

К ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

И. М. Юрьев

(Москва)

Излагается метод, который позволяет, исходя от некоторой простой поддающейся решению системы уравнений типа уравнений Чаплыгина для плоского движения газа, получать другие системы уравнений этого типа, содержащие в своих коэффициентах произвольные постоянные. Подбором постоянных можно получить хорошие приближения к уравнениям адиабатического течения газа на больших интервалах изменения скорости. Похожий метод предлагал Перес [1,2].

Но при применяемых в работах [1,2] преобразованиях не сохраняются важные свойства исходных решений. В нашей работе после применения каждого преобразования Лежандра и обобщения функций, образующих коэффициент системы уравнений, применяется обратное преобразование с этими обобщенными функциями. В итоге сохраняются такие важные свойства исходного решения, как продолжимость дозвукового течения в сверхзвуковую [область и равномерность] потока на бесконечности. Метод применен к течениям газа с переходом через скорость звука. За исходное уравнение взято уравнение Трикоми. Получено лучшее приближение к реальным течениям на интервале изменения относительной скорости $0.1 < \lambda < 1.2$. Дан расчет семейства сопел.

§ 1. Изложение метода. Из условия полных дифференциалов выражений

$$\begin{aligned} \cos \vartheta P_1(\lambda) d\varphi_1 - \sin \vartheta Q_1(\lambda) d\psi_1 &= dx_1 \\ \sin \vartheta P_1(\lambda) d\varphi_1 + \cos \vartheta Q_1(\lambda) d\psi_1 &= dy_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $P_1(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ — некоторые заданные функции независимого переменного λ , можно вывести для искомых функций $\varphi_1(\vartheta, \lambda)$ и $\psi_1(\vartheta, \lambda)$ следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = -\frac{Q_1(\lambda)}{P_1'(\lambda)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} = \frac{Q_1'(\lambda)}{P_1(\lambda)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta} \quad (1.2)$$

В каноническом виде система (1.2) имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = \pm V\overline{K_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma} = \mp V\overline{K_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta} \quad (1.3)$$

где

$$V\overline{K_1} = \left(\frac{Q_1(\lambda) Q_1'(\lambda)}{P_1(\lambda) P_1'(\lambda)} \right)^{1/2}, \quad \sigma(\lambda) = \int_1^\lambda \left(\frac{P_1'(\lambda) Q_1'(\lambda)}{P_1(\lambda) Q_1(\lambda)} \right)^{1/2} d\lambda \quad (1.4)$$

Формулы (1.4) можно преобразовать к виду

$$\frac{dQ_1}{d\sigma} = \mp V\overline{K_1} P_1, \quad Q_1 = \mp V\overline{K_1} \frac{dP_1}{d\sigma} \quad (1.5)$$

В зависимости от поведения функций $P_1(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ и их производных система (1.3) и формулы (1.5) берутся вместе либо с верхними знаками перед $V\overline{K_1}$, либо с нижними.

В частности, при $P_1(\lambda) = P(\lambda) = \lambda^{-1}$

$$Q_1(\lambda) = Q(\lambda) = \lambda^{-1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2} \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad (1.6)$$

система (1.3) является системой уравнений Чаплыгина для плоского движения газа. При этом функция $\varphi_1 = \varphi$, $\psi_1 = \psi$ будет потенциалом скорости и функцией тока, $x_1 = x$ и $y_1 = y$ — декартовыми координатами плоскости течения, ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x , λ — величина относительной скорости, $h^2 = (\kappa + 1)/(\kappa - 1)$. При (1.6)

$$V\overline{K_1} = V\overline{K} = \left(\frac{1 - \lambda^2}{(1 - \lambda^2/h^2)h^{\kappa}} \right)^{1/2}, \quad \sigma(\lambda) = s(\lambda) = \int \left(\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2/h^2} \right)^{1/2} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (1.7)$$

и перед \sqrt{K} в формулах (1.3) и (1.5) должны стоять верхние знаки. Каноническая форма уравнений Чаплыгина удобна для исследований и впервые была широко использована в работах С. А. Христиановича [4, 5, 6]. Систему (1.3) при фиксированной функции $\sqrt{K_1(\sigma)}$ можно получить при различных функциях P_1 и Q_1 . В самом деле, формулы (1.5) при фиксированном $\sqrt{K_1}$ представляют собой систему уравнений относительно P_1 и Q_1 . Исключая одну из искоемых функций, получим относительно другой искомой функции линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому в общем виде функции P_1 и Q_1 будут зависеть от двух произвольных постоянных, не входящих в выражение $\sqrt{K_1(\sigma)}$.

Изложим теперь способ получения из системы уравнений (1.3) аналогичных уравнений с новыми произвольными постоянными, входящими в их коэффициенты. Перейдем от функций φ_1, ψ_1 к функциям Φ, Ψ при помощи преобразований Лежандра:

$$\Phi = x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} - \varphi_1, \quad \Psi = x_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} - \psi_1 \quad (1.8)$$

Имеем

$$x_1 = \Phi_{u_1} = -\Psi_{t_1}, \quad y_1 = \Phi_{v_1} = \Psi_{r_1} \quad (1.9)$$

где

$$u_1 = P_1^{-1}(\lambda) \cos \vartheta, \quad v_1 = P_1^{-1}(\lambda) \sin \vartheta, \quad r_1 = Q_1^{-1}(\lambda) \cos \vartheta, \quad t_1 = Q_1^{-1}(\lambda) \sin \vartheta \quad (1.10)$$

Если в системе (1.9) от переменных u_1, v_1, r_1, t_1 перейти к независимым переменным ϑ, λ , а затем привести еще ее к каноническому виду, то окончательно получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = \mp \chi_1(\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \pm \chi_1(\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \left(\chi_1(\lambda) = \sqrt{K_1} \frac{P_1^2}{Q_1^2} \right) \quad (1.11)$$

Функции $P_1(\lambda), Q_1(\lambda)$ являются частным решением системы уравнений

$$\frac{P_2^{*2}}{Q_2^{*2}} \left(\frac{Q_2^*(\lambda) Q_2^{*\prime}(\lambda)}{P_2^*(\lambda) P_2^{*\prime}(\lambda)} \right)^{1/2} = \chi_1(\lambda), \quad \frac{P_2^{*\prime}(\lambda) Q_2^{*\prime}(\lambda)}{P_2^*(\lambda) Q_2^*(\lambda)} = \sigma'^2(\lambda) \quad (1.12)$$

где P_2^* и Q_2^* — искоемые функции. Система (1.12) преобразуется к виду

$$\frac{dq_2^*}{d\sigma} = \pm \chi_1 p_2^*, \quad q_2^* = \pm \chi_1 \frac{dp_2^*}{d\sigma} \quad (p_2^* = P_2^{*-1}, \quad q_2^* = Q_2^{*-1}) \quad (1.13)$$

Отсюда

$$\frac{d^2 p_2^*}{d\sigma^2} + \frac{d \ln \chi_1}{d\sigma} \frac{dp_2^*}{d\sigma} - p_2^* = 0 \quad (1.14)$$

Применяя формулу Лиувилля для вычисления общего решения уравнения (1.14) и учитывая (1.13), получим

$$p_2^* = p_1 (1 + a_1 J_1), \quad J_1 = \int_0^\sigma \frac{Q_1^2}{\sqrt{K_1}} d\sigma$$

$$q_2^* = q_1 (1 \pm a_1 P_{10} Q_{10} - a_1 J_2), \quad J_2 = \int_0^\sigma \sqrt{K_1} P_1^2 d\sigma \quad (1.15)$$

где P_{10} и Q_{10} — значения P_1 и Q_1 при $\sigma = 0$ ($\lambda = 1$), a_1 — постоянная интегрирования. Функции p_2^* и q_2^* вычислены с точностью до произвольного постоянного множителя, не влияющего на общность исследования. Обратным переходом от функций Φ, Ψ к функциям φ_2, ψ_2 по формулам

$$\varphi_2 = u_2^* \frac{\partial \Phi}{\partial u_2^*} + v_2^* \frac{\partial \Phi}{\partial v_2^*} - \Phi, \quad \psi_2 = r_2^* \frac{\partial \Psi}{\partial r_2^*} + t_2^* \frac{\partial \Psi}{\partial t_2^*} - \Psi \quad (1.16)$$

где

$$u_2^* = p_2^*(\lambda) \cos \vartheta, \quad v_2^* = p_2^*(\lambda) \sin \vartheta, \quad r_2^* = q_2^*(\lambda) \cos \vartheta, \quad t_2^* = q_2^*(\lambda) \sin \vartheta \quad (1.17)$$

придем к системе уравнений

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \pm V \overline{K_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma} = \mp V \overline{K_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \vartheta} \quad (1.18)$$

где

$$V \overline{K_2} = \left(\frac{Q_2^*(\lambda) Q_2^{**}(\lambda)}{P_2^*(\lambda) P_2^{**}(\lambda)} \right)^{1/2} = V \overline{K_1} \left(\frac{1 + a_1 J_1}{1 \pm a_1 P_{10} Q_{10} - a_1 J_2} \right)^2 \quad (1.19)$$

Функция $V \overline{K_2}$ может содержать на две произвольные постоянные больше, чем $V \overline{K_1}$. Вторая существенная постоянная c_1 содержится в функциях P_1 и Q_1 , если считать их общим решением системы (1.5) при заданной функции $V \overline{K_1}(\sigma)$.

Увеличивая на единицу индексы в (1.1) и (1.5), получим формулы для расчета плоскости x_2, y_2 , соответствующей системе (1.18), и систему уравнений для функций P_2 и Q_2 , которые вычисляются через свои частные решения $P_2 = P_2^*, Q_2 = Q_2^*$. С точностью до произвольного постоянного множителя получим

$$P_2 = P_2^* \left(1 + c_2 \int_0^\sigma \frac{q_2^{*2}}{\chi_1} d\sigma \right), \quad Q_2 = Q_1 \left(1 \mp c_2 p_{20}^* q_{20}^* - c_2 \int_0^\sigma \chi_1 p_2^{*2} d\sigma \right) \quad (1.20)$$

где p_{20}^* и q_{20}^* — значения p_2^* и q_2^* при $\sigma = 0$, c_2 — постоянная интегрирования. Такой способ приобретения постоянных можно продолжать дальше. Увеличивая в (1.19) индексы на единицу, получим формулу для $V \overline{K_3}$ и т. д. Функция $V \overline{K_3}$ будет содержать уже на четыре произвольные постоянные больше, чем $V \overline{K_1}$. Полагая исходную систему (1.3) достаточно простой для решения, можно попытаться подбором $2(n-1)$ произвольных постоянных приблизить $V \overline{K_n}$ к $V \overline{K}$ адиабатического течения газа. Зависимость между φ_n, ψ_n и φ_1, ψ_1 будет ясна, если найдем ее при $n = 2$.

Обозначим

$$\Phi_{u_2^*} = -\Psi_{t_2^*} = x_2^*, \quad \Phi_{v_2^*} = \Psi_{r_2^*} = y_2^* \quad (1.21)$$

Принимая во внимание формулы (1.16), (1.13), (1.10), (1.9) и (1.5), после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} x_2^* &= \left(\frac{P_2^*}{P_1} \sin^2 \vartheta + \frac{Q_2^*}{Q_1} \cos^2 \vartheta \right) x_1 + \left(\frac{Q_2^*}{Q_1} - \frac{P_2^*}{P_1} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta y_1 \\ y_2^* &= \left(\frac{Q_2^*}{Q_1} - \frac{P_2^*}{P_1} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta x_1 + \left(\frac{P_2^*}{P_1} \cos^2 \vartheta + \frac{Q_2^*}{Q_1} \sin^2 \vartheta \right) y_1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из формул (1.8), (1.16), (1.21) и (1.22) следует

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \left(\frac{Q_2^*}{Q_1 P_2^*} - \frac{1}{P_1} \right) (\cos \vartheta x_1 + \sin \vartheta y_1) \\ \psi_2 &= \psi_1 + \left(\frac{P_2^*}{P_1 Q_2^*} - \frac{1}{Q_1} \right) (\cos \vartheta y_1 - \sin \vartheta x_1) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Увеличивая на единицу индексы в (1.23), получим формулы для функций φ_3, ψ_3 и т. д. Функции P_3^*, Q_3^* вычисляются по формулам, аналогичным (1.15). На основании формул (1.23) и (1.1) заключаем, что функция ψ_2 сохраняет ряд важных свойств исходного решения. Например, если ψ_1 имеет особенность, реализующую на бесконечности невозмущенный поступательный поток, то эту особенность содержит и ψ_2 . Сохраняется также на линии перехода условие продолжимости дозвукового течения в сверхзвуковую область [5,7]. При $P_2^* = P_1, Q_2^* = Q_1$ система (1.18) совпадает с системой (1.3). На основании (1.23) при этом $\psi_2 = \psi_1$.

Заметим, что при аналогичных обстоятельствах у Переса также получается совпадение систем уравнений, но каждое конкретное решение ψ_1 изменяется по формуле $\psi_2 = \psi_1 + \partial^2 \psi_1 / \partial \vartheta^2$. Следовательно, применяемые в работах [1,2] преобразования не сохраняют такие важные физические свойства исходного решения, как, например, свойство продолжимости дозвукового течения в сверхзвуковую область [7].

§ 2. Приложение метода. Расчет сопел. Применим метод к течениям газа с переходом через скорость звука. В исходной системе (1.3) положим

$$\sigma(\lambda) = s(\lambda), \quad \sqrt{K_1} = As^{1/3} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} A\eta^{1/2} \quad (A < 0) \quad (2.1)$$

Переменная $\eta = (-3/2s)^{2/3}$ в эллиптической области принимает положительные значения, в гиперболической — отрицательные. Для P_1 и Q_1 при (2.1) получим уравнение Эйри

$$\frac{d^2 P_1(\eta)}{d\eta^2} - \eta P_1(\eta) = 0 \quad (2.2)$$

Имеем

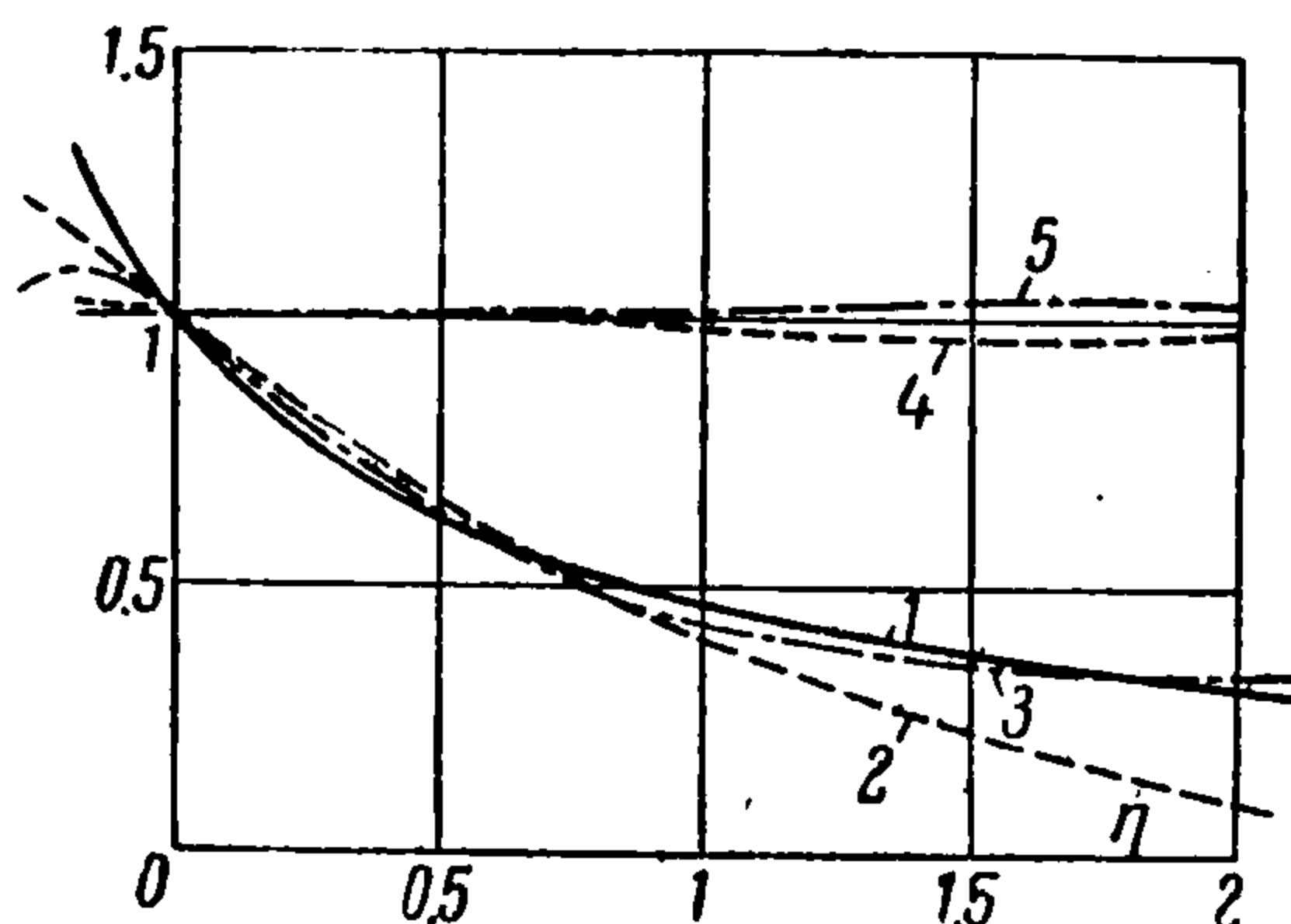
$$P_1 = c_1 k(\eta) + c_2 l(\eta), \quad Q_1 = \mp \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} A (c_1 k'(\eta) + c_2 l'(\eta)) \quad (2.3)$$

где $k(\eta)$ и $l(\eta)$ — линейно независимые решения уравнения (2.2), представляемые сходящимися при всех значениях η рядами:

$$k(\eta) = 1.0899 \left(1 + \frac{\eta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\eta^6}{(2 \cdot 5)(3 \cdot 6)} + \dots\right) + 0.7946 \left(\eta + \frac{\eta^4}{3 \cdot 4} + \frac{\eta^7}{(3 \cdot 6)(4 \cdot 7)} + \dots\right) \quad (2.4)$$

$$l(\eta) = 0.6293 \left(1 + \frac{\eta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\eta^6}{(2 \cdot 5)(3 \cdot 6)} + \dots\right) - 0.4587 \left(\eta + \frac{\eta^4}{3 \cdot 4} + \frac{\eta^7}{(3 \cdot 6)(4 \cdot 7)} + \dots\right)$$

Таблицы этих функций рассчитаны В. А. Фоком [8]. При (2.1) система (1.3) является главной частью системы уравнений Чаплыгина в окрестности $\lambda = 1$, если



Фиг. 1

$$A = A_0 = -3^{1/3} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x+2}{3(x-1)}}$$

и перед $\sqrt{K_1}$ взять верхние знаки.

На фиг. 1 кривая (1) изображает при $x = 1.4$ функцию

$$f = \frac{\sqrt{K}}{A_0 s^{1/3}} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{K}}{A_0 \eta^{1/2}} \quad (2.5)$$

степень отклонения которой от единицы показывает, как мал трансзвуковой интервал изменения η , где решения системы (1.3) при (2.1) и $A = A_0$ могут представлять реальные течения. Кривая (2) изображает зависимость λ от η . Но во многих задачах, как, например, при расчете сопел, имеем большие интервалы изменения скорости.

Для более точной аппроксимации \sqrt{K} ограничимся здесь функцией $\sqrt{K_2}$. При выполнении условия

$$A = A_0 (1 \pm a_1 P_{10} Q_{10})^2 \quad (2.6)$$

функция

$$f_* = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{K_2}}{A_0 \eta^{1/2}} \quad (2.7)$$

в точке $\eta=0$ равна единице. При значениях $c_1=0$, $c_2=1$ и $(2/3)^{1/3} a_1 A = -1.5$ кривая (3) функции f_* близка к точной кривой на большом интервале изменения η (фиг. 1). Из (2.6) находим, что $A = -0.7773$. Заметим теперь, что при $c_1=0$ положительные функции P_1 и Q_1 изменяются противоположно функциям реального течения. Поэтому в данном случае все формулы § 1 берутся с нижними знаками. Таким образом, функции P_2 и Q_2 удовлетворяют системе уравнений типа (1.5) со знаком плюс перед $\sqrt{K_2}$, тогда как функции P и Q адиабатического течения газа удовлетворяют аналогичной системе уравнений со знаком минус перед \sqrt{K} . Из близости $\sqrt{K_2}$ к \sqrt{K} следует, что функции P_* и Q_* системы уравнений

$$\frac{dQ_*}{ds} = -V\overline{K_2}P_*, \quad Q_* = -V\overline{K_2} \frac{dP_*}{ds} \quad (2.8)$$

всегда могут быть выбраны близкими к функциям P и Q . Для этого достаточно потребовать совпадения P_* и Q_* с точными значениями при каком-либо λ из интервала близости $V\overline{K_2}$ к $V\overline{K}$. По частным решениям $P_2 = P_2^*$, $Q_2 = -Q_2^*$ вычислим общее решение

$$P_* = b_1 P_2^* \left(1 + b_2 \int_0^s \frac{q_2^{*2}}{\chi_1} ds \right), \quad Q_* = -b Q_2^* \left(1 + b_2 p_{20}^* q_{20}^* - b_2 \int_0^s \chi_1 P_2^{*2} ds \right) \quad (2.9)$$

При значениях постоянных $b_1 = 1.589$, $b_2 = -0.9702$ функции P_* и Q_* совпадают с точными значениями в точке $\lambda = 1$. На фиг. 1 кривые (4) и (5) представляют функции P/P_* и Q/Q_* . Формулам (2.8) соответствует система уравнений вида (1.18) с верхними знаками перед $V\overline{K_2}$. Имеем $\varphi_* = -\varphi_2$, $\psi_* = \psi_2$, где φ_* и ψ_* — потенциал скорости и функция тока достигнутого приближения к адиабатическому течению. Учитывая, что в формулах типа (1.1) с индексом 2 при $P_2 = P_2^*$, $Q_2 = Q_2^*$ имеем $x_2 = x_2^*$, $y_2 = y_2^*$, получим для вычисления плоскости течения газа следующие формулы:

$$\begin{aligned} dx_* &= \left(\frac{Q_*}{Q_2^*} \sin^2 \vartheta - \frac{P_*}{P_2^*} \cos^2 \vartheta \right) dx_2^* - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{P_*}{P_2^*} + \frac{Q_*}{Q_2^*} \right) dy_2^* \\ dy_* &= - \left(\frac{P_*}{P_2^*} + \frac{Q_*}{Q_2^*} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta dx_2^* + \left(\frac{Q_*}{Q_2^*} \cos^2 \vartheta - \frac{P_*}{P_2^*} \sin^2 \vartheta \right) dy_2^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

Скоростью течения считаем λ . Из близости $V\overline{K_2}$ к $V\overline{K}$ следует, что результаты существенно не изменяются, если считать систему уравнений относительно φ_* и ψ_* точной для фиктивного газа и в соответствии с такой интерпретацией величину скорости определять по формуле $P_*^{-1}(\lambda)$.

Для расчета сопел за исходные данные возьмем следующие, найденные С. В. Фальковичем решения системы (1.3) при (2.1):

$$\psi_1 = \alpha(\vartheta, \eta) + d_1 \beta(\vartheta, \eta) \quad (2.11)$$

$$\alpha(\vartheta, \eta) = -(\vartheta/2)^{1/3} \{ (\vartheta + V\overline{\vartheta^2 + 4/9\eta^3})^{1/3} + (\vartheta - V\overline{\vartheta^2 + 4/9\eta^3})^{1/3} \} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \beta(\vartheta, \eta) &= \left(\frac{2\eta_0^3}{\eta^3 + \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2} \right)^{1/6} F \left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, 1 - \frac{4\eta_0^3\eta^3}{(\eta^3 + \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2)^2} \right) \times \\ &\quad \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{6\eta_0^{3/2}\vartheta}{\eta^3 - \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция, d_1 — произвольная постоянная [9, 10]. Решение (2.11) реализует семейство сопел, у которых течение вверх по потоку вследствие наличия функции $\beta(\vartheta, \eta)$ стремится к равномерному с дозвуковой скоростью, соответствующей величине η_0 . При $\eta < 0$ аргумент функции F больше единицы. Согласно [11] из формулы аналитического продолжения гипергеометрического ряда следует, что при $\eta < 0$

$$\begin{aligned} \beta(\vartheta, \eta) &= \left(\frac{2\eta_0^3}{\eta^3 + \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2} \right)^{1/6} \left\{ \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(11/12)\Gamma(5/12)} F \left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{4\eta_0^3\eta^3}{(\eta^3 + \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^{2/3}\Gamma(-1/3)\eta_0\eta}{\Gamma(1/12)\Gamma(7/12)} \left(\eta^3 + \eta_0^3 + \frac{9}{4}\vartheta^2 \right)^{-2/3} F \left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{4}{3}, \frac{4\eta_0^3\eta^3}{(\eta^3 + \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2)^2} \right) \right\} \times \\ &\quad \times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{6\eta_0^{3/2}\vartheta}{\eta^3 - \eta_0^3 + 9/4\vartheta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Функция $\alpha(\vartheta, \eta)$ является в окрестности $\eta = 0$ главной частью решения (2.11), обеспечивающей выполнение условий продолжимости [7].

Обозначим через x_{*1} , y_{*1} , ψ_{*1} величины x_* , y_* , ψ_* , отвечающие исходному решению (2.12). Функции (2.13) пусть отвечают x_{*2} , y_{*2} , ψ_{*2} . Для большего разнообра-

пользовать известные приближенные решения основных краевых задач сверхзвукового течения газа [12,13]. Течение в области *osd* будет потенциальным, если

$$\text{якобиан } J = \frac{D(\varphi^*, \psi^*)}{D(\vartheta, \lambda)} \neq 0$$

во всех точках этой области. В независимых переменных ϑ, η доказательство потенциальности течения сводится к проверке неравенства

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \vartheta} \neq \pm \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \quad (2.19)$$

в справедливости которого можно убедиться.

Околозвуковой участок сопла приближенно можно вычислить по формулам

$$\vartheta = \vartheta_0 + \left(\frac{d\vartheta}{d\eta}\right)_{\eta=0} (\eta - \eta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} (\eta - \eta_0)^2 \quad (2.20)$$

$$y^* = y^*_0 + \left(\frac{dy^*}{dx^*}\right)_{\eta=0} (x^* - x^*_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y^*}{dx^{*2}}\right)_{\eta=0} (x^* - x^*_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3y^*}{dx^{*3}}\right)_{\eta=0} (x^* - x^*_0)^3$$

где $\vartheta_0, x^*_0, y^*_0$ — значения величин на линии $\eta = 0$, а производные берутся вдоль линии тока.

Вдоль $\psi^* = \text{const}$ имеем

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = - \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} / \frac{\partial \psi^*}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} = \frac{2\psi^*_{,\eta}\psi^*_{,\vartheta\eta}}{\psi^{*2}_{,\vartheta}} - \frac{\psi^*_{,\eta\eta}}{\psi^*_{,\vartheta}} - \frac{\psi^{*2}_{,\eta}\psi^*_{,\vartheta\vartheta}}{\psi^{*3}_{,\vartheta}} \quad (2.21)$$

При помощи формул (2.3), (2.12) и т. д. нетрудно вычислить все необходимые величины. Например,

$$\left(\frac{dy^*}{dx^*}\right)_{\eta=0} = \text{tg } \vartheta_0, \quad \left(\frac{d^2y^*}{dx^{*2}}\right)_{\eta=0} = \frac{1.5^{1/2}}{\cos^3 \vartheta_0 (\psi^*_{,\eta})_{\eta=0}} \quad (2.22)$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = (1 - a_1 P_1(0) Q_1(0)) \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - \frac{1.5^{1/2} a_1 Q_1(0)}{A} (\cos \vartheta y_1 - \sin \vartheta x_1)_{\eta=0} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \vartheta}\right)_{\eta=0} = (1 - a_1 P_1(0) Q_1(0)) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta}\right)_{\eta=0} + a_1 P_1(0) (\sin \vartheta y_1 + \cos \vartheta x_1)_{\eta=0} \quad (2.23)$$

$$(\cos \vartheta y_1 - \sin \vartheta x_1)_{\eta=0} = -3^{1/2} Q_1(0) \vartheta_0^{1/2} + \left(d_2 - \frac{6 \cdot 2^{1/6}}{\eta_0^{3/2}} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(11/12)\Gamma(9/12)} d_1 \right) \vartheta_0 + O(\vartheta_0^{3/2}) \quad (2.24)$$

$$(\sin \vartheta y_1 + \cos \vartheta x_1)_{\eta=0} = - \frac{3^{1/2} P_1(0)}{2^{2/3}} \vartheta_0^{2/3} - \frac{3^{4/3} Q_1(0)}{4} \vartheta_0^{4/3} + O(\vartheta_0^2)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta}\right)_{\eta=0} = - (3\vartheta_0)^{-1/3} - \frac{6 \cdot 2^{1/6}}{\eta_0^{3/2}} \frac{\Gamma(1/3) d_1}{\Gamma(11/12)\Gamma(5/12)} + d_2 + O(\vartheta_0^2) \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = (3\vartheta_0)^{-1/3} - \frac{6 \cdot 2^{5/6} \Gamma(-1/3) d_1}{\Gamma(1/12)\Gamma(7/12)\eta_0^{5/2}} + O(\vartheta_0^3)$$

Вдоль характеристики *os* имеем

$$\vartheta = \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} \quad (2.26)$$

Значения $\vartheta = \vartheta_c, \eta = \eta_c$ в точке *c* находим, решая систему уравнений (2.26) и (2.20). Вдоль характеристики *cd* имеем

$$\vartheta + \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} = \vartheta_c + \frac{2}{3} (-\eta_c)^{3/2} \quad (2.27)$$

Координаты x_* , y_* вдоль cd вычисляем по формулам (2.10), (1.22), (1.1). Величины x_1 , y_1 , соответствующие функции (2.12) в переменных η , α , равны:

$$\begin{aligned} x_1(\alpha, \eta) &= x_1(0, \eta) - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} AP_1(\eta) \int_0^\alpha \cos\left(\eta\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right) d\alpha + Q_1(\eta) \int_0^\alpha \sin\left(\eta\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right) d\alpha \\ y_1(\alpha, \eta) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} AP_1(\eta) \int_0^\alpha \sin\left(\eta\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right) d\alpha + Q_1(\eta) \int_0^\alpha \cos\left(\eta\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right) d\alpha \end{aligned} \quad (2.28)$$

Решение (2.12) в области $aodc$ неоднозначно. Для областей obc и ocd имеем соответственно

$$\psi_1 = \alpha_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (\xi + \nu)^{1/3} \left\{ \cos\left(\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{\nu\xi}}{\nu - \xi}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{\nu\xi}}{\nu - \xi}\right) \right\} \quad (2.29)$$

$$\psi_1 = \alpha_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (\xi + \nu)^{1/3} \left\{ \cos\left(\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{\nu\xi}}{\nu - \xi}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{\nu\xi}}{\nu - \xi}\right) \right\}$$

где

$$2\xi = \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} - \vartheta, \quad 2\nu = \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} + \vartheta \quad (2.30)$$

На $\nu = 0$ и $\xi = 0$ $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ равен соответственно π и 0 , а на od он равен $1/2\pi$.

В заключение статьи отметим, что изложенный метод применим для построения сопел с прямой линией перехода. Например, если сложить точное решение задачи истечения газа из насадка Борда, содержащееся в работе [14], с нашей функцией $d_1\psi_{*2}$, то получим сопло с прямой линией перехода при равномерном поступательном потоке на бесконечности вверх по течению.

Поступила 23 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. P e r e s J. Comptes rendus Ac. Sciences de Paris, 20, XI, 219, p. 501, 1944.
2. P e r e s J. Sur l'integration des equation qui regissent le mouvement d'un fluide compressible. Proceedings of the Seventh International Congress for Applied Mechanics. v. 11, part 11 1948, p. 382—387.
3. Х р и с т и а н о в и ч С. А. и Ю р ь е в И. М. Обтекание профиля при докритической скорости потока, ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.
4. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, в. 481, 1940.
5. Х р и с т и а н о в и ч С. А. О сверхзвуковых течениях газа, Труды ЦАГИ, в. 453, 1941.
6. А с т р о в В. С., Л е в и н Е., П а в л о в Л., Х р и с т и а н о в и ч С. А. О расчете сопел Лавалля, ПММ, т. VII, г. XVII 1943.
7. Ф р а н к л ь Ф. И., К теории сопел Лавалля. Изв. АН СССР, Серия матем. т. 9, № 5, 1945.
8. Ф о к В. А. Таблицы функций Эйри, НИИ НКЭП, 1946.
9. Ф а л ь к о в и ч С. В. К теории сопла Лавалля, ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
10. Ф а л ь к о в и ч С. В. Об одном классе сопел Лавалля, ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.
11. У и т т е к а р Е. Т., В а т с о н Г. Н. Курс современного анализа. ГТТИ, ч. II, 1934.
12. Х р и с т и а н о в и ч С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа. ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.
13. Ю р ь е в И. М. Приближенное интегрирование уравнений плоского безвихревого сверхзвукового движения газа. Труды ЦАГИ, 1951.
14. С е к е р ж - З е н ь к о в и ч Я. И. К теории насадка Борда для газа, ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.