ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. С. Новоселов

(Ленинград)

При исследовании движения систем с гироскопами обычно опускают в линеаризованных уравнениях вторые производные лагранжевых координат [1—6]. Для стационарных гироскопических систем, в которые не входят уравнения автоматического затухания, допустимость указанной операции обоснована Д. Р. Меркиным [4]. В настоящей заметке рассматривается случай гироскопических систем с переменными коэффициентами. Предлагаемый метод, основанный на замене независимой переменной, представляет интерес и для стационарных гироскопических систем.

1. Собственные колебания стабилизированных гироскопических систем на неподвижном основании при малых возмущениях позиционных координат $q_1, \ldots, q_s$ и их производных определяются уравнениями

$$a_{ij}\ddot{q}_j + (b_{ij} + Hg_{ij})\dot{q}_j + c_{ij}q_j = 0 \tag{1}$$

и которых достаточно большая постоянная положительная величина H обозначает наименьшее значение кинетических моментов системы относительно осей гироскопов, $\|a_{ij}\|$ — матрица положительно определенной квадратичной формы. Коэффициенты уравнений (1) — ограниченные функции времени и имеют нулевой порядок относительно H. Решения стабилизированной системы не могут иметь порядок по H больше нуля. Индексы i и j принимают значения от 1 до s, наличие двух одинаковых индексов у сомножителей означает суммирование.

Будем рассматривать решение двух систем уравнений

$$(b_{ij} + Hg_{ij})\dot{q}_{j1} + c_{ij}q_{j1} = 0 \tag{2}$$

$$a_{ij}\ddot{q}_{j2} + (b_{ij} + Hg_{ij})\dot{q}_{j2} = 0 \tag{3}$$

Пусть определитель матрицы гироскопических членов $\|g_{ij}\|$ отличен от нуля, тогда при достаточно большом H система (2) разрешима относительно $\dot{q}_{j1}$. Система (3) всегда разрешима относительно $\ddot{q}_{j2}$.

Покажем, что решение системы (1), удовлетворяющее общим условиям $t = 0$, $q_i = q_i^\circ$, $\dot{q}_i = \dot{q}_i^\circ$, на любом конечном промежутке времени $[0,T]$ с точностью до величины порядка H^{-1} описывается в координатах переменными q_{i1}, в скоростях $\dot{q}_{i2}$.

При этом принимаются следующие начальные условия

$$q_{i1}^\circ = q_i^\circ, \qquad [b_{ij}(0) + Hg_{ij}(0)]\dot{q}_{j1}^\circ + c_{ij}(0)q_j^\circ = 0 \tag{4}$$

$$q_{i2}^\circ = 0, \qquad \dot{q}_{i2}^\circ = \dot{q}_i^\circ - \dot{q}_{i1}^\circ \tag{5}$$

Переходя в уравнениях (2) к новой независимой переменной t/H и в уравнениях (3) к переменной Ht и обозначая штрихами производные по новым независимым переменным, получим

$$\begin{gathered}(H^{-1}b_{ij} + g_{ij})q_{j1}' + c_{ij}q_{j1} = 0\\ (H^{-1}b_{ij} + g_{ij})q_{j1}'' + (\dot{b}_{ij} + H\dot{g}_{ij} + c_{ij})q_{j1}' + H\dot{c}_{ij}q_{j1} = 0\end{gathered} \tag{6}$$

$$a_{ij}q_{j2}'' + (H^{-1}b_{ij} + g_{ij})q_{j2}' = 0, \qquad q_{i2} = (f_{ij}q_{j2}')_0^t - \int_0^t \dot{f}_{ij}q_{j2}'dt \tag{7}$$

где f_{ij} — ограниченные функции нулевого порядка по величине H, получающиеся при разрешении первой группы уравнений (7) относительно q_{i2}'. Производные $\dot{f}_{ij}$ не могут иметь порядок по H больше нуля.

Условно будем называть прецессией и нутацией гироскопической системы (1) движения $q_i^{(1)}$ и $q_i^{(2)}$, имеющие начальные данные соответственно (4) и (5). Решение системы (1) с общими начальными условиями равно $q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}$. Положим $q_i^{(1)} =$

$= q_{i1} + x_i$, $q_i^{(2)} = q_{i2} + y_i$. Переменные x_i и y_i найдутся как частные решения с нулевыми начальными данными для уравнений

$$a_{ij}\ddot{x}_j + (b_{ij} + Hg_{ij})\dot{x}_j + c_{ij}x_j = -H^{-2}a_{ij}q_{j1}'' \tag{8}$$

$$a_{ij}\ddot{y}_j + (b_{ij} + Hg_{ij})\dot{y}_j + c_{ij}y_j = -c_{ij}q_{j2} \tag{9}$$

Как следует из систем (6) и (7), на конечном промежутке времени $[0,T]$ переменные q_{j1}'' имеют порядок H, а q_{j2} — порядок H^{-1}. На основании (8) и (9) получаем

$$\{x_i,\ \dot{x}_i,\ y_i,\ \dot{y}_i\} = O(H^{-1}) \tag{10}$$

Переменные $\dot{q}_{i1}$ и q_{i2} имеют порядок H^{-1}, поэтому в силу формулы (10) приходим к доказательству нашего утверждения:

$$q_i = q_{i1} + O(H^{-1}), \qquad \dot{q}_i = \dot{q}_{i2} + O(H^{-1}) \tag{11}$$

При этом величины q_{i1} меняются медленно, а $\dot{q}_{i2}$ быстро, так как $\dot{q}_{i1} = O(H^{-1})$ и на основании формул (3) и (5) $\ddot{q}_{i2} = O(H)$.

2. Если система (1) устойчива при постоянно действующих возмущениях, а переменные q_{i1} и q_{i2} ограничены, то, как следует из систем (6), (8) и (9), оценки (10) и (11) будут иметь место для бесконечного промежутка времени.

Вынужденные колебания стабилизированной гироскопической системы, происходящие под действием обобщенных сил $f_i(t)$, можно заменить частным решением с нулевыми начальными условиями следующей системы уравнений:

$$(b_{ij} + Hg_{ij})\dot{q}_{j3} + c_{ij}q_{j3} = f_i(t)$$

Величина допускаемой при этом погрешности как в координатах, так и в скоростях определяется решением с нулевыми начальными данными уравнений (8), в которых q_{j1}'' должны быть заменены значениями, получающимися для решения с соответствующими начальными данными второй группы уравнений системы (6) с правыми частями $H\dot{f}_i$. Поэтому погрешность будет иметь порядок q_{j1}'', поделенный на H^2. Если $f_j(t)$ имеют нулевой порядок относительно H, то порядок погрешности не превосходит H^{-1} для любого промежутка времени, в котором $f_j(t)$ остаются ограниченными.

Дадим некоторые уточнения оценок (10) и (11). Переходя в уравнениях (9) к независимой переменной $\tau = Ht$, получим

$$a_{ij}y_j'' + (H^{-1}b_{ij} + g_{ij})\,y_j' = -H^{-2}c_{ij}\,(q_{j2} + y_j) \tag{12}$$

Величины $q_{j2} + y_j$ имеют порядок H^{-1}; при вычислении частного решения уравнений (12) с нулевыми начальными данными приходится проводить интегрирование по τ от 0 до Ht, поэтому указанное частное решение y_i' будет иметь порядок H^{-2}. В силу уравнений (12) найдем

$$y_i = (f_{ij}\,y_j')_0^t - \int_0^t \dot{f}_{ij}y_j'dt + O(H^{-2}), \qquad y_i = O(H^{-2})$$

Будем говорить, что для гироскопической системы выполнены условия (A), если $\dot{g}_{ij}$ и $\dot{c}_{ij}$ равны нулю или имеют порядок не больше чем H^{-1}. Как следует из системы (6), q_{i1}'' в этом случае имеют нулевой порядок относительно H, поэтому в силу уравнений (8) получаем $x_i = O(H^{-2})$.

Мы, следовательно, показали, что для решения уравнений (1) с произвольными начальными данными при удовлетворении условий (A) имеет место оценка

$$q_i = q_{i1} + q_{i2} + O(H^{-2})$$

3. Рассмотрим автоматически регулируемую гироскопическую систему с k дополнительными уравнениями

$$\begin{gathered} a_{ij}\ddot{q}_j + (b_{ij} + Hg_{ij})\dot{q}_j + c_{ij}q_j + d_{i\nu}\dot{q}_\nu + e_{i\nu}q_\nu = 0 \\ A_{\mu\nu}\ddot{q}_\nu + B_{\mu\nu}\dot{q}_\nu + C_{\mu\nu}q_\nu + D_{\mu j}q_j = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь индексы i и j принимают значения от 1 до s, μ и ν — от $s+1$ до $s+k$, $\|a_{ij}\|$ и $\|A_{\mu\nu}\|$ — матрицы положительно определенных квадратичных форм. Пусть определитель матрицы гироскопических членов $\|g_{ij}\|$ отличен от нуля.

Обозначим через $\{q_{i1}, q_{\mu 1}\}$ решение с начальными условиями

$$\begin{gathered} q_{i1}^\circ = q_i^\circ, \quad q_{\mu 1}^\circ = q_\mu^\circ, \quad \dot{q}_{\mu 1}^\circ = \dot{q}_\mu^\circ \\ [b_{ij}(0) + Hg_{ij}(0)]\,\dot{q}_{j1}^\circ + c_{ij}(0)\,q_{j1}^\circ + d_{i\nu}(0)\,\dot{q}_{\nu 1}^\circ + e_{i\nu}(0)\,q_{\nu 1}^\circ = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

уравнений, получающихся из системы (13) при $a_{ij} = 0$. Будем условно называть прецессией $\{q_i^{(1)}, q_\mu^{(1)}\}$ движение системы (13) с начальными данными (14). Соответственно нутацией назовем решение системы (13), имеющее начальные данные

$$q_i^{\circ(2)} = q_\mu^{\circ(2)} = \dot{q}_\mu^{\circ(2)} = 0, \qquad \dot{q}_i^{\circ(2)} = \dot{q}_i^\circ - \dot{q}_{i1}^\circ \tag{15}$$

Будем иметь

$$q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}, \qquad q_\mu = q_\mu^{(1)} + q_\mu^{(2)}$$

Положим

$$\begin{gathered} q_i^{(1)} = q_{i1} + u_i, \quad q_\mu^{(1)} = q_{\mu 1} + u_\mu \\ q_i^{(2)} = q_{i2} + v_i, \quad q_\mu^{(2)} = v_\mu \end{gathered}$$

где q_{i2} те же, что и в п. 1. Неизвестные u_i, u_μ и v_i, v_μ, а также их производные по времени найдутся как частные решения с нулевыми начальными данными соответствующих систем, отличающихся от системы (13) наличием в правых частях первых s уравнений в первом случае выражений $-a_{ij}\ddot{q}_{j1}$, во втором случае выражений $-c_{ij}v_j$.

Повторяя рассуждения п. 1, получим

$$\{\dot{q}_{i1};\ u_i,\ u_\mu,\ \dot{u}_i,\ \dot{u}_\mu;\ v_i,\ v_\mu,\ \dot{v}_i,\ \dot{v}_\mu\} = O(H^{-1})$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{gathered} q_i = q_{i1} + O(H^{-1}), \qquad q_\mu = q_{\mu 1} + O(H^{-1}) \\ \dot{q}_i = \dot{q}_{i2} + O(H^{-1}), \qquad \dot{q}_\mu = \dot{q}_{\mu 1} + O(H^{-1}) \end{gathered}$$

Вынужденные колебания стабилизированной системы, отличающейся от системы (13) наличием в правых частях соответствующих обобщенных сил $f_i(t)$ и $f_\mu(t)$, можно заменить частным решением следующих уравнений:

$$\begin{gathered} (b_{ij} + Hg_{ij})\,\dot{q}_{j3} + c_{ij}\,q_{j3} + d_{i\nu}\,\dot{q}_{\nu 3} + e_{i\nu}\,q_{\nu 3} = f_i(t) \\ A_{\mu\nu}\ddot{q}_{\nu 3} + B_{\mu\nu}\dot{q}_{\nu 3} + C_{\mu\nu}q_{\nu 3} + D_{\mu j}q_{j3} = f_\mu(t) \end{gathered}$$

Допускаемая при этом погрешность, как следует из рассуждения п. 2, будет иметь порядок H^{-1}.

Поступила 20 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. К теории гироскопа Аншютца, изложенной проф. Геккелером Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4, 1940.
2. Ройтенберг Я. Н. Многогироскопная вертикаль, ПММ, т. X, вып. 1, 1946.
3. Кошляков В. Н. О девиациях гировертикали при переменной скорости собственного вращения гироскопа, Инженерный сборник, т. VI, 1950.
4. Меркин Д. Р. Гироскопические системы, ГИТТЛ, М., 1956.
5. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса, ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
6. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопной вертикали, ПММ, т. XXI, вып. 2. 1957.