ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

А. И. Огурцов

(Свердловск)

В работе [1] В. А. Плисс исследовал устойчивость нулевого решения уравнения

$$\frac{d^3\xi}{dt^3}+f\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)+\frac{d\xi}{dt}+\xi=0; \tag{1}$$

где функция $f(\eta)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица при всех вещественных η. Предполагалось также, что $f(0)=0$. Было показано, что нулевое решение уравнения (1) устойчиво в целом, если функция $f(\eta)$ дифференцируема и если $df/d\eta>1$ при всех η.

В настоящей заметке рассматривается сначала уравнение, аналогичное (1):

$$\frac{d^3\xi}{dt^3}+f\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)+b\frac{d\xi}{dt}+a\xi=0 \tag{2}$$

где a и b — постоянные, а функция $f(\eta)$, как и в (1), непрерывна, удовлетворяет условию Липшица и, кроме того, $f(0)=0$.

Используя предположение о дифференцируемости функции $f(\eta)$, ниже излагаем несколько иной прием построения функции Ляпунова для этого уравнения, чем в работе [1]. После этого показано, что при помощи того же приема может быть построена функция Ляпунова для уравнения

$$\frac{d^4\xi}{dt^4}+f\left(\frac{d^3\xi}{dt^3}\right)+c\frac{d^2\xi}{dt^2}+b\frac{d\xi}{dt}+a\xi=0 \tag{3}$$

Теорема 1. Если $a>0$, $b>0$, а функция $f(\eta)$ дифференцируема и если

$$\frac{df}{d\eta}>\frac{a}{b} \qquad \text{при всех } \eta \tag{4}$$

то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Для доказательства заменим уравнение (2) эквивалентной системой

$$\frac{dx}{dt}=y, \qquad \frac{dy}{dt}=z-f'(x)\,y, \qquad \frac{dz}{dt}=-by-ax \tag{5}$$

и рассмотрим функцию

$$2V=2a\int_0^x f'(x)\,xdx+2axy+by^2+z^2 \tag{6}$$

Она, очевидно, является определенно положительной, а ее производная по времени в силу системы (5) постоянно отрицательной:

$$\frac{dV}{dt}=-[bf'(x)-a]\,y^2 \qquad \left(\frac{dV}{dt}<0 \text{ при } y\neq 0, \quad \frac{dV}{dt}=0 \text{ при } y=0\right) \tag{7}$$

Следуя [2], обозначим через M множество точек плоскости xz; легко видеть, что оно не содержит целых траекторий, кроме начала координат. Если теперь

$$\lim_{|x|\to\infty} J(x)=\infty \qquad \left(J(x)=2a\int_0^x f'(x)\,xdx-\frac{a^2}{b}x^2\right) \tag{8}$$

то функция $V(x,y,z)$ является бесконечно большой (все ее поверхности уровня замкнуты) и предложение доказано (см. теорему 4 [2]).

Если же

$$\int_0^{\pm\infty}\left[f'(x)-\frac{a}{b}\right]xdx$$

сходится, то среди поверхностей уровня функции $V(x, y, z)$ обязательно будут незамкнутые. Однако и в этом случае, повторяя соответствующие рассуждения С. Н. Шиманова [3], можно показать, что устойчивость в целом имеет место.

Действительно, рассмотрим область

$$V(x, y, z) \leqslant l, \qquad |x| \leqslant N \tag{9}$$

где $l > 0$ и $N > 0$ — некоторые постоянные. Эта область ограничена, так как при $|x| \leqslant N$ из первого неравенства $V \leqslant l$ следует ограниченность координат y и z точек области (9).

Пусть $P(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка фазового пространства. Возьмем произвольную траекторию γ системы (5), заданную уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и выходящую из точки P, выбирая при этом постоянные l и N настолько большими, чтобы точка P была внутри области (9), т. е. чтобы выполнялись неравенства

$$V(x_0, y_0, z_0) < l \qquad |x_0| < N$$

Тогда все точки траектории γ будут при $t > 0$ оставаться внутри области (9), т. е. будут иметь место неравенства

$$V(x(t), y(t), z(t)) < l, \qquad |x(t)| < N \qquad \text{при } t > 0 \tag{10}$$

В самом деле, если какая-нибудь точка траектории γ покидает область (9), то найдется такое значение $t = T$, при котором точка $(x(T), y(T), z(T))$ будет на границе (9). При этом одно из неравенств (10) (или оба сразу) обратится в равенство. Но первое неравенство не может обратиться в равенство в силу условия (7), согласно которому

$$V(x(T), y(T), z(T)) \leqslant V(x_0, y_0, z_0) < l$$

Второе же неравенство могло бы обратиться в равенство лишь тогда, когда множество

$$V(x, y, z) \leqslant l, \qquad |x| = N \tag{11}$$

[граница (9)] не пустое. Но в последнем случае можно выбрать N настолько большим, что для точек (11) будет иметь место условие

$$yN \operatorname{sgn} x = \frac{dx}{dt} N \operatorname{sgn} x < 0 \tag{12}$$

так как координата y точек (11) удовлетворяет неравенству

$$-aN \operatorname{sgn} x - F(N, z) \leqslant by \leqslant -aN \operatorname{sng} x + F(N, z)$$

где

$$F(N, z) = \left|\sqrt{2bl - bJ(N) - bz^2}\right|$$

(подкоренное выражение в $F(N, z)$ принимает положительные значения, не превосходящие $2bl$).

Согласно (12) интегральная кривая, попавшая на множество (11), при $N \operatorname{sng} x > 0$ пересекает его в сторону убывания x, а при $N \operatorname{sgn} x < 0$ — в сторону возрастания x.

Таким образом, мы показали, что все траектории системы (5) расположены внутри ограниченной области (9) при $t > 0$. Вместе с выводами, сделанными выше относительно функции V и ее производной по времени, это гарантирует асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения системы (5), а следовательно, и уравнения (2). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^4\xi}{dt^4} + f\left(\frac{d^3\xi}{dt^3}\right) + c\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\,\frac{d\xi}{dt} + a\xi = 0 \tag{13}$$

где функция $f(\eta)$ непрерывна и удовлетворяет условиям Липшица и $f(0) = 0$.

Теорема 2. Если $a > 0$, $b > 0$, а функция $f(\eta)$ имеет $df/d\eta$ такую, что

$$\frac{df}{d\eta} > 0, \qquad bc\,\frac{df}{d\eta} - b^2 - a\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 > 0 \tag{14}$$

при всех значениях аргумента, то нулевое решение уравнения (13) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Доказательство. Заменим уравнение (13) эквивалентной системой

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=z, \quad \frac{dz}{dt}=u-f'(y)\,z, \quad \frac{du}{dt}=-cz-by-ax \tag{15}$$

и рассмотрим функцию

$$2V=(b^2+ac)\,x^2+2bcxy+(c^2-2a)\,y^2+4axz+2byz+cz^2+2bxu+$$
$$+2cyu+2u^2+2b\int\limits_0^y f'(y)\,ydy \tag{16}$$

Она является определенно положительной и бесконечно большой. Действительно,

$$2V=(b^2+ac)\,x^2+2bcxy+\left(c^2-2a+\frac{b^2}{c}\right)y^2+4axz+2byz+$$
$$+cz^2+2bxu+2cyu+2u^2+2b\int\limits_0^y\left[f'(y)-\frac{b}{c}\right]ydy \tag{17}$$

где

$$\int\limits_0^y\left[f'(y)-\frac{b}{c}\right]y\,dy>0 \quad \text{при } y\neq 0$$

так как $f'(y)>b/c$ на основании (14), а квадратичная форма является определенно положительной, что легко проверяется при помощи критерия Сильвестра, если принять во внимание неравенство $c^2-4a>0$, которое следует также из (14).

Так как всякая определенно положительная форма является бесконечно большой функцией, то наше утверждение относительно функции $V(x, y, z, u)$ полностью доказано.

Производная функции V по времени в силу системы (15)

$$\frac{dV}{dt}=-abx^2-2af'(y)\,xz-cf'(y)\,z^2+bz^2$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{dV}{dt}<0 \quad \text{при } x\neq 0,\ z\neq 0; \qquad \frac{dV}{dt}=0 \quad \text{при } x=0,\ z=0 \tag{18}$$

Плоскость yu, очевидно, не содержит целых траекторий, кроме начала координат. Следовательно, нулевое решение уравнения (13) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях [2].

Знакоопределенность функции V и законопостоянство ее производной по времени следуют также из общих предложений о функциях Ляпунова рассматриваемого вида, установленных в работе [5].

Поступила 28 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Плисс В. А. Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Докл. АН СССР, т. CXI, № 6, 1956.
2. Барабашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, т. LXXXVI, № 3, 1952.
3. Шиманов С. Н. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
4. Барабашин Е. А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
5. Плисс В. А. Исследование одной нелинейной системы трех дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, т. CXVII, № 2, 1957.