

УДАР ПО КОЛЬЦЕВОЙ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

Г. С. Шапиро

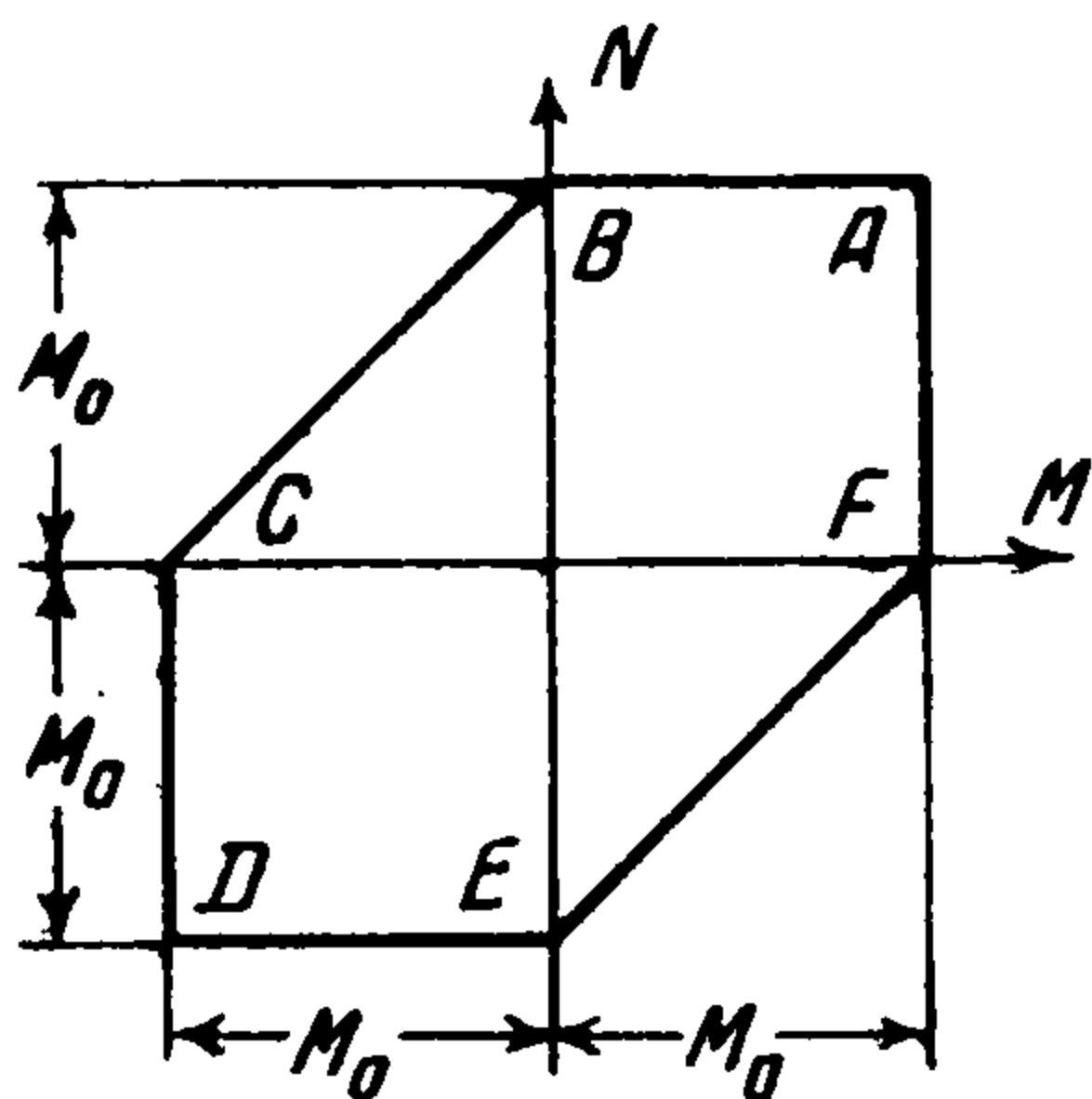
(Москва)

Идея использования жестко-пластического анализа для исследования динамического поведения пластинок, по-видимому, впервые была выдвинута А. А. Гвоздевым [1] в связи с оценкой прочности прямоугольных пластинок при воздействии взрывной нагрузки (более подробную библиографию см. в обзоре [2] Х. А. Рахматулина и автора).

Теория осесимметричного динамического изгиба круглых жестко-пластических пластинок была дана Гопкинсом и Прагером [3], которые рассмотрели свободно опертую круглую пластинку под действием равномерно распределенной нагрузки, сохраняющейся в течение некоторого интервала времени постоянное значение, а затем мгновенно снятой. Ван и Гопкинс [4] исследовали пластические деформации круглой заделанной пластинки, всем точкам которой в начальный момент придается одинаковая скорость. Оба эти решения относятся к сплошным пластинкам; по кольцевым пластинкам опубликованных работ не имеется¹.

Вопрос о проверке теории жестко-пластического динамического изгиба пластинок на опыте в литературе не освещен, по-видимому, в связи с трудностью реализации в экспериментах условий, точно отвечающих постановкам задач, для которых найдены теоретические решения. Иное положение имеет место для балок, где ряд теоретических решений экспериментально проверялся Парксом [5].

В предлагаемой заметке дается простое решение задачи, сравнительно легко доступное опытной проверке. Кольцевая пластинка на внутреннем опорном контуре $r = a$ закреплена. Внешнему, свободному контуру $r = R$ пластинки мгновенно при-



Фиг. 1

дается равномерно распределенная по окружности, постоянная скорость v_0 , которая в заданный момент времени $t = T$ мгновенно снимается. Движение пластинки в этом случае распадается на три фазы. В течение первой фазы $0 < t < t^*$ шарнирная окружность, возникающая в начальный момент на подвергнутом удару контуре, перемещается внутрь пластинки и достигает опорного контура (предполагается, что $t^* < T$; случай $t^* > T$ может быть рассмотрен аналогичным образом). Вторая фаза характеризуется образованием на опорном контуре $r = a$ стационарной шарнирной окружности, вокруг которой пластинка равномерно вращается так, что сил инерции не возникает.

Третья фаза возникает после снятия со свободного контура $r = R$ скорости v_0 . При этом пластинка вплоть до остановки продолжает вращаться по инерции вокруг той же шарнирной окружности $r = a$. Определяются продолжительность каждой фазы движения, а также форма прогибов пластинки и распределение перерезывающих сил и изгибающих моментов,

1. Основные положения. Предполагается, что пластинка изготовлена из жестко-идеально-пластического материала, подчиняющегося условию текучести Треска и соответствующему закону течения. Обозначим изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях через M и N соответственно. Тогда в плоскости M, N кривой текучести для пластинки (фиг. 1) будет шестиугольник $ABCDEF$.

В начальный момент времени $t = 0$ [пластинка является плоской и находится в] покое (фиг. 2, а). Таким образом, начальные условия для прогибов будут

$$w(r, 0) = w_t(r, 0) = 0 \quad (1.1)$$

В момент $t = 0$ контур $r = R$ пластинки начинает смещаться в осевом направлении с заданной постоянной скоростью v_0 в течение интервала времени $0 < t < T$.

¹ В простейшей постановке с сохранением статической формы прогибов (характеризующейся образованием стационарной шарнирной окружности на заделанном опорном контуре и переходом плоской пластинки в усеченный конус) задачи о кольцевой пластинке под действием постоянной нагрузки на свободном контуре рассматривались в МГУ К. И. Цимбал и Н. А. Мицкевичем.

Для решения задачи необходимо задаться полем скоростей смещений. При решении динамических задач для пластинок иногда [1] исходят из поля скоростей, отвечающего статической задаче о предельном равновесии пластинки. Очевидно, что в данном случае такой подход не может привести к цели. Действительно, когда на контуре $r = R$ будет действовать предельное кольцевое давление, то возникнет шарнирная окружность $r = a$, вокруг которой будет вращаться пластинка, переходя из плоскости в усеченный конус. Если допустить существование подобного поля скоростей в нашей динамической задаче, то, поскольку вращение вокруг контура $r = a$ будет равномерным, сил инерции не возникнет и мы придем к абсурдному результату: какова бы ни была скорость удара v_0 , сопротивление пластинки (перерезывающая сила при $r = R$) остается постоянным и равным предельному статическому сопротивлению. Поэтому необходимо задаться иным полем скоростей.

Предположим, что на контуре $r = R$ в начальный момент удара $t = 0$ возникает нестационарная шарнирная окружность, радиус которой ρ уменьшается и в конце первой фазы движения достигает значения $\rho = a$. В каждой фазе отсчет времени для удобства будем вести от нуля. Время в первой, второй и третьей фазах обозначим через t_1 , t_2 и t_3 соответственно. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{R}, & \eta &= \frac{r}{R}, & \xi &= \frac{\rho}{R}, & \beta &= \frac{(\mu v_0 R^2)}{12M_0}, & \tau_i &= \frac{t_i}{\beta} \quad (i=1,2,3) \\ m &= \frac{M}{M_0}, & n &= \frac{N}{M_0}, & q &= \frac{QR}{M_0}, & z_i &= \frac{w_i}{v_0 \beta} \quad (i=1,2,3) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\dot{k}_r = \frac{R^2}{v_0} \chi_r, \quad \chi_r = -\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \quad k_\varphi = \frac{R^2}{v_0} \chi_\varphi, \quad \chi_\varphi = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

где μ — масса единицы площади пластинки, Q — перерезывающая сила, \dot{k}_r и \dot{k}_φ — скорости изменения кривизн в радиальном и окружном направлениях соответственно.

Точкой обозначено дифференцирование по t_i или τ_i , а через z обозначен суммарный прогиб, для первой фазы $z = z_1$ (а также $t = t_1$), для второй фазы $z = z_1 + z_2$ и для третьей $z = z_1 + z_2 + z_3$.

2. Первая фаза движения. Предположим, что в первой фазе поле скоростей определяется зависимостями

$$\dot{z} = \frac{\eta - \xi}{1 - \xi} \quad (\xi \leq \eta \leq 1), \quad \dot{z} = 0 \quad (\alpha \leq \eta \leq \xi) \quad (2.1)$$

Для ускорений получим

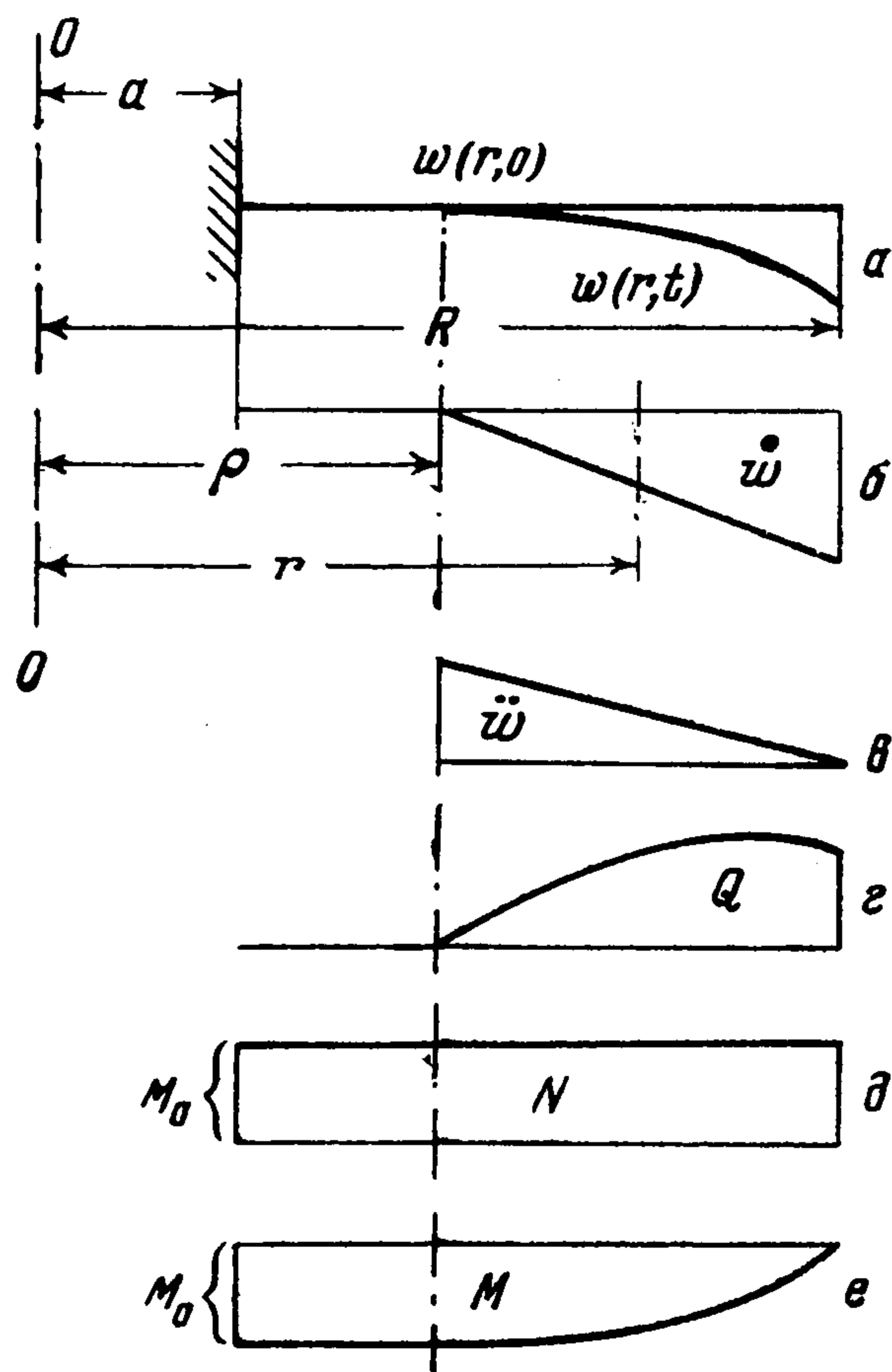
$$\ddot{z} = -\frac{\xi(1-\eta)}{(1-\xi)^2} \quad (\xi \leq \eta \leq 1), \quad \ddot{z} = 0 \quad (\alpha \leq \eta \leq \xi) \quad (2.2)$$

Для балок представление, аналогичное (2.1), было использовано Парксом [5] для несколько иной задачи — об ударе по балке груза конечной массы.

Картина распределения скоростей и ускорений имеет вид, показанный на фиг. 2, б, в. Пользуясь (1.2) и (2.1), находим скорости изменения кривизн:

$$\dot{\chi}_r = 0, \quad \dot{\chi}_\varphi = -\frac{1}{\eta} \frac{1}{1-\xi} \quad (\xi \leq \eta \leq 1), \quad \dot{\chi}_r = 0, \quad \dot{\chi}_\varphi = 0 \quad (\alpha \leq \eta \leq \xi) \quad (2.3)$$

Из формул (2.3) заключаем, что при $\xi \leq \eta \leq 1$ вектор скорости кривизны ортогонален стороне DE шестиугольника текущей окружности $\eta = 1$ отвечает состояние E ,



Фиг. 2

в нестационарной шарнирной окружности $\eta = \xi$ соответствует состояние D . Кольцевая область $\alpha \leq \leq \xi$ должна находиться также в состоянии D ; отсюда следует, что в этой области

$$q \equiv 0 \quad (2.4)$$

Уравнение динамического равновесия, учитывая (2.4), можно записать в виде

$$\frac{d(m\eta)}{d\eta} - n = \eta q = \int_{\xi}^{\eta} z \eta d\eta \quad (2.5)$$

Замечая, что $n = -1$, и используя (2.2), имеем

$$\frac{d(m\eta)}{d\eta} + 1 = \frac{n \dot{\xi}}{(1 - \xi)^2} \int_{\xi}^{\eta} (1 - \eta) \eta d\eta \quad (2.6)$$

Интегрируя это уравнение при граничных условиях $m = -1$ при $\eta = \xi$ и $m = 0$ при $\eta = 1$, находим скорость движения шарнирной окружности в виде

$$\dot{\xi} = -[(1 - \xi)(1 + 3\xi)]^{-1} \quad (2.7)$$

Отсюда

$$\tau_1 = \xi^3 - \xi^2 - \xi + c$$

где c — произвольная постоянная. Ее можно определить из условия, что $\xi = 1$ при $\tau_1 = 0$. Следовательно, $c = 1$. Таким образом,

$$\tau_1 = (1 - \xi)(1 - \xi^2) \quad (2.8)$$

Время τ_1^* окончания первой фазы можно определить, положив $\xi = \alpha$, так что

$$\tau_1^* = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \quad (2.9)$$

Из равенств (2.2), (2.5) и (2.7) можно определить перерезывающую силу:

$$q = -2[(1 - \xi)^3(1 + 3\xi)]^{-1} \left[3 \left(\eta - \frac{\xi^2}{\eta} \right) - 2 \left(\eta^2 - \frac{\xi^3}{\eta} \right) \right] \quad (2.10)$$

На окружности $\eta = 1$, подвергнутой удару:

$$q = -2(1 + 2\xi)[(1 - \xi)(1 + 3\xi)]^{-1} \quad (2.11)$$

В начальный момент удара $\xi = 1$ и на окружности $\eta = 1$ перерезывающая сила имеет особенность. Этого следовало ожидать, так как в противном случае при $\eta = 1$ радиальный момент не мог бы достигнуть предельного значения $m = -1$. На опорной окружности $\eta = \alpha$ перерезывающая сила равна нулю в течение всей первой фазы движения. Радиальные изгибающие моменты определяются при помощи равенств (2.6) и (2.7). Получаем

$$m = -1 + [(1 - \xi)^3(1 + 3\xi)]^{-1} [\eta^2(2 - \eta) + \eta^{-1}(4 - 3\xi)\xi^3 + 2\xi^2(2\xi - 3)] \quad (2.12)$$

Легко убедиться, что при $\eta = \xi$ момент m имеет экстремальное значение $m = -1$. Следовательно, условие текучести нигде не нарушено.

Для определения прогибов z_1 можно воспользоваться несколькими путями.

Прежде всего можно при помощи (2.8) исключить из уравнения (2.1) ξ и непосредственно проинтегрировать (2.1) по τ_1 . Проще, однако, исключить из (2.1) и (2.8) время τ и вести интегрирование по ξ . Получим

$$dz = -(\eta - \xi)(1 + 3\xi) d\xi \quad (2.13)$$

Отсюда

$$z = - \int_{\eta}^{\xi} (\eta - \xi)(1 + 3\xi) d\xi = \frac{1}{2}(\eta - \xi)^2(1 + 2\xi + \eta) \quad (2.14)$$

Иной способ определения прогибов указан Гопкинсом и Прагером [3]. Так как на шарнирной окружности $\xi = \xi(\tau)$ имеет место скачок

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} \right] = (1 - \xi)^{-1} \quad (2.15)$$

и, как известно [3],

$$\left[\frac{\partial z}{\partial \eta} \right] + \dot{\xi} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right] = 0 \quad (2.16)$$

то отсюда с учетом (2.7) имеем

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right] = 1 + 3\xi \quad (2.17)$$

Поскольку шарнирная окружность перемещается в невозмущенной области, внутри которой $\partial^2 z / \partial \eta^2 = 0$, должно быть

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right] = \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \quad (2.18)$$

Учитывая, что в возмущенной области $\xi \leq \eta \leq 1$ согласно (2.1) $\partial^2 z / \partial \eta^2 = 0$, имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 1 + 3\eta \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) при краевых условиях $\partial z(\xi, \tau) / \partial \eta = z(\xi, \eta) = 0$, приходим вновь к (2.14). Полагая в (2.14) $\xi = \alpha$, получим прогибы $z = z^*$ в конце первой фазы.

Диаграммы распределения Q , M и N по радиусу r представлены на фиг. 2, г, д, е.

3. Вторая фаза. Во второй фазе пластинка равномерно вращается вокруг опорной окружности $\eta = \alpha$. Смещения z_2 в этой фазе определяются выражением

$$z_2 = \frac{\eta - \alpha}{1 - \alpha} \tau_2 \quad (3.1)$$

Обозначим продолжительность второй фазы через τ_2^* и назовем через k отношение τ_2^* / τ_1^* . Тогда в конце второй фазы прогибы $z_1 = z_2^*$ будут

$$z_2^* = k(\eta - \alpha)(1 - \alpha^2)$$

Перерезывающие силы и изгибающие моменты во второй фазе будут такими же, как при действии статической предельной нагрузки [6].

4. Третья фаза. Третья фаза характеризуется вращением пластинки по инерции вокруг стационарной шарнирной окружности $\eta = \alpha$. Прогибы $z_3(\eta, \tau_3)$ будем искать в виде

$$z(\eta, \tau_3) = Z(\tau_3) \frac{\eta - \alpha}{1 - \alpha}$$

где $Z(\tau_3)$ — неизвестная функция времени. Для ее определения воспользуемся уравнением динамического равновесия, которое в данном случае запишем так:

$$\frac{d(\eta m)}{d\eta} - n = - \int_{\eta}^1 \ddot{z}_3 \eta d\eta \quad (3.2)$$

При этом мы учли, что $q = 0$ на окружности $\eta = 1$. Замечая, что по тем же соображениям, которые имели место для первой фазы, должно быть $n = -1$, подставляя в (3.2) равенство (3.1) и производя интегрирование, находим

$$\frac{d(\eta m)}{d\eta} + 1 = - \frac{Z}{1 - \alpha} \left(\frac{1}{3} - \frac{\eta^3}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha \eta^2}{2} \right) \quad (3.3)$$

Учитывая, что $m(\alpha, \tau_3)$ и $m(1, \tau_3) = 0$, имеем $\dot{Z} = -(3 - 5\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^{-1}$. Замечая, что $\dot{Z}(0) = 1$, а $Z(0) = 0$, находим

$$Z = \tau_3 - \frac{1}{2} (3 - 5\alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^{-1} \tau_3^2 \quad (3.4)$$

Пластинка остановится в момент $\tau_3^* = 3 - 5\alpha + \alpha^2 + \alpha^3$. Полное время остановки будет $\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^*$. Величина полного прогиба в момент $\tau = \tau^*$

$$z^* = z_1^* + z_2^* + z_3^* = \frac{1}{2} (\eta - \alpha) [\eta(\eta + \alpha + 1) + 2k(1 - \alpha^2) + 3(1 - \alpha - \alpha^2)] \quad (3.5)$$

Поступила 3 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны. Строительная промышленность, № 1—2, 1943.
2. Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С. Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде. Известия АН СССР, ОТИ, № 2, 1955, стр. 68—89.
3. Гопкинс, Прагер. Динамика пластической круглой пластинки. Механика, сб. переводов и обзоров, ИЛ, № 3, 1955, стр. 112—122.
4. Ван, Гопкинс. О пластической деформации заделанной по краю круглой пластинки. Механика, сб. переводов и обзоров ИЛ, № 3, 1955, стр. 123—138.
5. Parkes E. W. Some simple experiments on the dynamic plastic behaviour of mild-steel beams. British Welding Journal. August 1956, p. 362—366.
6. Ильюшин А. А., Пластичность, ОНТИ, 1948.