О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩИХ ОДНОМЕРНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

Е. В. Рязанов
(Москва)

Рассмотрим одномерные осесимметрические неустановившиеся движения электропроводного совершенного газа, находящегося под действием сил ньютонианского тяготения. Будем считать, что проводимость газа бесконечна, магнитное поле перпендикулярно траекториям частиц газа, вязкость и теплопроводность отсутствуют.

Магнитные силовые линии могут быть: 1) прямыми, параллельными оси симметрии; 2) концентрическими окружностями с центрами на оси симметрии; 3) винтовыми линиями.

Пусть H_z — компонента вектора напряженности по оси симметрии, H_φ — трансверсальная компонента вектора напряженности. Введем обозначения $h_z = H_z^2\, {}^1/_{8\pi}$, $h_\varphi = H_\varphi^2\, {}^1/_{8\pi}$. Тогда в случае 1) будем иметь $h_z \neq 0$, $h_\varphi = 0$, в случае 2) $h_z = 0$, $h_\varphi \neq 0$, в случае 3) $h_z \neq 0$, $h_\varphi \neq 0$.

Уравнения магнитной гидродинамики для этих случаев можно записать в виде

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}(p + h_\varphi + h_z) - \frac{2}{r}(h_\varphi + Gm\rho), \qquad \frac{d}{dt}\frac{h_\varphi}{r^2\rho^2} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{h_z}{\rho^2} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right), \qquad \frac{dm}{dr} = 2\pi\rho r, \qquad \frac{d}{dt}\frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \tag{1}$$

Здесь r — эйлерова координата частицы, t — время, v — скорость, ρ — плотность, p — давление, m — масса, G — гравитационная постоянная, $\gamma > 1$ — коэффициент Пуассона. Будем считать, что скорость v частицы газа пропорциональна ее расстоянию r от оси симметрии, т. е.

$$v = \frac{r}{\mu(t)}\mu'(t) \tag{2}$$

где $\mu(t)$ — произвольная функция времени, $\mu'(t)$ — ее производная.

Линейная зависимость (2) скорости от радиуса использовалась ранее в работах Л. И. Седова [1,2,3], М. Л. Лидова [4]. А. Г. Куликовского [5], И. М. Яворской [6] и В. П. Коробейникова [7].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система (1) имеет следующее частное точное решение:

$$v = \frac{r}{\mu(t)}\mu'(t), \qquad \rho = \frac{P'(\xi)}{r\mu}, \qquad p = [b_1 P(\xi) + b_2]\,\mu^{-2\gamma}$$

$$h_\varphi = \frac{1}{r^2}\left\{b_4 + b_3\left[\frac{r^2}{\mu^2}P(\xi) - 2P_1(\xi)\right] - 2\pi G P^2(\xi)\right\} \tag{3}$$

$$h_z = [b_5 P(\xi) + b_6]\,\mu^{-4}, \qquad m = 2\pi P(\xi)$$

Причем $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению

$$t = \pm\int\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, \qquad f(\mu) = \frac{b_1}{\gamma - 1}\mu^{2(1-\gamma)} - 2b_3\ln\mu + b_5\mu^{-2} + b_7 \tag{4}$$

Здесь $b_1 - b_7$ — произвольные постоянные, $P(\xi)$ — произвольная функция, такая, что ее производная $P'(\xi) > 0$. Функция $P_1(\xi)$ связана с $P(\xi)$ зависимостью

$$P_1'(\xi) = \xi P(\xi) \qquad \left(\xi = \frac{r}{\mu}\right)$$

ξ — лагранжева координата. В частном случае, когда $h_\varphi = 0$, функция $P(\xi)$ имеет такой вид: $P(\xi) = \alpha_1\xi^2$, где α_1 — некоторая постоянная. Этот случай, а также случай, когда $h_z = 0$, а $P(\xi) = \alpha_2\xi^2 + \alpha_3$, где α_2 и α_3 — любые постоянные, получены и исследованы И. М. Яворской [6].

При $G = 0$ получается решение А. Г. Куликовского, подробно исследованное им [5] для случая $h_z = 0$. Перейдем к изучению поведения функции $f(\mu)$. Ее вид зависит от значений постоянных b_1, b_3, b_5, b_7 и определяет различные типы движения газа.

В случае $b_3 > 0$ получаются движения, описанные в работе [6]. Если же $b_3 = 0$, то функция $f(\mu)$ имеет такой же вид, как и в работе [5]. Следовательно, в этом случае возможны те же движения газа, которые рассмотрены в работе [5]. При $b_3 < 0$, $b_5 \neq 0$ могут быть следующие случаи:

$$\mathrm{I}\begin{cases} b_1 \geqslant 0, & b_5 > 0 \\ b_1 > 0, & b_5 < 0, \quad \gamma > 2 \\ b_1 < 0, & b_5 > 0, \quad \gamma < 2 \\ b_1 + b_5 > 0, & \gamma = 2 \end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases} b_1 \leqslant 0, & b_5 < 0, \quad b_7 > 0 \\ b_1 > 0, & b_5 < 0, \quad \gamma < 2 \\ b_1 < 0, & b_5 > 0, \quad \gamma > 2 \\ b_1 + b_5 \leqslant 0, & b_7 > 0, \quad \gamma = 2 \end{cases}$$

В случае I тип движения зависит от числа корней функции $f(\mu)$ и их расположения.

1) Если у функции $f(\mu)$ есть один двойной корень $\mu_0 = 1$, то газ будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия.

2) Если двойной корень $\mu_0 \neq 1$, то могут существовать предельные движения газа, т. е. расширение (или сжатие) газа за бесконечное время до некоторого конечного объема радиуса $r = \xi\mu_0$. При этом $v \to 0$ при $t \to \infty$.

Если предельных движений нет, то имеются такие возможности.

2а) При $\mu_0 > 1$ и $v_0 < 0$ происходит полное сжатие газа к оси симметрии за конечное время.

2б) При $\mu_0 > 1$ и $v_0 > 0$ газ, расширяясь, останавливается на конечном расстоянии $r = \xi\mu_0$ от оси симметрии, а затем под действием сил начинается обратное движение газа, т. е. происходит полное сжатие газа к оси симметрии за конечное время. Если при этом считать, что в момент сжатия скорость меняется скачком, то будем иметь пример пульсирующего периодического движения газа.

2в) При $\mu_0 < 1$ и $v_0 > 0$ происходит полный разлет газа за бесконечное время со скоростью $v \to \infty$ при $t \to \infty$.

2г) При $\mu_0 < 1$ и $v_0 < 0$ газ сначала сжимается до некоторого объема с радиусом $r = \xi\mu_0$, а затем полностью разлетается.

3) Функция $f(\mu)$ не имеет корней. Тогда при $v_0 < 0$ движение аналогично случаю 2а, при $v_0 > 0$ — случаю 2в.

4) У функции $f(\mu)$ есть два корня μ_1 и μ_2. Если $\mu_1 < \mu_2 < 1$, то происходит полный разлет, как в случаях 2в, 2г. Если $1 < \mu_1 < \mu_2$, то получается полное сжатие, как в случаях 2а, 2б.

В случае II имеем $f'(\mu) > 0$. Происходит полный разлет газа, как в случаях 2в, 2г.

При $b_3 = 0$, $b_5 = 0$ возможны движения типов 2а, 2б, 2в, 2г, 3. Причем в тех случаях, когда газ разлетается, скорость $v \to \xi\sqrt{b_7}$ при $t \to \infty$. Подробное исследование проведено в книге Л. И. Седова [1].

Если $b_3 = 0$, $b_5 \neq 0$, то будем иметь такие случаи:

$$\mathrm{III}\begin{cases} b_1 > 0, & b_5 < 0, \quad b_7 > 0, \quad \gamma > 2 \\ b_1 < 0, & b_5 > 0, \quad b_7 > 0, \quad \gamma < 2 \end{cases} \qquad \mathrm{IV}\begin{cases} b_1 \geqslant 0, & b_5 > 0, \quad b_7 \geqslant 0 \\ b_1 + b_5 > 0, & b_7 \geqslant 0, \quad \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{V}\begin{cases} b_1 > 0, & b_5 < 0, \quad b_7 \geqslant 0, \quad \gamma < 2 \\ b_1 < 0, & b_5 > 0, \quad b_7 \geqslant 0, \quad \gamma > 2 \\ b_1 \leqslant 0, & b_5 < 0, \quad b_7 > 0 \\ b_1 + b_5 < 0, & b_7 > 0, \quad \gamma = 2 \end{cases} \qquad \mathrm{VI}\begin{cases} b_1 > 0, & b_5 < 0, \quad b_7 \leqslant 0, \quad \gamma > 2 \\ b_1 < 0, & b_5 > 0, \quad b_7 \leqslant 0, \quad \gamma < 2 \\ b_1 \geqslant 0, & b_5 > 0, \quad b_7 < 0 \\ b_1 + b_5 > 0, & b_7 < 0, \quad \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{VII}\begin{cases} b_1 > 0, & b_5 < 0, \quad b_7 < 0, \quad \gamma < 2 \\ b_1 < 0, & b_5 > 0, \quad b_7 < 0, \quad \gamma > 2 \end{cases}$$

В случае III возможны те же движения, что и в случае I, но при полном разлете $v \to \xi\sqrt{b_7}$. В случае IV движение осуществляется как и в случае 3, но $v \to \xi\sqrt{b_7}$ при $t \to \infty$.

В случае V имеем полный разлет газа (см. 2в, 2г), но $v \to \xi\sqrt{b_7}$ при $t \to \infty$.

В случае VI получается полное сжатие газа за конечный промежуток времени, как и в случаях 2а, 2б.

В случае VII будут происходить периодические колебания газа с периодом, зависящим от значений b_1, b_3, b_5, b_7. В частном случае, когда $f(\mu)$ имеет двойной корень, будем иметь устойчивое равновесие газа.

Из приведенного исследования видно, что при наличии сил гравитации и магнитного поля с винтовыми магнитными силовыми линиями полный разлет газа оказывается невозможным, если $b_3 > 0$. Если же $b_3 \leqslant 0$, то разлет в ряде случаев оказывается возможным, в ряде случаев — нет. В частном случае, когда магнитное поле направлено вдоль оси симметрии, разлета газа быть не может [6], так как $b_3 > 0$ при $h_\varphi = 0$. В другом частном случае, когда магнитные силовые линии суть замкнутые концентрические окружности ($h_z = 0$) при $b_3 \leqslant 0$ разлет возможен, при $b_3 > 0$ — нет.

Отметим в заключение, что в случае, когда $\gamma = 2$, уравнения (1) допускают точное частное решение, содержащее две произвольные функции:

$$v = \frac{r}{\mu(t)}\mu'(t), \qquad \rho = \frac{P'(\xi)}{r\mu}, \qquad \rho = \Pi(\xi)\mu^{-4},$$

$$h_z = [c_1 P(\xi) - \Pi(\xi) + c_2]\mu^{-4}$$

$$h_\varphi = \frac{1}{r^2}\{c_3[\xi^2 P(\xi) - 2P_1(\xi)] - 2\pi G P^2(\xi) + c_4\}$$

$$m = 2\pi P(\xi), \qquad P_1'(\xi) = \xi P(\xi)$$

$$f(\mu) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = c_1\mu^{-2} - 2c_3 \ln \mu + c_5$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_5$ — произвольные постоянные, $P(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ — произвольные функции. Решение с двумя произвольными функциями можно получить и при $\gamma = 1$.

Примечание при корректуре. После того как данная статья была сдана в печать, автору стало известно, что решение, аналогичное (3), опубликовано также в недавно вышедшей статье Мак-Витти [8]. Анализ возможных движений газа в статье [8] отсутствует.

Автор признателен В. П. Коробейникову и Н. Н. Кочиной за ряд полезных замечаний.

Поступила 6 X 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГТТИ, М., 1957.
2. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, т. XC, № 5, 1953.
3. Седов Л. И. О динамическом взрыве равновесия. Докл. АН СССР, т. CXII, № 2, 1957.
4. Лидов М. Л. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения. Докл. АН СССР, т. XCVII, № 3, 1954.
5. Куликовский А. Г. К вопросу о пульсации плазменного шнура. Докл. АН СССР, т. CXIV, № 5, 1957.
6. Яворская И. М. Колебания бесконечного газового цилиндра с собственной гравитацией в магнитном поле. Докл. АН СССР, т. CXIV, № 5, 1957.
7. Коробейников В. П. Точное решение нелинейной задачи о взрыве в газе при переменной начальной плотности. Докл. АН СССР, т. CXVII, № 6, 1957.
8. McVittie G. C. Some Exact Solutions of the Equations of Magnetohydrodynamics when Both Self — Attraction and Magnetic Fields Are Present. Reviews of Modern Physics, v. 30, № 3, 1958.