Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КОНЕЧНОЙ ФОРМЕ

В. С. Пугачев
(Москва)

Излагается применение общей формулы для решения линейного интегрального уравнения первого рода, к которому приводится решение ряда задач статистической теории оптимальных систем, полученной в [3], к случаю, когда ядро уравнения представляет собой корреляционную функцию случайной функции, связанной линейным дифференциальным уравнением с белым шумом. При этом сначала рассматривается случай бесконечного интервала наблюдения, а затем результаты применяются к случаю конечного интервала наблюдения. В итоге из общей формулы автора весьма просто выводится решение, данное для нестационарного случая Лэнингом [12]. Из этого решения в качестве частных случаев вытекают ранее известные решения частных задач Долфа и Вудбери [11], Заде и Рагаццини [7, 8] и В. М. Семенова. Ранее в [3] было показано, что из общей формулы автора получаются также в качестве частных случаев известные результаты Винера [6] и Бутона [9] для случая бесконечного интервала наблюдения. Таким образом, результаты данной статьи завершают доказательство того факта, что все известные методы определения оптимальных линейных систем весьма просто получаются применением одного общего метода — метода канонических представлений случайных функций.

1. Введение. Общая задача определения оптимальной (в статистическом смысле) динамической системы состоит в том, чтобы по результатам наблюдения некоторой случайной функции в интервале времени $s - T \leqslant t \leqslant s$ воспроизвести с возможно большей точностью значение некоторой другой случайной функции в момент времени s. Эта задача является частным случаем общей математической задачи нахождения оптимальной оценки одной случайной функции $W(s)$ путем преобразования реализации другой случайной функции $Z(t)$, наблюдаемой в некоторой области T изменения аргумента t. При этом аргументы t и s в общем случае могут быть любыми скалярными или векторными переменными или даже элементами произвольных абстрактных пространств. К этой математической задаче приводятся, в частности, следующие технические задачи: измерение и экстраполяция переменных величин, автоматическое сопровождение движущихся объектов, прием радиосигналов в присутствии естественных или искусственных помех, воспроизведение звука и изображений, проектирование систем управления полетом, систем управления станками и производственными процессами, прогноз погоды и т. д. При решении подобных задач приходится пользоваться различными вероятностными критериями оптимума, выбор которых определяется конкретным характером каждой данной задачи. Методы решения подобных задач составляют содержание современной статистической теории оптимальных систем.

Фундаментальное значение для всех общих методов определения оптимального оператора по различным вероятностным критериям имеет задача нахождения линейного оператора A, удовлетворяющего уравнению вида

$$A_t K_x(t,\ u) = f(s,\ u) \qquad (u \in T) \tag{1.1}$$

где $K_x(t,\ u)$ — корреляционная функция некоторой случайной функции $X(t)$, представляющей собой помеху (шумы, ошибки измерений и т. п.) или сумму помехи и нерегулярно изменяющейся части случайного полезного сигнала, $f(s,\ u)$ — известная функция, а индекс t у оператора A показывает, что этот оператор действует над функцией K_x, рассматриваемой как функция t при фиксированном значении u. Уравнение (1.1) должно удовлетворяться при всех значениях u, принадлежащих области наблюдения T.

Первоначально уравнение (1.1) возникло как уравнение, определяющее оптимальный линейный оператор по критерию минимума средней квадратической ошибки [1]. Н. И. Андреев показал, что к этому же уравнению сводится и задача определения оптимального линейного оператора по более общему критерию экстремума данной функции математического ожидания и дисперсии ошибки [5] (см. также [1]). Частный случай уравнения (1.1) был получен в [12] при определении оптимального оператора по критерию минимума математического ожидания данной функции ошибки при нормальном распределении помехи, а также при решении различных частных задач теории оптимальных систем в ряде других работ. В последнее время был разработан общий метод определения оптимального оператора при нормальном распределении помехи по произвольному критерию, принадлежащему классу бейесовых критериев, также основанный на решении уравнений вида (1.1) [4].

Уравнение (1.1) решалось в различных частных случаях в ряде работ [6–12]. В [2] дано общее решение уравнения (1.1) в форме бесконечного ряда, полученное при помощи метода канонических разложений случайных функций (см. также [1]). Это решение дает возможность во всех случаях (при любых скалярных или векторных функциях $X(t)$ и $f(s,\ u)$ произвольных скалярных или векторных переменных $t,\ s,\ u$) находить приближенное решение уравнения (1.1), пригодное для численных расчетов. В частности, это решение позволяет находить оптимальные одномерные (с одним входом и одним выходом) и многомерные (с несколькими входами и выходами) автоматические линейные системы, предназначенные для воспроизведения сигналов в присутствии помех. В [3] дано общее решение уравнения (1.1) в конечной форме, полученное при помощи метода интегральных канонических представлений случайных функций. Практическое применение этого решения ограничивается случаями, когда удается найти интегральное каноническое представление случайной функции X. Из этого общего решения в [3] получена, в частности, формула для весовой функции (ядра) линейного интегрального оператора A, удовлетворяющего уравнению (1.1) в случае, когда t и s представляют собой непрерывно изменяющиеся скалярные переменные (в частном случае моменты времени), а областью наблюдения T является бесконечный интервал $-\infty < t \leqslant s$. В этом случае уравнение (1.1) представляет собой линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-\infty}^{s} K_x(t,\ u)\, g(s,\ t)\, dt = f(s, u) \qquad (-\infty < u \leqslant s) \tag{1.2}$$

где $g(s,\ t)$ — весовая функция искомого линейного интегрального оператора A. Решение уравнения (1.2), полученное в [3], имеет вид:

$$g(s,\ t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{w^-(\lambda,\ t)\, d\lambda}{G(\lambda)} \int_{-\infty}^{s} f(s,\ u)\, w^-(\lambda,\ u)\, du \tag{1.3}$$

где $w^-(t,\ \tau)$ — весовая функция линейной системы, преобразующей случайную функцию $X(t)$ в белый шум $V(t)$, а $G(t)$ — плотность дисперсии [1] белого шума $V(t)$. Линейная система с весовой функцией $w^-(t,\ \tau)$ является обратной по отношению к линейной системе с весовой функцией $w(t,\ \tau)$, формирующей данную случайную функцию $X(t)$ из белого шума $V(t)$.

В [3] показано, что из общей формулы (1.3) вытекают в качестве частных случаев ранее известные формулы Винера [6] и Бутона [9]. В данной статье мы покажем, что из формулы (1.3) вытекают также все известные решения в конечной форме уравнения (1.1), полученные в задачах определения оптимальных одномерных линейных систем для конечного интервала наблюдения $s - T \leqslant t \leqslant s$. Этим завершается построение общей теории решения уравнений вида (1.1), основанной на едином математическом методе — методе канонических представлений случайных функций. Таким образом, результаты данной статьи вместе с результатами работ [1-4] позволяют утверждать, что метод канонических представлений случайных функций является основой современной статистической теории оптимальных систем.

2. Случай, когда случайная функция X связана с белым шумом линейным дифференциальным уравнением, а интервал наблюдения бесконечен. Рассмотрим частный случай, когда случайная функция $X(t)$ связана с белым шумом $V(t)$ линейным дифференциальным уравнением

$$F_t X(t) = H_t V(t) \qquad \left(F_t = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k,\ H_t = \sum_{k=0}^{m} b_k D^k,\ D = \frac{d}{dt}\right) \tag{2.1}$$

коэффициенты которого в общем случае могут быть произвольными функциями времени t, имеющими все необходимые для дальнейших выкладок производные, причем $n > m$ (случай $n \leqslant m$ не имеет практического значения, так как в этом случае дисперсия случайной функции X бесконечна). При этом сначала мы ограничимся случаем бесконечного интервала наблюдения $-\infty < t \leqslant s$. Легко видеть, что без потери общности можно считать плотность дисперсии $G(t)$ белого шума V тождественно равной единице, так как общий случай всегда может быть сведен к этому заменой $V(t) = \sqrt{G(t)}\, V_1(t)$. Тогда формула (1.3) примет вид:

$$g(s,\ t) = \int_{-\infty}^{s} w^-(\lambda,\ t)\, d\lambda \int_{-\infty}^{s} f(s,\ u)\, w^-(\lambda,\ u)\, du \tag{2.2}$$

В рассматриваемом случае весовая функция w^- определяется дифференциальным уравнением

$$H_t w^-(t,\ \tau) = F_t \delta(t - \tau) \tag{2.3}$$

Введем весовую функцию $p(t, \tau)$, соответствующую оператору H. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$H_t\, p(t, \tau) = \delta(t - \tau) \tag{2.4}$$

Тогда получим[1]

$$w^-(\lambda, t) = F_t^* p(\lambda, t) \tag{2.5}$$

и формула (2.2) примет вид:

$$g(s, t) = F_t^* \int_{-\infty}^{s} p(\lambda, t)\, \xi(s, \lambda)\, d\lambda, \qquad \xi(s, \lambda) = \int_{-\infty}^{s} w^-(\lambda, u)\, f(s, u)\, du \tag{2.6}$$

Эту формулу можно представить в виде

$$g(s, t) = F_t^* \eta(s, t), \qquad \eta(s, t) = \int_{-\infty}^{s} p(\lambda, t)\, \xi(s, \lambda)\, d\lambda \tag{2.7}$$

Таким образом, формула (2.2) равноценна трем формулам (2.6), (2.7). По этим формулам последовательно вычисляются функции ξ, η и g.

Так как $n > m$, то весовая функция $\overline{w}$, определяемая дифференциальным уравнением (2.3), обязательно будет содержать δ-функцию и ее производные до порядка $n - m$ включительно. Следовательно, функция ξ, определяемая формулой (2.6), будет содержать линейную комбинацию функции f и ее производных до порядка $n - m$ включительно. Остаток правой части формулы (2.6) обращается в нуль при $\lambda = -\infty$. Таким образом, формула (2.6) определяет функцию ξ как интеграл дифференциального уравнения

$$H_t\, \xi(s, t) = F_t f(s, t) \tag{2.8}$$

представляющий собой сумму линейной комбинации функции f и ее первых $n - m$ производных и некоторой функции, обращающейся в нуль при $t = -\infty$.

Формула (2.7) определяет функцию η как интеграл дифференциального уравнения

$$H_t^* \eta(s, t) = \xi(s, t) \tag{2.9}$$

обращающийся при $t = s$ в нуль вместе со своими первыми $m - 1$ производными, т. е. удовлетворяющий конечным условиям

$$\eta(s, s) = \eta_t'(s, s) = \ldots = \eta_t^{(m-1)}(s, s) = 0 \tag{2.10}$$

Итак, определение весовой функции g, удовлетворяющей уравнению (1.2), сводится в рассматриваемом случае к нахождению интеграла уравнения (2.8), представляющего собой сумму линейной комбинации функции f и ее первых $n - m$ производных и функции, обращающейся в нуль при $t = -\infty$, и интегрированию уравнения (2.9) при конечных условиях (2.10). После этого весовая функция g определится по формуле (2.7) при помощи операций дифференцирования, умножения и сложения.

Производная m-го порядка функции η в общем случае имеет разрыв первого рода при $t = s$. Поэтому вследствие того, что $n > m$, функция g, определяемая формулой (2.7), в общем случае содержит линейную ком-

[1] Звездочкой везде отмечены соответствующие сопряженные дифференциальные операторы.

бинацию δ-функции и ее производных до порядка $n - m - 1$ включительно. Выделяя из функции g эту линейную комбинацию δ-функций, выразим функцию g формулой

$$g(s, t) = g_1(s, t) + \sum_{r=0}^{n-m-1} B_r \delta^{(r)}(t - s) \tag{2.11}$$

где g_1 — функция, не содержащая δ-функций. Коэффициенты B_r в формуле (2.11) выражаются через разрывы производных функции η порядка выше $m - 1$ и значения коэффициентов оператора F и их производных при $t = s$ формулой, выведенной в других обозначениях в [12]:

$$B_r = \sum_{h=m}^{n-r-1} \sum_{l=m}^{h} (-1)^{h+r+1} C_h^l a_{h+r+1}^{(h-l)}(s) \Delta_1 \eta^{(l)} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n - m - 1) \tag{2.12}$$

где разрывы производных функции η определяются формулой:

$$\Delta_1 \eta^{(l)} = -\eta_t^{(l)}(s, s) \qquad (l = m, \ldots, n - 1) \tag{2.13}$$

В частном случае, когда оператор H представляет собой единицу, $H = 1$, формулы (2.7), (2.8), (2.9) и (2.11) определяют решение уравнения (1.2) в явном виде:

$$g(s, t) = F_t^* F_t f(s, t) + \sum_{r=0}^{n-1} B_r \delta^{(r)}(t - s) \tag{2.14}$$

3. Случай, когда случайная функция X связана с белым шумом линейным дифференциальным уравнением, а интервал наблюдения конечен. В случае конечного интервала наблюдения $s - T \leqslant t \leqslant s$ и линейного интегрального оператора A уравнение (1.1) представляет собой линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int_{s-T}^{s} K_x(t, u) g(s, t) dt = f(s, u) \qquad (s - T \leqslant u \leqslant s) \tag{3.1}$$

Формула (1.3), а вместе с ней и весь изложенный в предыдущем параграфе метод непосредственно не применимы к уравнению (3.1). Однако уравнение (3.1) можно свести к уравнению (1.2), продолжив функцию f в область $u < s - T$ таким образом, чтобы функция g, определяемая при этом уравнением (1.2), обращалась в нуль при всех $t < s - T$. Тогда уравнение (1.2) совпадет с уравнением (3.1) в интервале $s - T \leqslant u \leqslant s$ и их решения будут тождественными. На основании (2.7) условие

$$g(s, t) = 0 \qquad \text{при } t < s - T \tag{3.2}$$

тождественно условию

$$F_t^* \eta(s, t) = 0 \qquad \text{при } t < s - T \tag{3.3}$$

Следовательно, задача сводится в этом случае к интегрированию уравнения (3.3) при $t < s - T$, вычислению функции ξ для $t < s - T$ по формуле (2.9) и определению функции f для $t < s - T$ путем интегрирования уравнения (2.8). После этого функция g определится методом предыдущего параграфа.

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — какие-нибудь линейно независимые интегралы уравнения (3.3). Тогда его общий интеграл выразится формулой

$$\eta(s, t) = \sum_{r=1}^{n} c_r \eta_r(t) \qquad (t < s - T) \tag{3.4}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.9), получим

$$\xi(s, t) = \sum_{r=1}^{n} c_r \xi_r(t) \qquad (t < s - T) \tag{3.5}$$

где

$$\xi_r(t) = H_t^* \eta_r(t) \qquad (r = 1, \ldots, n;\ t < s - T) \tag{3.6}$$

Подставляя выражение (3.5) в формулу (2.6) при $\lambda = \tau$, умножая ее на весовую функцию $w(t, \tau)$ системы, при помощи которой белый шум $V(t)$ преобразуется в случайную функцию $X(t)$, интегрируя результат по τ в пределах от $-\infty$ до t и принимая во внимание известное соотношение между весовыми функциями взаимно-обратных систем, получим

$$f(s, t) = \sum_{r=1}^{n} c_r f_r(t), \qquad f_r(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t, \tau) \xi_r(\tau)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} t < s - T \\ r = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Формула (3.7) определяет функцию f для $t < s - T$ с точностью до n произвольных постоянных c_r. Для того чтобы найти условия, определяющие эти постоянные, заметим, что функция g, определяемая формулой (2.7), не может содержать производные δ-функции порядка выше, чем $n - m - 1$, так как в противном случае результат преобразования наблюдаемой случайной функции интегральным оператором A, имеющим весовую функцию g, будет содержать составляющую в виде белого шума и его дисперсия будет бесконечной. Для того чтобы это условие было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы функция η была непрерывна при $t = s - T$ вместе со своими первыми $m - 1$ производными. Для этого в свою очередь, как показывает уравнение (2.9), необходимо и достаточно, чтобы функция ξ была непрерывна или имела разрыв первого рода при $t = s - T$. Но функция ξ определяется формулой (2.6) и, как было показано в предыдущем параграфе, содержит линейную комбинацию функции f и ее первых $n - m$ производных. Поэтому функция ξ будет удовлетворять поставленному условию только тогда, когда функция f и ее производные до порядка $n - m - 1$ включительно будут непрерывны при $t = s - T$. Это условие даст $n - m$ уравнений, связывающих величины c_r. Остальные m уравнений получатся из условия совпадения при $t < s - T$ функции η, определяемой формулой (2.7), с интегралом (3.4) уравнения (3.3). Мы получим все эти уравнения позже, а сейчас оставим пока величины c_r неопределенными. Разбивая в формуле (2.6) интервал интегрирования на две части $-\infty < u < s - T$ и $s - T \leqslant u \leqslant s$ и пользуясь выражением (3.7) функции f при $t < s - T$, получим

$$\xi(s, t) = \sum_{r=1}^{n} c_r \xi_r(t) + \int_{s-T}^{t} w^-(t, u) f(s, u)\, du \qquad (s - T \leqslant t \leqslant s) \tag{3.8}$$

где

$$\xi_r(t) = \int_{-\infty}^{s-T} w^-(t, u) f_r(u)\, du \qquad (r = 1, \ldots, n;\ s - T \leqslant t \leqslant s) \tag{3.9}$$

Для определения функции η при $s - T \leqslant t \leqslant s$ по формуле (2.7) необходимо предварительно найти весовую функцию p. Для этого будем рассматривать ее как интеграл уравнения

$$H_t^* p(\lambda, t) = \delta(\lambda - t) \tag{3.10}$$

сопряженного по отношению к уравнению (2.4). Обозначая через $y_1, \ldots, y_m$ интегралы (линейно независимые) уравнения

$$H_t^* y = 0 \tag{3.11}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$y_k^{(h-1)}(s-T) = \delta_{kh} \qquad (k, h = 1, \ldots, m) \tag{3.12}$$

можем представить функцию p формулой

$$p(\lambda, t) = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{m} p_l(\lambda)\, y_l(t) & \text{при } \lambda > t \\ 0 & \text{при } \lambda < t \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\left(p_l(\lambda) = \frac{(-1)^{l+1}}{{}_m(\lambda)} \frac{W[y_1, \ldots, y_{l-1}, y_{l+1}, \ldots, y_m]}{W[y_1, \ldots, y_m]}\right)$$

Здесь $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_k]$ означает вронскиан функций $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_k(\lambda)$.

Подставляя выражение (3.13) весовой функции p и выражение (3.8) функции ξ в формулу (2.7), получим

$$\eta(s, t) = \sum_{l=1}^{m} y_l(t)\left[\sum_{r=1}^{n} c_r z_{lr}(t) + u_l(t)\right] \qquad (s-T \leqslant t \leqslant s) \tag{3.14}$$

где

$$z_{lr}(t) = \int_t^s p_l(\lambda)\, \xi_r(\lambda)\, d\lambda \qquad \left(\begin{matrix} l = 1, \ldots, m \\ r = 1, \ldots, n \end{matrix}\right) \tag{3.15}$$

$$u_l(t) = \int_t^s p_l(\lambda)\, d\lambda \int_{s-T}^{s} w^-(\lambda, u)\, f(s, u)\, du \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{3.16}$$

При $t < s-T$, разбивая интервал интегрирования в (2.7) на две части и выражая функцию ξ при $t < s-T$ формулой (3.5), получим

$$\eta(s, t) = \sum_{l=1}^{m} y_l(t)\left[\sum_{r=1}^{n} c_r z_{lr}(s-T) + u_l(s-T)\right] + \sum_{r=1}^{n} c_r \psi_r(t \tag{3.17}$$

где

$$\psi_r(t) = \int_t^{s-T} p(\lambda, t)\, \xi_r(\lambda)\, d\lambda \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{3.18}$$

Очевидно, что $\psi_r(t)$ есть интеграл уравнения

$$H_t^* \psi_r(t) = \xi_r(t) = H_t^* \eta_r(t) \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{3.19}$$

обращающийся в нуль вместе со своими первыми $m-1$ производными при $t = s-T$. Следовательно,

$$\psi_r(t) = \eta_r(t) - \sum_{l=1}^{m} \eta_r^{(l-1)}(s-T)\, y_l(t) \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{3.20}$$

Подставляя это выражение в формулу (3.17), получим

$$\eta(s, t) = \sum_{l=1}^{m} y_l(t)\left\{\sum_{r=1}^{n} c_r [z_{lr}(s-T) - \eta_r^{(l-1)}(s-T)] + \right.$$

$$\left. + u_l(s-T)\right\} + \sum_{r=1}^{n} c_r \eta_r(t) \tag{3.21}$$

Сравнивая эту формулу с (3.4), видим, что функция η, определяемая при $t < s - T$ формулой (3.21), совпадает с функцией η, определенной ранее как интеграл уравнения (3.3), только тогда, когда выполнены условия

$$\sum_{r=1}^{n} c_r \left[z_{lr}(s-T) - \eta_r^{(l-1)}(s-T) \right] = -u_l(s-T) \qquad (l=1, \ldots, m) \tag{3.22}$$

Условие непрерывности функции f и ее первых $n-m-1$ производных при $t = s - T$ дает остальные уравнения для определения c_r:

$$\sum_{r=1}^{n} c_r f_r^{(k)}(s-T) = f_l^{(k)}(s, s-T) \qquad (k=0, 1, \ldots, n-m-1) \tag{3.23}$$

После нахождения величин c_r путем решения системы линейных алгебраических уравнений (3.22) и (3.23) формулы (3.14) и (2.7) полностью определяют решение уравнения (3.1).

Изложенный метод дает в общем случае функцию η, m-я производная которой имеет разрывы первого рода при $t = s - T$ и $t = s$. Поэтому весовая функция g, определяемая формулой (2.7), в общем случае содержит линейную комбинацию δ-функции и ее производных до порядка $n-m-1$ включительно, соответствующих точкам $t = s - T$ и $t = s$. Выделяя эту линейную комбинацию δ-функций из функции g, получим

$$g(s, t) = g_1(s, t) + \sum_{r=0}^{n-m-1} \left[A_r \delta^{(r)}(t-s+T) + B_r \delta^{(r)}(t-s) \right] \tag{3.24}$$

где g_1 — функция, не содержащая δ-функций, коэффициенты B_r определяются формулами (2.12) и (2.13), а коэффициенты A_r определяются аналогичными формулами

$$A_r = \sum_{h=m}^{n-r-1} \sum_{l=m}^{h} (-1)^{h+r+1} C_h^l a_{h+r+1}^{(h-l)}(s-T) \Delta_0 \eta^{(l)} \tag{3.25}$$

$$(r=0, 1, \ldots, n-m-1)$$

$$\Delta_0 \eta^{(l)} = \eta_l^{(l)}(s, s-T+0) - \eta_l^{(l)}(s, s-T-0) \qquad (l=m, \ldots, n=1) \tag{3.26}$$

Изложенный метод решения интегрального уравнения (3.1) несколько отличается от метода Лэнинга [12], хотя, естественно, приводит к тем же результатам. Вывод решения уравнения (3.1) из общей формулы (2.2), полученной методом интегральных канонических представлений случайных функций, значительно проще, чем формальный вывод Лэнинга. Изложенный метод отличается от метода Лэнинга, в частности, еще тем, что требует решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными постоянными, в то время как метод Лэнинга приводит к необходимости решать систему $n+m$ линейных алгебраических уравнений с $n+m$ неизвестными постоянными. Эти отличия, конечно, не являются принципиальными. Они объясняются тем, что в методе Лэнинга неизвестные функции ξ и η определяются при $t > s - T$ интегрированием уравнений (2.8) и (2.9), в то время как изложенный метод основан на применении формул (2.6) и (2.7), дающих непосредственно необходимые частные интегралы уравнений (2.8) и (2.9). Это и дает возможность уменьшить число неопределенных величин и определяющих их уравнений.

В частном случае, когда оператор H представляет собой единицу: $H=1$, изложенный метод дает известное решение уравнения (3.1), найденное Долфом и Вудбери [11]:

$$g(s, t) = F_t^* F_t f(s, t) + \sum_{r=0}^{n-1} [A_r \delta^{(r)} (t - s + T) + B_r \delta^{(r)} (t - s)] \quad (3.27)$$

В частном случае, когда коэффициенты a_k и b_k в формулах (2.1), определяющих линейные дифференциальные операторы F и H, постоянны, случайная функция X, определяемая дифференциальным уравнением (2.1), является стационарной случайной функцией с дробно-рациональной спектральной плотностью. При этом все дифференциальные уравнения (2.8), (2.9), (3.3) и (3.11) будут линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и, следовательно, интегрируются известными стандартными методами. Если при этом функция $f(s, t)$ представляет собой полином относительно t, то изложенный метод дает известное решение задач Заде и Рагаццини [7,8] и В. М. Семенова.

Изложенный метод, так же как и формулы (1.3) и (2.2), легко обобщается на случай, когда случайный процесс $X(t)$, определяемый уравнением (2.1), длится не бесконечно, а начинается в некоторый конечный момент времени $t_0 < s - T$. Для того чтобы получить решение уравнения (3.1) для этого случая, следует во всех формулах данной статьи заменить $-\infty$ величиной t_0. Это дает, в частности, интересное обобщение задачи Заде и Рагаццини на нестационарные случайные функции, связанные с белым шумом линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Изложенный метод обобщается также на случай векторной случайной функции X, составляющие которой выражаются через некоррелированные белые шумы системой линейных дифференциальных уравнений. Для того чтобы получить это обобщение, достаточно воспользоваться общей формулой для весовых функций, удовлетворяющих системе интегральных уравнений первого рода, в которую превращается в данном случае уравнение (1.1), полученной в [3] при помощи метода интегральных канонических представлений случайных функций, и применить к этой формуле те же рассуждения, при помощи которых изложенный в данной статье метод решения уравнения (3.1) был получен из формулы (2.2).

Пример 1. Найти решение уравнения (3.1) для случая, когда $T = s$, а операторы F и H в уравнении (2.1) выражаются формулами

$$F = a_1(t) D + a_0(t), \qquad H = 1 \quad (3.28)$$

В данном случае решение уравнения (3.1) определяется формулой (3.27) при $n = 1$ и $T = s$. Для нахождения коэффициентов A_0 и B_0 при δ-функциях необходимо определить функцию η и ее разрывы в точках $t = 0$ и $t = s$. Для этого нам понадобится весовая функция $w(t, \tau)$, соответствующая уравнению (2.1). Легко видеть, что в данном случае она определяется формулой

$$w(t, \tau) = \frac{q_1(t)}{a_1(t)\, q_1(\tau)}, \qquad q_1(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)} d\tau\right) \qquad (t > \tau) \quad (3.29)$$

Уравнение (3.3) в данном случае имеет вид:

$$-\frac{d}{dt}[a_1(t)\eta] + a_0(t)\eta = 0 \quad (3.30)$$

Это уравнение первого порядка, и поэтому в формулах (3.4), (3.5) и (3.7) $n=1$. Интегрируя уравнение (3.30) и применяя формулу (3.6), находим

$$\xi_1(t)=\eta_1(t)=\frac{1}{a_1(t)\,q_1(t)} \tag{3.31}$$

Подставляя выражения (3.29) и (3.31) в формулу (3.7), получим

$$f_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{q_1(t)}{a_1^2(\tau)\,q_1^2(\tau)}\,d\tau=q_1(t)\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d\tau}{a_1^2(\tau)\,q_1^2(\tau)}=q_2(t) \tag{3.32}$$

Следовательно, формулы (3.4) и (3.7), определяющие функции η и f при $t<s-T=0$, имеют в данном случае вид:

$$\eta(s,\,t)=\frac{c_1}{a_1(t)\,q_1(t)}\,,\qquad f(s,\,t)=c_1\,q_2(t)\qquad(t<0) \tag{3.33}$$

Для определения неизвестной постоянной c_1 имеем одно уравнение (3.23), представляющее собой условие непрерывности функции f в точке $t=0$. Из этого уравнения находим

$$c_1=\frac{f(s,\,0)}{q_2(0)} \tag{3.34}$$

При $t>0$ функция η определяется уравнениями (2.8) и (2.9), которые дают

$$\eta(s,\,t)=\xi(s,\,t)=F_t\,f(s,\,t)=a_1(t)\,f_t'(s,\,t)+a_0(t)\,f(s,\,t)\qquad(t>0) \tag{3.35}$$

Пользуясь формулами (3.26), (3.33), (3.34) и (3.35) и принимая во внимание (3.29) и (3.32), получим следующее выражение для разрыва функции η при $t=0$:

$$\begin{aligned}\Delta_0\eta&=a_1(0)\,f_t'(s,\,0)+a_0(0)\,f(s,\,0)-\frac{f(s,\,0)}{a_1(0)\,q_1(0)\,q_2(0)}=\\&=a_1(0)\left[f_t'(s,\,0)-\frac{q_2'(0)}{q_2(0)}\,f(s,\,0)\right]\end{aligned} \tag{3.36}$$

Аналогично, пользуясь формулами (2.13), (3.35) и (3.29), находим разрыв функции η при $t=s$:

$$\Delta_1\eta=-a_1(s)\,f_t'(s,\,s)-a_0(s)\,f(s,\,s)=-a_1(s)\left[f_t'(s,\,s)-\frac{q_1'(s)}{q_1(s)}\,f(s,\,s)\right] \tag{3.37}$$

Определив разрывы функции η, находим по формулам (3.25) и (2.12) коэффициенты при δ-функциях:

$$\begin{aligned}A_0&=-a_1(0)\,\Delta_0\eta=-a_1^2(0)\left[f_t'(s,\,0)-\frac{q_2'(0)}{q_2(0)}\,f(s,\,0)\right]\\B_0&=-a_1(s)\,\Delta_1\eta=a_1^2(s)\left[f_t'(s,\,s)-\frac{q_1'(s)}{q_1(s)}\,f(s,\,s)\right]\end{aligned} \tag{3.38}$$

Подставляя выражения A_0 и B_0 в (3.27) и принимая во внимание (3.28), находим искомое решение уравнения (3.1): (3.39)

$$\begin{aligned}g(s,\,t)=&-a_1^2(t)\,f_t''(s,\,t)-2a_1(t)\,a_1'(t)\,f_t'(s,\,t)+[a_0^2(t)-a_0'(t)\,a_1(t)-a_0(t)\,a_1'(t)]\,f(s,\,t)-\\&-a_1^2(0)\left[f_t'(s,\,0)-\frac{q_2'(0)}{q_2(0)}\,f(s,\,0)\right]\delta(t)+a_1^2(s)\left[f_t'(s,\,s)-\frac{q_1'(s)}{q_1(s)}\,f(s,\,s)\right]\delta(t-s).\end{aligned}$$

Эта формула впервые была получена другим способом Долфом и Вудбери [11].

Пример 2. Найти решение уравнения (3.1) для случая, когда $T=s$, а операторы F и H в уравнении (2.1) и функция f определяются формулами

$$F=D^2+2aD+b^2,\qquad H=ke^{\mu t}(D+b),\qquad f(s,\,t)=\lambda_1+\lambda_2 t \tag{3.40}$$

где $a,\ b,\ k,\ \mu$ — постоянные, $b>a>0$.

К этой задаче мы приходим, например, при нахождении по критерию минимума средней квадратической ошибки оптимальной линейной системы, предназначенной для воспроизведения линейной функции времени со случайными коэффициентами [1].

В данном случае уравнение (3.3) имеет вид

$$\eta'' - 2a\eta' + b^2\eta = 0 \tag{3.41}$$

Два его линейно независимых интеграла определяются формулами

$$\eta_1(t) = e^{(a+i\omega_0)t}, \qquad \eta_2(t) = e^{(a-i\omega_0)t} \qquad (\omega_0 = \sqrt{b^2 - a^2}) \tag{3.42}$$

Подставляя выражения (3.42) в (3.6), находим

$$\xi_1(t) = k(b - a_1 - i\omega_0)\, e^{(a_1+i\omega_0)t}, \quad \xi_2(t) = k(b - a_1 + i\omega_0)\, e^{(a_1-i\omega_0)t} \tag{3.43}$$

где для краткости положено

$$a_1 = a + \mu$$

Для определения функций f_1 и f_2 по формуле (3.7) находим предварительно весовую функцию w, которая в данном случае определяется уравнением

$$w_t''(t, \tau) + 2aw_t'(t, \tau) + b^2w(t, \tau) = ke^{\mu t}\,[\delta'(t-\tau) + b\delta(t-\tau)] \tag{3.44}$$

Интегрируя это уравнение, получим (при $t > \tau$)

$$w(t, \tau) = \frac{k}{2i\omega_0}\,[(b - a_1 + i\omega_0)\, e^{-(a-i\omega_0)t+(a_1-i\omega_0)\tau} - (b - a_1 - i\omega_0)\, e^{-(a+i\omega_0)t+(a_1+i\omega_0)\tau}] \tag{3.45}$$

Подставляя выражения (3.43) и (3.45) в формулу (3.7), находим функции f_1 и f_2:

$$f_1(t) = \overline{f_2(t)} = -\frac{k^2}{2a_1}\left[i\omega_0 + \frac{\mu(2a+\mu)}{2(a_1+i\omega_0)}\right] e^{(a_2+i\omega_0)t} \tag{3.46}$$

где

$$a_2 = a_1 + \mu = a + 2\mu$$

Для определения функций ξ_1 и ξ_2 при $t > 0$ необходимо предварительно найти весовую функцию w^-. Определяющее ее уравнение (2.3) имеет в данном случае вид:

$$ke^{\mu t}\left[\frac{\partial w^-(t, \tau)}{\partial t} + bw^-(t, \tau)\right] = \delta''(t-\tau) + 2a\delta'(t-\tau) + b^2\delta(t-\tau) \tag{3.47}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$w^-(t, \tau) = \frac{e^{-\mu t}}{k}\,[\delta'(t-\tau) + (2a - b + \mu)\,\delta(t-\tau)] + \frac{e^{-\mu\tau}}{k}\,[2b(b-a) - \mu(2b - 2a - \mu)]\, e^{-b(t-\tau)}\, 1(t-\tau) \tag{3.48}$$

Подставляя выражения (3.46) и (3.48) в формулу (3.9), находим выражения функций ξ_1 и ξ_2 при $t > 0$: (3.49)

$$\xi_1(t) = \overline{\xi_2(t)} = -k\nu e^{-bt}, \qquad \nu = \frac{2b(b-a) - \mu(2b - 2a - \mu)}{2a_1(a_1 + b + i\omega_0)}\left[i\omega_0 + \frac{\mu(2a+\mu)}{2(a_1+i\omega_0)}\right]$$

Для дальнейших выкладок необходимо найти интегралы уравнения (3.11), удовлетворяющие условиям (3.12). Уравнение (3.11) имеет в данном случае вид:

$$y' - (b - \mu)y = 0 \tag{3.50}$$

Интеграл этого уравнения, удовлетворяющий начальному условию (3.12), имеет вид

$$y_1(t) = e^{(b-\mu)t} \tag{3.51}$$

Весовая функция p, определяемая уравнением (2.4), в данном случае будет

$$p(t, \tau) = \frac{1}{k}\, e^{-bt}\, e^{(b-\mu)\tau} \tag{3.52}$$

Сравнивая эту формулу с (3.13), находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{k} e^{-b\tau} \tag{3.53}$$

Подставляя выражения (3.49) и (3.53) в формулу (3.15), находим функции z_{11} и z_{12}:

$$z_{11}(t) = \overline{z_{12}(t)} = -\frac{\nu}{2b}(e^{-2bt} - e^{-2bs}) \tag{3.54}$$

Подставляя выражения (3.48), (3.53) и (3.40) в формулу (3.16), находим функцию u_1:

$$u_1(t) = [\beta_1\lambda_2 + \beta_2(\lambda_1 + \lambda_2 t)]\,[e^{-(b+\mu)t} - e^{-(b+\mu)s}] - \beta_3\,[(b-\mu)\lambda_1 - \lambda_2]\,(e^{-2bt} - e^{-2bs}) \tag{3.55}$$

где

$$\beta_1 = 2\frac{a(b^2-\mu^2) - b^2\mu}{k^2(b^2-\mu^2)^2}, \quad \beta_2 = \frac{b^2}{k^2(b^2-\mu^2)}, \quad \beta_3 = \frac{2b(b-a) - \mu(2b-2a-\mu)}{2k^2b(b-\mu)^2} \tag{3.56}$$

Формула (3.14), определяющая функцию η при $t > 0$, имеет в данном случае вид:

$$\eta(s, t) = e^{(b-\mu)t}[c_1 z_{11}(t) + c_2 z_{12}(t) + u_1(t)] \tag{3.57}$$

Уравнения (3.22) и (3.23), определяющие величины c_1 и c_2, имеют вид:

$$c_1[z_{11}(0) - 1] + c_2[z_{12}(0) - 1] = -u_1(0), \quad c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) = \lambda_1 \tag{3.58}$$

Решив эти уравнения и подставив найденные значения c_1 и c_2 в формулу (3.57), мы полностью определим функцию η. Для определения искомой весовой функции $g(s, t)$ остается теперь найти коэффициенты при δ-функциях в формуле (3.24). Пользуясь формулами (2.12), (2.13), (3.25), (3.26) и (3.42), находим

$$A_0 = \Delta_0\eta' = \eta_t'(s, 0) - c_1(a + i\omega_0) - c_2(a - i\omega_0), \qquad B_0 = \Delta_1\eta' = -\eta_t'(s,s) \tag{3.59}$$

Весовая функция оптимальной линейной системы на основании (2.7), (3.24) и (3.59) выразится формулой

$$g(s, t) = \eta_t''(s,t) - 2a\eta_t'(s, t) + b^2\eta(s, t) + [\eta_t'(s, 0) - c_1(a + i\omega_0) - c_2(a - i\omega_0)]\,\delta(t) - \\ - \eta_t'(s, s)\delta(t - s) \tag{3.60}$$

Поступила 17 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.
2. Пугачев В. С. Применение канонических разложений случайных функций к определению оптимальной линейной системы. Автоматика и телемеханика, т. XVII, № 6, стр. 489—499, 1956.
3. Пугачев В. С. Интегральные канонические представления случайных функций и их применение к определению оптимальных линейных систем Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 11, стр. 971—984, 1957.
4. Пугачев В. С. Определение оптимальной системы по произвольному критерию. Автоматика и телемеханика, т. XIX, № 6, стр. 519—539, 1958.
5. Андреев Н. И. Определение оптимальной линейной динамической системы по критерию экстремума функционала частного вида. Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 7, стр. 615—619, 1957.
6. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. John Wiley, New York, 1949.
7. Zadeh L. A., Ragazzini J. R. An extension of Wiener's theory of prediction. J. Appl. Phys., vol. 21, No 7, pp. 645—655, 1950.
8. Zadeh L. A., Ragazzini J. R. Optimum filters for the detection of signals in noise. Proc. IRE, vol. 40, No 8, pp. 1223—1231, 1952.
9. Booton R. C. An optimization theory for time-varying linear systems with nonstationary statistical inputs. Proc. IRE, vol. 40, No 8, pp. 977—981, 1952.
10. Davis R. C. On the theory of prediction of nonstationary stochastic processes. J. Appl. Phys., vol. 23, No 9, pp. 1047—1053, 1952.
11. Dolph C. L., Woodbury M. A. On the relation between Green's functions and covariances of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 72, No 3, pp. 519—550, 1952.
12. Laning J. H., Battin R. H. Random processes in automatic control. Mc Graw — Hill, New York — Toronto — London, 1956.