснится ниже, можно искать, считая, что параметры t в граничных условиях (5.1) и в формуле (1.3) имеют один и тот же смысл. Поэтому в конкретно поставленной задаче A параметр k определяется характером граничных функций и его естественно называть показателем изменяемости задачи A.

3. Рассмотрим сначала случай $t>t_0$ и будем считать, что N — эллиптический оператор, не имеющий на γ особых точек, все семейства харак-

теристик которого вблизи γ однократны. Кроме того, примем, что на γ отсутствуют точки взаимного касания характеристик N, принадлежащих различным семействам.

Решение задачи A в этом случае будем искать в виде

$$\Phi = \Sigma\, \Phi_*{}^{(q)} e^{kf^{(q)}} \tag{5.2}$$

где под $f^{(q)}$ и $\Phi_*{}^{(q)}$ подразумеваются функции изменяемости и интенсивности основного интеграла, соответствующего q-му семейству характеристик N. Суммирование распространяется на некоторое число семейств характеристик N, которое будет уточнено ниже.

4. Функции $f_0{}^{(q)}$ и $f_{\varkappa+\lambda}{}^{(q)}$ подчиним условиям

$$f_0{}^{(q)} = i\varphi(\beta) \quad \text{на} \quad \gamma \tag{5.3.1}$$

$$\operatorname{Re}\{f_{0\alpha}{}^{(q)}\} > 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{5.3.2}$$

$$f_{\varkappa+\lambda}{}^{(q)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{5.4}$$

Условие (5.3.2) названо в [1] условием затухания. Было показано, что ему можно подчинить только интегралы, соответствующие определенным семействам характеристик, которых в эллиптическом операторе порядка n будет $^1/_2 n$. В сумме (5.2) мы и сохраним только $^1/_2\, n$ соответствующих слагаемых.

Главная часть функции изменяемости f_0 на γ не имеет стационарных точек, так как по предположению $\varphi'(\beta)$ нигде не обращается в нуль; особые точки N и точки взаимного касания характеристик N, принадлежащих различным семействам, отсутствуют на γ. Это значит, что уравнения, из которых определяются f_0, $f_{\varkappa+\lambda}$ и Φ_u, на γ не имеют особых точек и мы примем, что в окрестности γ функции $f_0{}^{(q)}$ и $f_{\varkappa+\lambda}{}^{(q)}$, удовлетворяющие контурным условиям (5.3) и (5.4), будут равномерно (по α,β) ограниченными. Тогда при достаточно большом k

$$f^{(q)} = f_0{}^{(q)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\zeta-\varkappa-1} k^{-\frac{\varkappa+\lambda}{\zeta}} f_{\varkappa+\lambda}$$

так же как и в [1], будет удовлетворять условиям

$$f^{(q)} = i\varphi \tag{5.5.1}$$

$$\operatorname{Re}\{f_\alpha{}^{(q)}\} > 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{5.5.2}$$

5. Первая из формул (1.5) после замены в ней L на $D^{(\mu,0)}$, а Φ и f на $\Phi^{(q)}$ и $f^{(q)}$ дает

$$D^{(\mu,0)}(\Phi^{(q)}) = e^{kf^{(q)}} \{k^\mu \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R}{}^* k^{-u} D_{v,q}{}^{(\mu,0)}(\Phi_u{}^{(q)})\}$$

Просуммируем полученные выражения по $^1/_2 n$ значениям q, подставим в граничные условия (5.1) и сократим на экспоненциальный множитель. Получим контурное соотношение

$$\sum_{q=1}^{q=^1/_2 n} k^\mu \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R}{}^* k^{-u} D_{v,q}{}^{(\mu,0)}(\Phi_u{}^{(q)}) = k^\mu g^{(\mu)} \quad \text{на} \quad \gamma \tag{5.6}$$

совершенно аналогичное контурному соотношению (2.3), полученному в

[1] при решении задачи A для уравнения, не содержащего малого параметра.

6. Дальше решение задачи A строится так же, как в [1].

В (5.6) слева и справа приравниваются один к другому коэффициенты при различных степенях k от μ до $\mu - R + {}^1/_\zeta$. Как показано в [1], это в конечном итоге позволяет присоединить к каждому дифференциальному уравнению (2.4) контурное условие, заключающееся в задании на γ значений функции $\Phi_u{}^{(q)}$. Мы примем предположение (a), что существует достаточно малая окрестность γ, в которой все определенные таким образом $\Phi_u\,(u < R)$ будут равномерно (по α,β) ограничены.

Для остаточных членов из (5.6) мы получаем ${}^1/_2 n$ контурных условий, подобных условиям (2.6) статьи [1], и, следовательно, задача о построении в окрестности γ функций $\Phi_R{}^{(q)}$ остается недоопределенной, так как каждая из $\Phi_R{}^{(q)}$ удовлетворяет уравнению порядка n. Мы примем предположение (b), что эту задачу можно доопределить путем задания дополнительных контурных условий так, чтобы $\Phi_R{}^{(q)}$ в некоторой окрестности γ были также равномерно (по α, β и k) ограниченными.

Рассмотрим выражение

$$\Phi' = \psi \sum_{q=1}^{q=n/2} \Phi^{(q)} + \Phi^{(0)} \qquad \left(\Phi^{(q)} = e^{kf^{(q)}} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-u}\Phi_u\right)$$

Здесь ψ — сглаживающая функция, имеющая тот же смысл, что и в статье [1]. Она равна единице в области Γ_η, т. е. при $\alpha_0 \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0 - \eta$, равна нулю в области $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$, т. е. при $\alpha_0 - \varepsilon > \alpha \geqslant 0$ $(0 < \eta < \varepsilon < \alpha_0)$ и неограниченно дифференцируема в области $\Gamma_\varepsilon - \Gamma_\eta$, т. е. при $\alpha_0 - \eta \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0 - \varepsilon$.

Потребуем, чтобы $\Phi^{(0)}$ удовлетворяло уравнению (1.1). Тогда для определения Φ получим

$$hN\,(\Phi^{(0)}) + L\,(\Phi^{(0)}) = P \equiv -(hN + L)\left(\psi \sum_{q=1}^{q=n/2} \Phi^{(q)}\right)$$

Выберем ε настолько малым, чтобы в Γ_ε имели силу предположения (a) и (b) и выполнялось условие затухания (5.5). Тогда абсолютные значения P будут иметь вид $O\,(k^{-v})$, где v — любое. В области Γ_η, содержащейся в Γ_ε, все $\Phi^{(q)}$ удовлетворяют уравнению (1.1), а $\psi = 1$ и, следовательно, $P = 0$. В области $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ также $P = 0$, так как $\psi = 0$. В $\Gamma_\varepsilon - \Gamma_\eta$ абсолютные значения $\Phi^{(q)}$ имеют вид $O\,(k^{-v})$, в силу равенства

$$\Phi^{(q)} = e^{kf^{(q)}} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-u}\Phi_u{}^{(q)}$$

и предположений (a) и (b), а ψ со своими производными ограничены, и, значит, абсолютные значения P имеют вид $O\,(k^{-v})$.

Введя предположение (c), что неоднородное уравнение (1.1) имеет ограниченное решение при любой ограниченной правой части и однородных условиях вида (5.1), мы можем утверждать, что приближенное решение задачи A, отбросив $\Phi^{(0)}$ и остаточные члены, можно искать в форме

$$\Phi' = \psi \sum_{q=1}^{q=n/2} e^{kf(q)} \sum_{u=0}^{u=R-1/\zeta}{}^{*} \Phi_u^{(q)}$$

с погрешностью вида $O(k^{-R})$.

7. Предположения (a) и (c) касаются классических задач теории дифференциальных уравнений и мы на них останавливаться не будем. Предположение (b) обсуждалось в статье [1], но в этих рассуждениях были допущены ошибки [1]. Вопрос доопределения задачи о Φ_R оказался сложнее, чем представлялось автору, и здесь было бы неуместно рассматривать его в полной постановке. Ограничимся примером.

В полярных координатах (r, θ) дано уравнение

$$\left[k^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]\Phi_R = g \tag{5.7}$$

(a, g — заданные функции, k — большая константа) и контурное условие

$$\Phi_R/_{r=1} = 0 \tag{5.8}$$

Требуется так задать контурное значение производной Φ_R по r, чтобы вблизи $r = 1$ (при $r < 1$) могло быть построено ограниченное (при $k \to \infty$) решение соответствующей задачи Коши. К такому вопросу сводится доопределение задачи об остаточном члене в примере, рассмотренном в [1] (§ 6).

Введем обозначения

$$\left.\frac{\partial^m \Phi_R}{\partial r^m}\right|_{r=1} = \Phi_m, \qquad \left.\frac{\partial^m g}{\partial r^m}\right|_{r=1} = g_{(m)}$$

и составим систему уравнений, получающуюся, если последовательно дифференцировать (5.7) по r и полагать во всех этих соотношениях, включая исходное, $r = 1$. Тогда, учтя (5.8), получим

$$k^{-1}(\Phi_{(2)} + \Phi_{(1)}) + 2\Phi_{(1)} = g_{(0)} \tag{5.9}$$

$$k^{-1}\left(\Phi_{(3)} + \Phi_{(2)} - \Phi_{(1)} + \frac{\partial^2\Phi_{(1)}}{\partial\theta^2} + a\Phi_{(1)}\right) - 2\Phi_{(2)} - 2\Phi_{(1)} + 2i\,\frac{\partial\Phi_{(1)}}{\partial\theta} = g_{(1)}$$

. . . .

Положив

$$\Phi_{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} k^{-p}\varphi_p \qquad (\varphi_p \text{ — функции } \theta)$$

можно, используя известный прием, последовательно определить из системы (5.9) контурные значения всех производных от Φ_R по r и построить решение задачи Коши в виде ряда Тейлора (по r). При этом, вообще говоря, $\Phi_{(m)}$ представятся в виде рядов, содержащих положительные степени k, и ограниченность решения (при $k \to \infty$) не будет обеспечена. Поэтому потребуем, чтобы все $\Phi_{(m)}$ были представлены в

[1] В частности, в так называемом дополнительном характеристическом уравнении пропущен один член и оно в действительности имеет вид

$$\{a_{l^0}{}^{(l)}[(f_\alpha + k^{1-}\lambda)^l - f_\alpha^l]\}_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

виде рядов Маклорена по k^{-1}. Это приведет нас к уравнениям

$$2\varphi_0 = g_0, \qquad -2\varphi_0 - 4\varphi_1 + 2i\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} = g_1 \ldots$$

из которых последовательно определяется $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ и задача будет должным образом доопределена.

Изложенный метод доопределения задачи о Φ_R может быть перенесен и на интересующий нас общий случай (если коэффициенты уравнения и данные задачи A аналитические), но подробности слишком громоздки, чтобы их было уместно рассмотреть здесь [1].

8. Таким образом, при $t > t_0$ задача A для уравнения с малым параметром обладает теми же свойствами, что и для уравнения, не содержащего малого параметра.

При достаточно большом k задача A имеет быстро затухающее решение, которое со сколь угодно большой точностью может быть построено при помощи суперпозиции основных интегралов с показателем изменяемости, равным показателю изменяемости задачи (это утверждение носит условный характер в том смысле, что исходное уравнение должно отвечать некоторым условиям, обеспечивающим выполнение принятых здесь предположений).

Фактическое построение приближенного решения задачи (с отбрасыванием остаточного члена) сводится к интегрированию уравнений (1.16) с контурными условиями (5.3.1), уравнений (2.3) с контурными условиями (5.4) и уравнений (2.4) при заданных контурных значениях функции Φ_u. Так как искомое решение составляется из интегралов, соответствующих $^1/_2 n$ семействам характеристик N, то уравнение (1.16) можно заменить $^1/_2 n$ линейными дифференциальными уравнениями первого порядка (см. [1]) и в конечном итоге приближенное решение задачи A приводится к последовательному решению в окрестности γ задач Коши для линейных уравнений первого порядка.

9. С асимптотической погрешностью порядка $k^{-\rho+1}$ решение задачи A может быть построено при помощи приближенного уравнения (2.7). Повышение точности требует учета L, но связанные с ним величины будут вносить поправки только в свободные члены уравнений и граничных условий, определяющих коэффициенты разложения функций изменяемости и интенсивности.

§ 6. 1. Пусть $t < t_0$, а L — эллиптический оператор с однократными семействами характеристик, не имеющих в $\overline{\Gamma}$ особых точек, а на γ — точек касания характеристик, принадлежащих различным семействам. В этом случае решение задачи A при помощи суперпозиции одних основных интегралов составлено быть не может, так как при $t < t_0$ число различных семейств основных интегралов (l) меньше нужного числа (n). Возникает необходимость учесть интегралы с опорным контуром.

2. Введем в рассмотрение интеграл, у которого опорный контур совпадает с границей области γ, изменим обозначения, использованные в § 4, и запишем этот интеграл так:

$$\Phi = \Psi_* e^{\theta g} \tag{6.1}$$

[1] В сущности, такой же метод доопределения был применен и в статье [1], но там в дополнительных контурных условиях были ошибочно указаны только главные члены.

где g и Ψ_* — соответственно функции изменяемости и интенсивности, а θ имеет тот же смысл, что и k в § 4, так что

$$g = g_0 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\xi-\eta-1} \theta^{-\frac{\eta+\lambda}{\xi}} g_{\eta+\lambda}, \qquad \Psi_* = \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} \theta^{-u}\Phi_u \tag{6.2}$$

Будем принимать во внимание только такие случаи, когда уравнение (4.6) имеет ровно $^1/_2\,(n-l)$ корней с положительной действительной частью, и зададим решение задачи A в виде

$$\Phi = \sum_{q=1}^{q=^1/_2 l} \Phi_*^{(q)} e^{kf^{(q)}} + \sum_{r=1}^{r=^1/_2(n-l)} \Psi_*^{(r)} e^{\theta g^{(r)}} \tag{6.3}$$

Здесь в первую сумму входят $^1/_2\,l$ основных интегралов, соответствующих $^1/_2\,l$ семействам характеристик L таких, что их можно подчинить условию затухания (5.3.2), а во вторую входят $^1/_2\,(n-l)$ интегралов с опорным контуром γ, соответствующих тем корням уравнения (4.6), действительная часть которых положительна.

3. В сумме (6.3) в интегралах с заданным опорным контуром ξ и η — целые числа, η/ξ — произвольная правильная, положительная, рациональная дробь, а θ определяется формулой

$$\theta = h^{-\frac{1}{n-l}} \tag{6.4}$$

В основных интегралах правой части (6.3) правильная, положительная, рациональная дробь $\varkappa/\zeta$ выбирается так, как описано в § 3, причем в отдельности $\varkappa$ и ζ могут пропорционально изменяться (оставаясь целыми). Параметр k в основных интегралах определяется формулой (1.2).

4. Выразим ξ и η следующими формулами:

$$\xi = \frac{\zeta}{t(n-l)}, \qquad \eta = \frac{\zeta[1-t(n-l)]}{t(n-l)} \tag{6.5}$$

Требование, чтобы η/ξ было правильной дробью, всегда выполняется в силу неравенств $0 < t(n-l) < 1$.

Целое число ζ, не изменяя значения дроби $\varkappa/\zeta$, можно выбрать так, чтобы ξ и η были целыми, так как t — рациональное число. В дальнейшем считается, что ζ — наименьшее из целых чисел, отвечающих этому требованию, поэтому выписанные формулы для ξ и η законны. Из нипри помощи (6.4) и (1.2) вытекают равенства

$$\theta^{1-\eta/\xi} = k, \qquad \theta^{1/\xi} = k^{1/\zeta}$$

5. В интегралах с заданным опорным контуром g_0 на γ равно нулю. Поэтому, учитывая только что написанные формулы, получим

$$\theta g^{(r)} = \theta^{1-\eta/\xi} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\xi-\eta-1} \theta^{-\lambda/\xi} g_{\eta+\lambda}^{(r)} = k \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\xi-\eta-1} k^{-\lambda/\zeta} g_{\eta+\lambda}^{(r)} \quad \text{на } \gamma .$$

Потребуем, чтобы выполнились условия

$$g_\eta^{(r)} = i\varphi, \qquad g_{\eta+\lambda}^{(r)} = 0 \quad (\lambda = 1,2,\ldots, \xi-\eta-1) \quad \text{на } \gamma \tag{6.6}$$

тогда будет иметь место соотношение

$$\theta g^{(r)} = ik\varphi \quad \text{на } \gamma \tag{6.7}$$

[в трех последних равенствах $r = 1,\ldots, {}^1/_2\,(n-l)$].

На главные части функции изменяемости основных интегралов и на коэффициенты разложений этих функций наложим такие же контурные условия, как и в § 5:

$$f_0{}^{(q)} = i\varphi, \quad \operatorname{Re}\{f_{0\alpha}{}^{(q)}\} > 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{6.8}$$

$$\left(q = 1, \ldots \tfrac{1}{2} l\right)$$

$$f_{\varkappa+\lambda}{}^{(q)} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, \zeta - \varkappa - 1) \quad \text{на} \quad \gamma \tag{6.9}$$

Тогда выполнится контурное соотношение

$$kf^{(q)} = ik\varphi \quad \text{на} \quad \gamma \quad \left(q = 1, \ldots, \frac{1}{2} l\right) \tag{6.10}$$

6. Функции $g_{\eta+\lambda}$ определяются из уравнений вида (4.1), которые на γ не имеют особых точек (§ 4). Функции $f_{\varkappa+\lambda}$ определяются из уравнений (3.1), которые на γ также не имеют особых точек, так как f_0 на γ не может иметь стационарных точек в силу граничных условий, а особые точки L и точки касания характеристик оператора L, принадлежащих различным семействам, на γ отсутствуют по предположению. Отсюда вытекает, что если коэффициенты (1.1) достаточно гладкие, то $g_{\eta+\lambda}$ и $f_{\varkappa+\lambda}$ будут в окрестности γ также достаточно гладкими и, следовательно, будут выполняться условия

$$\operatorname{Re}\{g_\alpha{}^{(r)}\} > 0, \qquad \operatorname{Re}\{f_\alpha{}^{(q)}\} > 0 \quad \text{на} \quad \gamma$$

обеспечивающие затухание всех слагаемых правой части (6.3) в окрестности γ.

7. Внеся в контурное условие (5.1) выражение (6.3) и учтя (6.7), (6.10), получим при помощи соотношений вида (1.7)

$$\sum_{q=1}^{q=l/2} k^{\mu} \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-u} D_{v,q}{}^{(\mu,0)} (\Phi_u{}^{(q)}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=\frac{1}{2}(n-l)} k^{\mu} \sum_{v=0}^{v=\mu} k^{-v} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-u} D_{v;r}{}^{(\mu,0)} (\Psi_u{}^{(r)}) = k^{\mu} g^{(\mu)} \quad \text{на} \quad \gamma$$

Отсюда могут быть получены контурные условия для $\Phi_u (u < R)$ и Φ_R по схеме, кратко описанной в § 5.

8. Итак, при $t < t_0$ задача A для уравнения (1.1) имеет решения, затухающие от γ внутрь области Γ тем быстрее, чем больше k, т. е. чем быстрее колеблются функции, входящие в контурные условия.

Если выполняются предположения, аналогичные предположениям (a), (b) и (c), § 5, то будет обеспечена ограниченность остаточного члена [1] и при неограниченно возрастающем k решение задачи A со сколь угодно большой точностью можно строить при помощи суперпозиции основных интегралов и интегралов с опорным контуром, проходящим вдоль границы γ.

Приближенное построение основных интегралов, входящих в решение задачи A, сводится к интегрированию уравнения (1.15) с контурными

[1] Заметим, что до сих пор не было необходимости требовать, чтобы при $t < t_0$ оператор N был эллиптическим, но, конечно, это будет существенным для выполнения предположения (c).

условиями (6.8), уравнений (3.1), (3.2) с контурными условиями (6.9) и уравнений (3.3) при заданных контурных значениях $\overline{\Phi}_u$. Так же как в § 5, все эти операции сводятся к последовательному решению в окрестности γ некоторого числа задач Коши для линейных уравнений первого порядка.

Приближенное построение интегралов с опорным контуром, входящих в решение задачи A, сводится к интегрированию уравнений (1.17) с контурным условием $f_0 = 0$, уравнений вида (4.1) с контурными условиями (6.6) и уравнений (4.2) при заданных контурных значениях $\Phi_u (u < R)$. Сведение нелинейного уравнения (1.17) к некоторому числу линейных уравнений невыполнимо, но так как интегралы с опорным контуром γ, так же как основные интегралы, достаточно построить только в окрестности γ и практически эта окрестность будет весьма узкой (см. ниже), то описанный в § 4 метод решения уравнения (1.17) вполне приемлем.

9. С асимптотической погрешностью порядка $k^{-\rho+1}$ основные интегралы, входящие в решение задачи A, при $t = 1/(n - l + \rho) < t_0$ могут быть построены при помощи приближенного уравнения (3.4). Поправки, которые вносятся учетом оператора N, сказываются только на свободных членах уравнений и граничных условий, определяющих коэффициенты разложения функций изменяемости и интенсивности.

10. Затухание основных интегралов и интегралов с опорным контуром γ имеет неодинаковый характер. Скорость затухания основных интегралов при $t < t_0$ всегда меньше, чем скорость затухания интегралов с заданным опорным контуром [1], кроме того, скорость затухания основного интеграла зависит от показателя изменяемости, в то время как скорость затухания интегралов с заданным опорным контуром остается стабильной.

При $t = 0$ основные интегралы утрачивают свойства затухания. Одновременно предлагаемый метод становится непригодным для построения основных интегралов (так как параметр k не будет уже большим), но он не утрачивает силу для построения интегралов с заданным опорным контуром (так как θ остается большим).

При $t = 0$ для построения основного интеграла может быть с успехом применен обычный метод малого параметра. В работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [3] весьма детально рассмотрена задача A для случая $t = 0$ (считается, что в граничные условия не входит параметр). Для построения основных интегралов в [3] применялся процесс последовательных приближений, а для построения интегралов с опорным контуром γ (погранслоя в терминах статьи [3]) использован метод, сходный с изложенным здесь и употреблявшимся еще в монографии [2].

Результаты М. И. Вишика и Л. А. Люстерника могут быть, конечно, использованы и для случая $t > 0$, но чем больше t, тем они будут менее эффективны. При $t \geqslant t_0$ прием, примененный в [3], становится совершенно непригодным.

Замечание. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник ввели термин «погранслой», подразумевая под этим всякий интеграл, обладающий свойством экспоненциального затухания. Таким же свойством обладают и интегралы с опорным контуром. Однако эти два

---

[1] Это и послужило основанием для введения термина «основной интеграл» (интеграл, глубже проникающий внутрь области).

понятия не идентичны. По М. И. Вишику и Л. А. Люстернику все интегралы, из которых слагается решение задачи A, при $t < t_0$ должны быть отнесены к погранслою, в то время как с точки зрения примененной здесь терминологии решение задачи A состоит из основных интегралов и интегралов с опорным контуром γ (различие между ними описано выше).

При $t < t_0$ в решение задачи A входят интегралы с опорным контуром γ, которые могут быть построены только в том случае, если граница рассматриваемой области не касается характеристик оператора L. Если γ проходит вдоль характеристик L или хотя бы касается их, то свойства решений задачи A существенно меняются. Этим, например, объясняется в теории тонких упругих оболочек тот факт, что напряженное состояние открытой цилиндрической оболочки или оболочки с отверстием столь резко отличается от напряженного состояния замкнутой цилиндрической оболочки, не имеющей отверстия (характеристики оператора L в этом случае совпадают с образующими цилиндра).

Для изучения задач, в которых граница области проходит вдоль характеристики оператора L, в [2] было введено понятие об интеграле с характеристическим опорным контуром (в работе [3] аналогичное понятие получило название параболического погранслоя).

§ 7. 1. Рассмотрим задачу B для уравнения (1.1). Под этим понимается интегрирование уравнения (1.1) с выполнением контурных условий

$$D^{(\mu,0)}(\Phi) = g^{(\mu)}e^{ik\varphi} \quad \text{на } \gamma \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Здесь γ — кривая, нигде не касающаяся характеристик оператора N и совмещенная с линией $\alpha = \alpha_0$ (если нужно, при помощи предварительного действительного преобразования независимых переменных); $\varphi(\beta)$ — действительная функция, $\varphi'(\beta)$ нигде не обращается в нуль. Параметры задачи считаются достаточно гладкими в том же смысле, как и в § 6. Задача B решается в общем по той же схеме, что и задача A. Кроме того, есть много общего в решениях задачи B для уравнений с параметром и без параметра. Пользуясь возможностью сослаться на соответствующие параграфы этой статьи и статьи [1], мы сократим пояснения.

2. Если t — показатель изменяемости задачи B — больше t_0, то ее решение приближенно может быть составлено при помощи суперпозиции основных интегралов с тем же показателем изменяемости, т. е. при помощи интегралов, соответствующих семействам характеристик оператора N. А именно, можно положить

$$\Phi = \sum_{q=1}^{q=n} \Phi_{*}^{(q)} e^{kf^{(q)}} \tag{7.1}$$

где суммирование распространяется на все n семейств характеристик N (предполагается, что N не имеет кратных семейств характеристик).

На главные части функций изменяемости и на коэффициенты разложения этих функций должны быть наложены контурные условия

$$f_0^{(q)} = i\varphi(\beta), \quad f_{\varkappa+\lambda} = 0 \quad \text{на } \gamma \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \zeta - \varkappa - 1) \tag{7.2}$$

Тогда для коэффициентов разложений функций интенсивности и для остаточных членов контурные условия могут быть выведены так же, как это делалось при решении задачи B в [1].

Определение главной части функции изменяемости и коэффициентов разложения функций изменяемости и интенсивности, так же как и в § 5, сводится в конечном итоге к последовательному решению задач Коши для линейных уравнений первого порядка. Эти уравнения не будут иметь особых точек в окрестности γ, если принять, что на γ нет точек взаимного касания характеристик N, принадлежащих различным семействам. С асимптотической погрешностью порядка $k^{-\rho+1}$ решение задачи B может быть построено при помощи приближенного уравнения (2.7).

Если оператор N — вполне гиперболический, то все $f_0^{(q)}$ в силу условий (7.2) будут чисто мнимыми функциями. Если, кроме того, $t > 1/(n-l-1)$, т. е. $\rho > 1$, то функции $f_{\varkappa+\lambda}$ будут тождественно равны нулю (см. § 2) и решение задачи B будет иметь обычный для таких задач колебательный характер. Однако если t заключено в пределах

$$\frac{1}{n-l} = t_0 < t < \frac{1}{n-l-1}$$

то функции $f_{\varkappa+\lambda}$ нельзя полагать равными нулю и в окрестности γ, входящей в Γ, в суммы (7.1) будут, вообще говоря, входить слагаемые, быстро (при $k \to \infty$) возрастающие.

3. Если показатель изменяемости задачи B меньше t_0 и если γ не касается ни характеристик L, ни характеристик N, то приближенное решение составляется из суммы основных интегралов, соответствующих всем l семействам характеристик L, и суммы интегралов с опорным контуром γ, соответствующих всем $n-l$ корням уравнения (4.6).

Интеграл с опорным контуром γ надо брать в виде (6.1), (6.2), считая, что ξ и η подчинены соотношениям (6.5). На коэффициенты разложения функции изменяемости интегралов с опорным контуром γ должны быть наложены требования

$$g_\eta^{(r)} = i\varphi, \qquad g_{\eta+\lambda} = 0 \quad \text{на } \gamma \qquad (\lambda = 1, \ldots, \xi-\eta-1 \quad r = 1, \ldots, {}^1\!/_2(n-l))$$

а на главную часть функций изменяемости основных интегралов и на коэффициенты разложения этих функций требования

$$f_0^{(q)} = i\varphi, \qquad f_{\varkappa+\lambda}^{(q)} = 0 \quad \text{на } \gamma\,(\lambda = 0, 1, \ldots, \zeta-\varkappa-1,\ q = 1, \ldots, {}^1\!/_2 l))$$

Тогда контурные условия, накладываемые на коэффициенты разложения функций интенсивности и на остаточные члены, как для основных интегралов, так и для интегралов с опорным контуром γ определяются так же, как и в случае $t > t_0$. В рассмотренном случае построение функции (1.4) для основных интегралов сведется к последовательному решению задачи Коши для уравнений первого порядка, из которых одно (определяющее главную часть функции изменяемости) нелинейное. Все эти уравнения в окрестности γ не будут иметь особых точек, если коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладки, если это уравнение не имеет на γ особых точек, если на γ нет точек взаимного касания характеристик L, принадлежащих различным семействам.

4. Если $t < t_0$, то в решение задачи B входят все интегралы с опорным контуром γ, в том числе и те, которые вблизи γ быстро возрастают при удалении в направлении Γ. Поэтому при малых t решение задачи B, даже если L и N — вполне гиперболические операторы, будет только в исключительных случаях иметь чисто колебательный характер.

§ 8. 1. Рассмотрим задачу о построении частного интеграла уравнения

$$hN(\Phi) + L(\Phi) = \psi(\alpha, \beta)\, e^{kf(\alpha, \beta)} \tag{8.1}$$

где, так же как в статье [1], f — чисто мнимая, достаточно гладкая функция, не имеющая стационарных точек в интересующей нас области, ψ — достаточно гладкая функция (вообще комплексная), а k — достаточно большая действительная константа.

Считая, что k и h связаны соотношением (1.2), мы будем называть t показателем изменяемости свободного члена.

2. Пусть показатель изменяемости свободного члена есть рациональное число и выполняется одно из трех соотношений:

$$t \leqslant \frac{1}{n-l+1}, \qquad t \geqslant \frac{1}{n-l-1}, \qquad t = \frac{1}{n-l} = t_0 \tag{8.2}$$

Тогда частный интеграл (8.1) можно искать в виде

$$\Phi = k^m \Phi_* e^{kf}, \qquad \Phi_* = \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-u} \Phi_u \tag{8.3}$$

где ζ выбирается так, чтобы $1/t$ было числом вида $\sigma + \tau/\zeta$. Подставив (8.3) в (8.1), получим соотношение, аналогичное (1.11):

$$k^{m+n-1/t}\left\{\sum_{s=0}^{s=n+R}{}^{*}\sum_{p=0}^{p=s}{}^{*} k^{-s} N_{s-p}(\Phi_p)\right\} + k^{m+l}\left\{\sum_{r=0}^{r=l+R}{}^{*}\sum_{u=0}^{u=r}{}^{*} k^{-r} L_{r-u}(\Phi_u)\right\} = \psi$$

$$(r-u \leqslant l; \quad u \leqslant R; \quad s-p \leqslant n; \quad p \leqslant R)$$

Следуя прежнему пути, надо в этом уравнении приравнять справа и слева коэффициенты при одинаковых степенях k. Тогда могут иметь место три случая.

(a) Если

$$l = n - 1/t + \rho \qquad (\rho \geqslant 1)$$

то, положив $m = -l$, получим систему

$$L_0\Phi_0 = \psi$$

$$L_0\Phi_r = -\sum_{u=0}^{u=r-1/\zeta}{}^{*} L_{r-u}(\Phi_u)$$

$(r-u \leqslant l;\ \ r = 0,\ 1/\zeta,\ 2/\zeta, \ldots, \vartheta - 1/\zeta;\ \ \vartheta$ — наименьшее из чисел ρ и $R)$

$$L_0\Phi_r = -\sum_{u=0}^{u=r-1/\zeta} L_{r-u}(\Phi_u) - \sum_{p=0}^{p=r-\rho}{}^{*} N_{r-p-\rho}(\Phi_p) \tag{8.4^1}$$

$$(r-u \leqslant l; \quad r-p-\rho \leqslant n; \quad r = \rho,\ \rho + 1/\zeta,\ \rho + 2/\zeta, \ldots, R - 1/\zeta)$$

$$\sum_{r=R}^{r=l+R}{}^{*}\sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-r} L_{r-u}(\Phi_u) + \sum_{s=R+1}^{s=n+R+\rho}{}^{*}\sum_{p=0}^{p=s-\rho}{}^{*} k^{-s} N_{s-\rho-p}(\bar{\Phi}_p) = 0$$

$$(r-u \leqslant l; \quad s-p-\rho \leqslant n)$$

---

[1] Эти соотношения имеют место только при $R > \rho$.

(b) Если $l = n - 1/t - \rho$ $(\rho \geqslant 1)$, то, положив $m = 1/t - n = -(l+\rho)$, получим систему

$$N_0\Phi_0 = \psi$$

$$N_0\Phi_s = -\sum_{p=0}^{p=s-1/\zeta}{}^{*} N_{s-p}(\Phi_p)$$

$(s - p \leqslant n,\ s = 0,\ 1/\zeta,\ 2/\zeta, \ldots, \theta - 1/\zeta;\ \theta$ — наименьшее из чисел ρ и $R)$

$$N_0\Phi_r = -\sum_{p=0}^{p=s-1/\zeta} N_{s-p}(\Phi_p) - \sum_{u=0}^{u=s-1/\zeta} N_{s-u-\rho}(\Phi_u) \qquad (8.5)^{1}$$

$(s - p \leqslant n;\ s - u - \rho \leqslant l;\ s = \rho,\ \rho + 1/\zeta,\ \rho + 2/\zeta, \ldots, R - 1/\zeta)$

$$\sum_{s=R}^{s=n+R}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=R}{}^{*} k^{-s} N_{s-p}(\Phi_p) + \sum_{r=R+1}^{r=l+R+\rho}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=r-\rho} k^{-r} L_{r-\rho-u}(\Phi_u) = 0$$

$(s - p \leqslant n;\ r - \rho - u \leqslant l)$

(c) Если $l = n - 1/t$, то, положив $m = -l = 1/t - n$ и $\zeta = 1$, получим систему

$$(L_0 + N_0)\Phi_0 = \psi$$

$$(L_0 + N_0)\Phi_r = -\sum_{u=0}^{r=r-1/\zeta}{}^{*} L_{r-u}(\Phi_u) - \sum_{p=0}^{p=s-1/\zeta}{}^{*} N_{s-p}(\Phi_p) \qquad (8.6)$$

$(r - u \leqslant l;\ s - p \leqslant n;\ r, s = 1{,}1 + 1/\zeta, \ldots, R - 1/\zeta)$

$$\sum_{r=R}^{r=l+R}{}^{*} \sum_{u=0}^{u=R}{}^{*} k^{-r} L_{r-u}(\Phi_u) + \sum_{s=R}^{s=n+R}{}^{*} \sum_{p=0}^{p=R}{}^{*} k^{-s} N_{s-p}(\Phi_p) = 0$$

$(r - u \leqslant l\quad s - p \leqslant n)$

3. Системы (8.4), (8.5) или (8.6), вообще говоря, позволяют последовательно определить все коэффициенты разложения функции интенсивности при помощи алгебраических операций. Однако для этого надо требовать, чтобы во всех точках интересующей нас области

(a) при $t < 1/(n - l + 1)$ было отлично от нуля выражение L_0, т. е. чтобы линии уровня функции изменяемости свободного члена не касались характеристик оператора L;

(b) при $t > 1/(n - l - 1)$ было отлично от нуля выражение N_0, т. е. чтобы линии уровня функции изменяемости свободного члена не касались характеристик оператора N;

(c) при $t = 1/(n - l)$ было отлично от нуля выражение $L_0 + N_0$ (это требование уже не имеет столь простого геометрического смысла).

4. Если выражения L_0, N_0, $L_0 + N_0$ при соответствующих значениях t в рассматриваемой области всюду равны нулю, то мы будем иметь случай,

---

[1] Эти соотношения имеют место только при $R > \rho$.

сходный с резонансным, т. е. значения показателя m увеличатся на одну единицу (если характеристики соответствующего оператора однократны).

Коэффициенты разложения функций интенсивности при этом будут определяться уже из линейных дифференциальных уравнений первого порядка. На подробностях мы здесь не останавливаемся. Их можно найти в статье [1].

§ 9. Изложенные здесь результаты допускают различные обобщения.

1. Обобщение на случай большего чем два числа независимых переменных тривиально. Пересмотру подлежат только те утверждения, которые основаны на разложении левых частей уравнений (1.15) и (1.16) на линейные (относительно $f_{0\alpha}$, $f_{0\beta}$) множители.

2. Обобщение на случай, когда операторы L (при $t < t_0$) или N (при $t > t_0$) имеют кратные семейства характеристик, может быть получено без изменения формы (1.3) искомого интеграла. Однако при этом вопрос о выборе значения дроби $\varkappa / \zeta$ требует кропотливых рассуждений, связанных с рассмотрением весьма большого числа различных вариантов.

3. Обобщение на случай, когда вместо уравнения (1.1) мы имеем систему линейных дифференциальных уравнений, принципиальных затруднений не вызывает. Здесь может быть применен прием подбора непротиворечивых значений показателей интенсивности описанный в монографии [2].

Замечание. Широко известен построенный Адамаром пример неустойчивости решения задачи Коши для уравнения эллиптического типа (см., например, [4]). Нетрудно видеть, что он получается как частный случай решения, рассмотренный в [1], задачи B для эллиптического уравнения, не содержащего параметра, когда в начальные условия входят быстро колеблющиеся функции. Лакс в статье [5] обратил внимание на то, что это явление естественно обнаруживается в процессе применения асимптотического интегрирования: оно связано просто с тем фактом, что функция изменяемости будет чисто мнимой только для вполне гиперболического уравнения. Результаты, полученные здесь в § 7 пп. 2,4, показывают, что если решается задача Коши для уравнения гиперболического типа с малой главной частью, то возможны и явления, асимптотически приближающиеся к явлению, вскрытому в примере Адамара, а именно, если контурное условие, сформулированное для задачи B в § 7, фиксировано, то можно подобрать столь малое значение h в уравнении (1.1), что Φ станет в близких к γ внутренних точках Γ больше любого наперед заданного числа.

Поступила 1 VIII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра, ПММ, т. XXII, вып. 5, 1958.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТЛ, М., 1953.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, Успехи математических наук, т. XII, вып. 5 (77), 1957.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической функции, ГИТТЛ, 1947.
5. Lax P. D. Asymptotic solutions of oscullatory initial value problems, Duke Math. Journ., vol. 24, № 4, 1957.