

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗОВОЙ СТРУИ ИЗ СОСУДА КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

С. К. Асланов, В. А. Легкова

(Саратов)

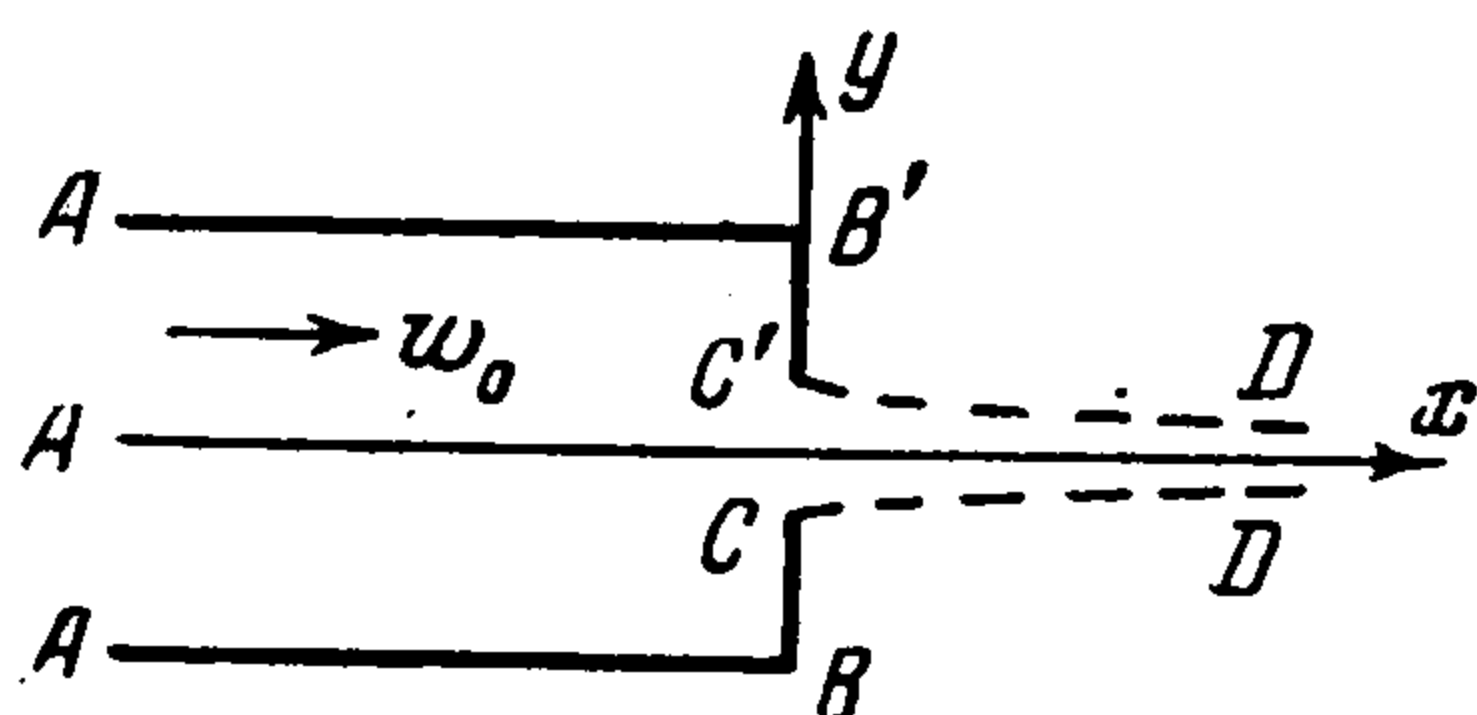
С. В. Фалькович [1] нашел точное решение задачи об истечении сжимаемого газа с дозвуковой скоростью w_1 на струе из симметричного прямоугольного сосуда конечной ширины H через отверстие размером h (фиг. 1). В настоящей заметке приводится подробный анализ потока, представляемого этим решением. При $\tau_0 < \tau \leq \tau_1$ последнее имеет вид:

$$\psi(\tau, \theta) = -\frac{Q}{\pi} \theta - \frac{Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\tau)}{n} \sin 2n\theta \quad (1)$$

$$X_n(\tau) = \frac{Z_n(\tau)}{Z_n(\tau_1)} - \frac{\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \frac{\zeta_n(\tau_2)Z_n(\tau) - \zeta_n(\tau)Z_n(\tau_1)}{nZ_n(\tau_1)} Z_n'(\tau_0)$$

$$\tau = \frac{w^2}{w_{\max}^2}, \quad \beta = \frac{1}{\kappa - 1}, \quad \tau_0 = \frac{w_0^2}{w_{\max}^2}, \quad \tau_1 = \frac{w_1^2}{w_{\max}^2}$$

где ψ — функция тока, θ — угол, образуемый вектором скорости w с осью x , κ — по-



Фиг. 1

казатель адиабаты, а τ_0 и τ_1 — скорость газа соответственно внутри сосуда далеко от отверстия и на струе.

Если принять ширину струи в бесконечности h' , то для расхода Q будем иметь

$$Q = w_1 (1 - \tau_2)^\beta h' \quad (2)$$

Вошедшие в (1) величины $Z_n(\tau)$ и $\zeta_n(\tau)$ представляют собой линейно независимые интегралы уравнения

$$\tau^2 (1 - \tau) y_n'' + \tau [1 + (\beta - 1) \tau] y_n' - n^2 [1 - (2\beta + 1) \tau] y_n = 0 \quad (3)$$

первый из которых есть известная в газовой динамике функция Чаплыгина [2], ограниченная в точке $\tau = 0$.

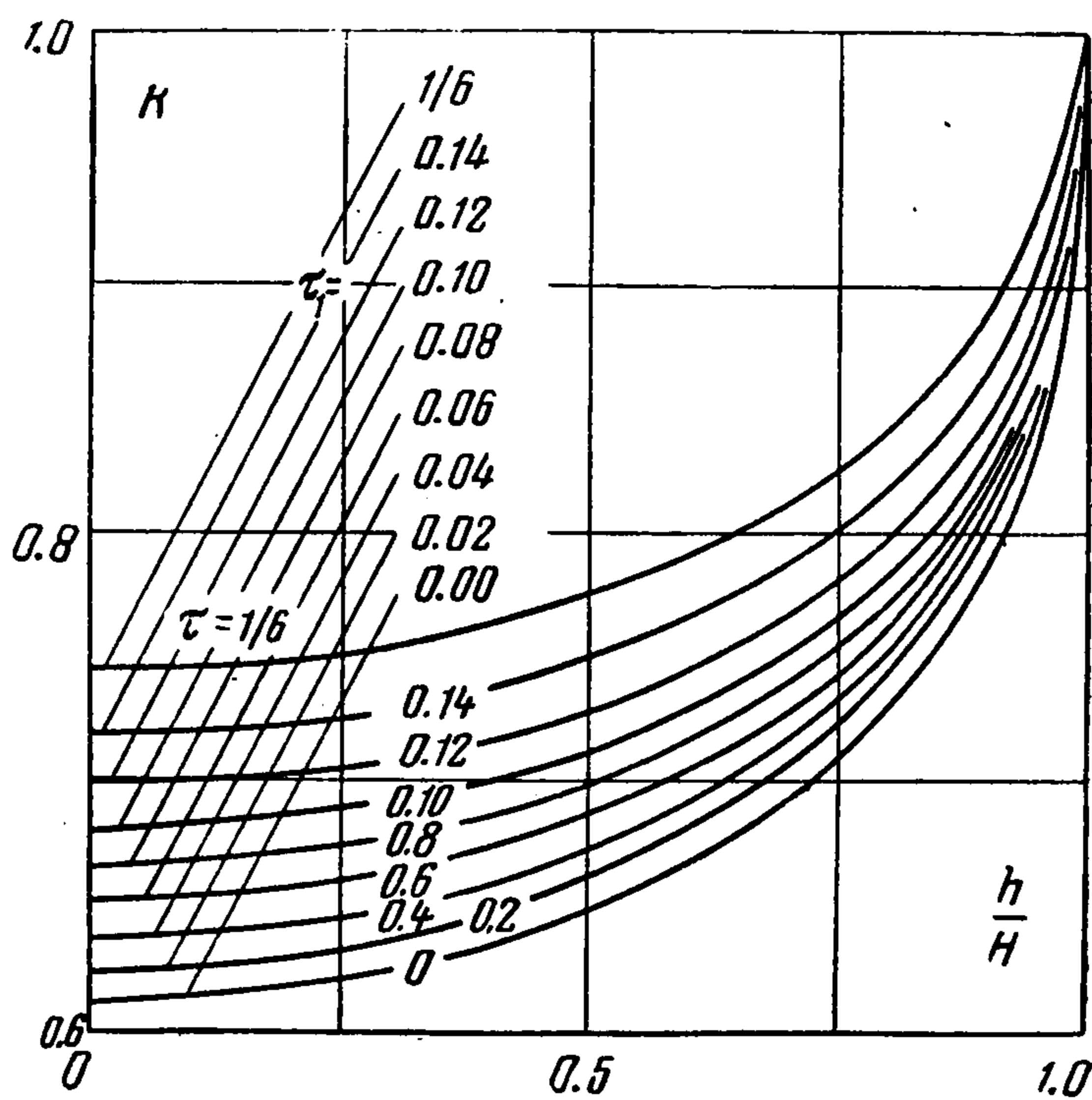
§ 1. Следующий из решения (1) коэффициент сжатия струи дается в виде [1]

$$k = \frac{h'}{h} = \frac{H}{h} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} \left(\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau_1} \right)^\beta$$

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{k_\infty} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} \left(\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau_1} \right)^\beta + \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{\tau_0^3}{\tau_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Z_n'(\tau_0)}{4n^2 - 1 Z_n(\tau_1)} \quad (4)$$

а k_∞ означает коэффициент сжатия для бесконечно широкого сосуда $\tau_0 = 0$ ($H = \infty$), подробно вычисленный Лайтхиллом [3]. Таким образом, (4) показывает влияние ширины сосуда H на форму струи во всем диапазоне скоростей газа на ней ($0 \leq \tau_1 \leq \tau_s$), включая скорость звука $\tau_s = (2\beta + 1)^{-1}$ (для воздуха $\tau_s = 1/6$). В частности, для несжимаемой жидкости

$$Z_n(\tau) = \tau^n, \quad \beta = 0$$



Фиг. 2

и в результате суммирования ряда из (4) нетрудно получить

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{k_\infty} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} + \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} - \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} - \frac{\tau_0}{\tau_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} \right), \quad k = \frac{H}{h} \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_1}} \quad (5)$$

Расчеты по формулам (5) и (4) проводились с точностью до четырех десятичных знаков после запятой. Результаты вычислений сведены соответственно в табл. 1 и 2, а на фиг. 2 они представлены графически.

При расчетах значения функции $Z_n(\tau)$ и $Z_n'(\tau)$ брались из таблиц Лайтхилла [3], в которых $n \leq 7$. При $n > 7$ использовались асимптотические формулы Лайтхилла [4]

$$Z_n(\tau) = \left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_s} \right]^{1/4} e^{2nS} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad \text{при } \tau < \tau_s \quad (6)$$

$$Z_n(\tau_s) = \alpha(2n)^{1/6} e^{2n\sigma} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

где

$$S = \sigma + \frac{1}{\sqrt{\tau_s}} \operatorname{arth} \left(\frac{\tau_s - \tau}{1 - \tau} \right)^{1/2} - \operatorname{arth} \left(\frac{1 - \tau/\tau_s}{1 - \tau} \right)^{1/2}$$

$$\sigma = -\frac{1}{\sqrt{\tau_s}} \operatorname{arth} \sqrt{\tau_s} - \frac{1}{2} \ln \beta$$

$$\alpha = 2^{2(x-1)} (x+1)^{-\frac{x+2}{6(x-1)}} \sqrt{\pi} 3^{-1/6} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^{-1}$$

и Зейфорта [5]

$$Z_n'(\tau) = \frac{2n}{\tau} (1-\tau)^{\beta/2-1/4} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s}\right)^{1/4} e^{2nS} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad \text{при } \tau < \tau_s \quad (7)$$

Ввиду недостаточности таблиц [3] $Z_n'(0.0025)$ и $Z_n'(0.01)$ для $n \leq 7$ вычислялись непосредственно из гипергеометрических рядов, которыми представляются эти функции [2]. В случае τ_0 , близкого к τ_1 , сходимость ряда в (4) улучшалась методом вычитания из него асимптотического ряда. Последний, как легко убедиться при помощи формул (6) и (7), с точностью до множителя имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-2n(S_0-S_1)} = \ln [1 + e^{-2(S_0-S_1)}]$$

§ 2. Как показано, при звуковом истечении $\tau_1 = \tau_s$ струя выравнивается на ко-

нечном расстоянии от отверстия и вниз по течению устанавливается постоянный поток со скоростью звука $W_1 = a_*$. Это расстояние можно определить, пользуясь решением (1) и формулой перехода на физическую плоскость [2]

$$dx = \frac{\cos \theta}{w} d\varphi - (1-\tau)^{-\beta} \frac{\sin \theta}{w} d\psi \quad (8)$$

Если учесть уравнение Чаплыгина [2]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

уравнение (8) дает на струе

$$dx = \frac{\cos \theta}{a_*} \frac{2\tau_s}{(1-\tau_s)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_s} d\theta$$

Внося сюда (1) и интегрируя на сегменте $[0, 1/2\pi]$, получим после вычислений

Таблица 1

τ_1	$\frac{\tau_0}{\tau_2}$	h/H	k
0	0	0	0.6110
(несжимаемая жидкость)	0.05	0.3577	0.6249
	0.20	0.6614	0.6761
	0.40	0.8479	0.7460
	0.60	0.9425	0.8219
	0.80	0.9885	0.9048
	1.00	1.0000	1.0000

Таблица 2

τ_1	τ_0	h/H	k	τ_1	τ_0	h/H	k
0.02	0	0	0.6233	0.04	0	0	0.6364
	0.0025	0.5543	0.6668		0.0025	0.4184	0.6580
	0.01	0.9091	0.7973		0.01	0.7312	0.7246
	0.02	1.0000	1.0000		0.02	0.9174	0.8115
0.06	0	0	0.6504	0.08	0	0	0.6654
	0.0025	0.3559	0.6653		0.0025	0.3196	0.6770
	0.01	0.6548	0.7097		0.01	0.5968	0.7116
	0.02	0.8340	0.7683		0.02	0.7740	0.7565
	0.04	0.9725	0.8849		0.04	0.8432	0.7818
0.10	0	0	0.6815	0.12	0	0	0.6988
	0.0025	0.2957	0.6914		0.0025	0.2792	0.7073
	0.01	0.5574	0.7200		0.01	0.5291	0.7324
	0.02	0.7308	0.7572		0.02	0.6988	0.7646
	0.04	0.8979	0.8277		0.04	0.8698	0.8251
0.14	0	0	0.7175	$\frac{1}{6}$	0	0	0.7447
	0.0025	0.2670	0.7252		0.0025	0.2554	0.7516
	0.1	0.5108	0.7438		0.01	0.4882	0.7719
	0.02	0.6747	0.7766		0.02	0.6513	0.7977
	0.04	0.8476	0.8303		0.04	0.8254	0.8454
	0.08	0.9721	0.9204		0.06	0.9135	0.8877
	0.10	0.9908	0.9557	0.08	0.9601	0.9241	
	0.14	1.0000	1.0000	$\frac{1}{6}$	1.0000	1.0000	

следующую формулу для длины участка, на котором происходит выравнивание струи:

$$x_* = \frac{4\tau_s}{(1-\tau_s)^\beta} \frac{Q}{\pi a_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n'(\tau_s)}{4n^2-1}$$

или в результате подстановки (2)

$$\frac{x_*}{h} = \frac{4k\tau_s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n'(\tau_s)}{4n^2-1} \quad (9)$$

Причем, воспользовавшись тем, что вронскиан двух линейно независимых решений (3) Z_n и ζ_n выражается в виде

Таблица 3

τ_0	h/H	x_*/h
0	0	0.6007
0.0025	0.2554	0.6007
0.01	0.4882	0.6007
0.02	0.6513	0.6006
0.04	0.8254	0.5911
0.06	0.9135	0.5677
0.08	0.9601	0.5307
$\frac{1}{6}$	1.00000	0

$$W(Z_n, \zeta_n) = \frac{(1-\tau)^\beta}{\tau} n$$

функцию $X_n(\tau_s)$ можно представить

$$X_n'(\tau_s) = \frac{Z_n'(\tau_s)}{Z_n(\tau_s)} - \frac{\tau_0}{\tau_1} \left(\frac{1-\tau_s}{1-\tau_0} \right)^\beta \frac{Z_n'(\tau_0)}{Z_n(\tau_0)}$$

Отсюда в частном случае бесконечно широкого сосуда ($\tau_0 = 0$)

$$\frac{x_*}{h} = \frac{4k_\infty\tau_s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \frac{Z_n'(\tau_s)}{Z_n(\tau_s)} \quad (10)$$

Расчет по формулам (9) и (10) производился аналогично § 1. Значения функции $Z_n'(\tau_s)/Z_n(\tau_s)$ находятся из асимптотического соотношения автора [6]

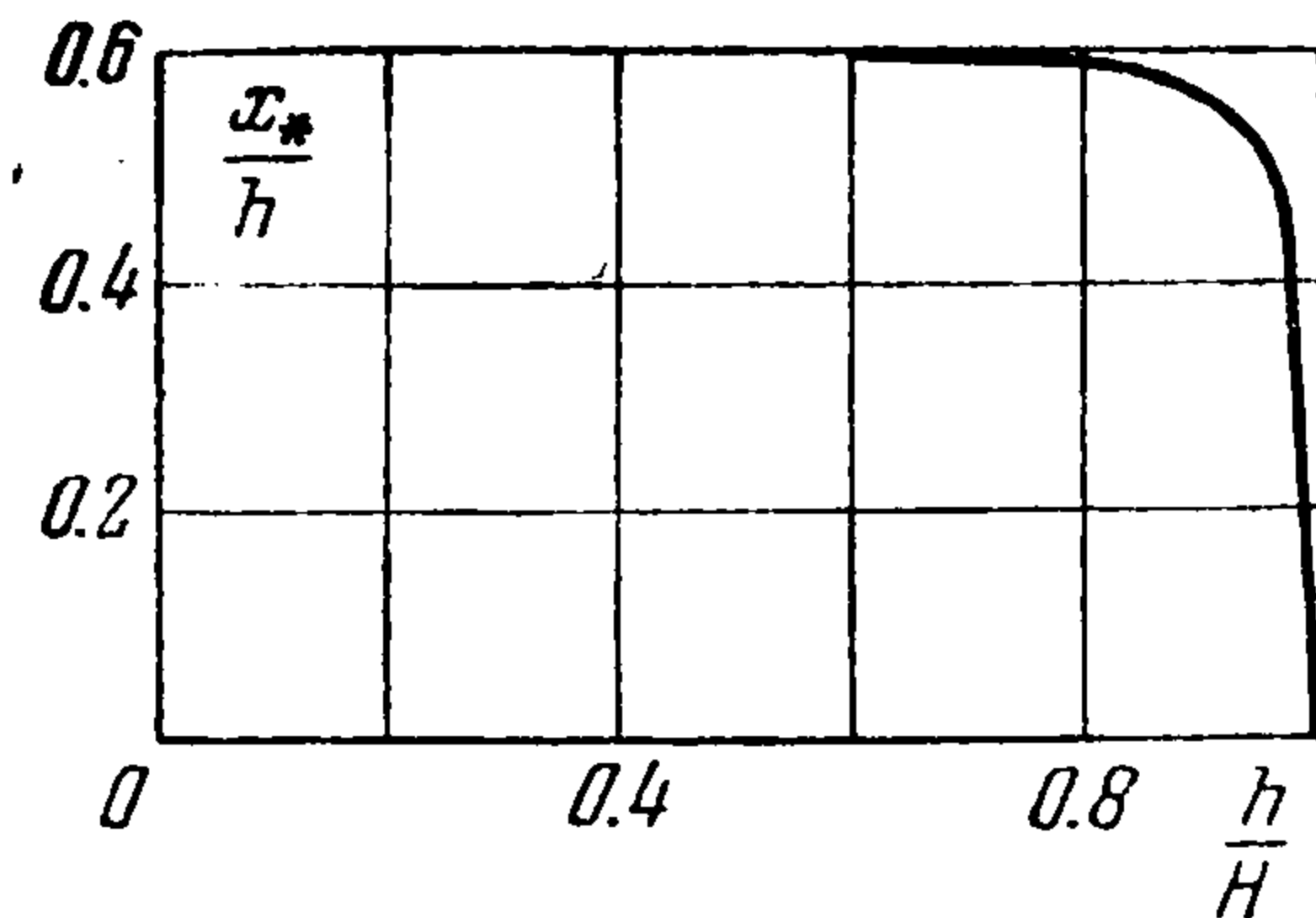
$$\frac{Z_n'(\tau_s)}{Z_n(\tau_s)} = - \left\{ \frac{v'(0)}{v(0)} (2n)^{1/2} + \frac{2x+5}{10(x+1)^{1/2}} + O(n^{-2/2}) \right\} \frac{(x+1)^{1/2}}{2\tau_s}$$

где $v(x)$ — функция Эйри [7]. Для улучшения сходимости ряда (10) применялся метод вычитания асимптотического ряда, который, как следует из последней асимптотики, с точностью до множителя имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{v'(0)}{v(0)} \frac{(x+1)^{1/3}}{2^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} + \frac{2x+5}{20} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \\ = \frac{v'(0)}{v(0)} \left(\frac{x+1}{2} \right) \zeta \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{2x+5}{20} \zeta(2) \end{aligned}$$

где $\zeta(x)$ — известная дзета-функция Римана [8]. Результаты вычислений даны в табл. 3 и на фиг. 3.

Они обнаруживают интересное свойство величины отхода постоянного звукового течения от отверстия. А именно, с уменьшением ширины сосуда до $h/H = 0.65$ отношение x_*/h остается постоянным и лишь с приближением сосуда к трубе ($h = H$) быстро падает до нуля.



Фиг. 3

Поступила 28 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. К теории газовых струй, ПММ, т. XXI, вып. 4, 1957.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях, ГТТИ, 1949.
3. Ferguson and Lighthill. The hodograph transformations in trans-sonic flow. Proceed. of the Royal Society, Ser. A., vol. 192, 1947.
4. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоуарта, т. 1, гл. IV, ИЛЛ, 1955.
5. Seifert. Die hypergeometrischen Differentialgleichungen der Gasdynamik, Math. Annalen, B. 120, N. 1, 1947.
6. Асланов С. К. Асимптотические формулы функций Чаплыгина и их производных, ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
7. Фок В. А. Таблицы функций Эйри, 1946.
8. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций, ГИТТЛ, 1949.

О ПОДОБИИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТОНКИХ ТЕЛ ВЯЗКИМ ГАЗОМ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

В. В. Лунев

(Москва)

Рассматриваются уравнения ламинарного пограничного слоя на заостренных плоских и осесимметричных телах при больших полетных числах M . Для пластины подобные уравнения рассмотрены Шеном [1] и Лизом [2]. Устанавливаются критерии степени влияния пограничного слоя на внешний по отношению к нему поток при $M \gg 1$. Для тонких тел устанавливаются условия подобия течений.

1. Пусть (x, y, φ) — криволинейная система координат, в которой y отсчитывается от поверхности тела по нормали к ней, x — от носка тела вдоль образующей, φ — угол поворота меридиональной плоскости. Пусть u и v — компоненты скорости по осям x и y соответственно, r — расстояние точки до оси симметрии, R — радиус кривизны образующей тела, форма которой $r = r_w(x)$. Тогда компоненты тензора скоростей деформаций и тензора напряжений имеют вид [3,4]:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{R}{R+y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \right), & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{\varphi\varphi} &= \frac{u \sin \theta + v \cos \theta}{r} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{R}{R+y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{R+y}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ru}{R+y} \right) & & & & (1.1) \\ e_{x\varphi} &= e_{y\varphi} = 0, & \sin \theta &= \frac{\partial r}{\partial x}, & \cos \theta &= \frac{\partial r}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V} + 2\mu e_{xx}, & p_{yy} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V} + 2\mu e_{yy} \\ p_{\varphi\varphi} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{V} + 2\mu e_{\varphi\varphi}, & p_{xy} &= \mu e_{xy}, & p_{x\varphi} &= p_{y\varphi} = 0 \end{aligned}$$