В этих формулах первые члены в правой части представляют собой упругие деформации, вторые — пластические деформации. Как видно, вектор приращения пластической деформации перпендикулярен к поверхности текучести.

Конечно, в этих рассуждениях существенно то, что величины ε_1 и ε_2 имеют тот же порядок малости, что Δq_x и Δq_y, а для этого надо, чтобы расстояние NM не было мало.

Таким образом, предложенная простая модель воспроизводит ряд свойств пластического тела, обнаруживаемых на опыте или предполагаемых некоторыми теориями пластичности, а именно: ограниченную применимость соотношений деформационного типа, наличие угловой точки на последующих поверхностях текучести при гладкой начальной поверхности текучести, эффект Баушингера, направление вектора приращения пластической деформации по нормали к поверхности течения там, где последняя является гладкой. В то же время на этом примере можно видеть значительную сложность, связанную с описанием процессов непропорционального нагружения.

Поступила 27 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Клюшников В. Д. О законах пластичности для материала с упрочнением. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.
2. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. Сборник Теория пластичности. ИЛ, 1948.
3. Batdorf J. B., Budianskz B. A mathematical theory of plasticit based on the concept of slip NACA T. N., N 1871, April 1949.
4. Cicala P. Sulle deformazione plastiche Lincei — Rendicojti Sc. fis. e mat., v. V, 6, 1950.

О ДАВЛЕНИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА, ИМЕЮЩЕГО В ПЛАНЕ ФОРМУ КЛИНА

В. Л. Рвачев

(Бердянск)

Решение задачи о давлении на упругое полупространство клинообразного в плане штампа с плоским основанием позволяет установить закон распределения давления в окрестности угловых точек для штампов полигональной (например, прямоугольной) формы. Это решение может быть также использовано при расчете плит на упругом основании.

Л. А. Галиным [1] был предложен метод решения этой задачи для случая, когда на упругое полупространство вне штампа действует некоторая пригрузка.

Оказывается, что, усовершенствовав метод Л. А. Галина, можно получить решение и в случае, когда указанная пригрузка отсутствует. При этом для давления под штампом получаем формулу вида

$$p(r,\ \theta) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{r^{\gamma-1}f(\theta)}{(1+\cos\theta)\sqrt{\operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2\alpha - \operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2\theta}}$$

где 2α — угол при вершине клина, $f(\theta)$ — некоторая функция, а γ — величина, изменяющаяся в пределах от 0 до 1 в зависимости от величины угла α.

§ 1. Пусть область (S) контакта между штампом и упругим полупространством $z \leqslant 0$ заключена между двумя лучами, угол между которыми равен 2α, а ось Ox направлена по биссектрисе этого угла.

Как известно, решение задачи сводится к отысканию гармонической во всем пространстве, за исключением точек плоской щели, имеющей форму области контакта, и непрерывной всюду функции $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(x, y, 0) = \text{const} \quad \text{на } (S) \tag{1.1}$$

$$\varphi'_z(x, y, 0) = 0 \quad \text{вне } (S) \tag{1.2}$$

$$\operatorname{grad} \varphi \to 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \to \infty \tag{1.3}$$

$$\varphi(x, y, z) \not\equiv \text{const} \tag{1.4}$$

Если функция $\varphi(x, y, z)$ найдена, то давление под штампом можно найти по формуле

$$p(x, y) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \varphi'_z(x, y, 0) \tag{1.5}$$

где E и ν — упругие постоянные.

Введем сферические координаты r, θ, ω по формулам

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\omega, \qquad z = r\sin\theta\sin\omega \tag{1.6}$$

Тогда уравнение Лапласа примет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\cdot\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = 0 \tag{1.7}$$

В трех частных случаях, когда $\alpha = 0$, $\alpha = {}^1/_2\pi$ и $\alpha = \pi$, т. е. когда область контакта вырождается в полуось, полуплоскость и всю плоскость, легко найти следующие точные решения задачи:

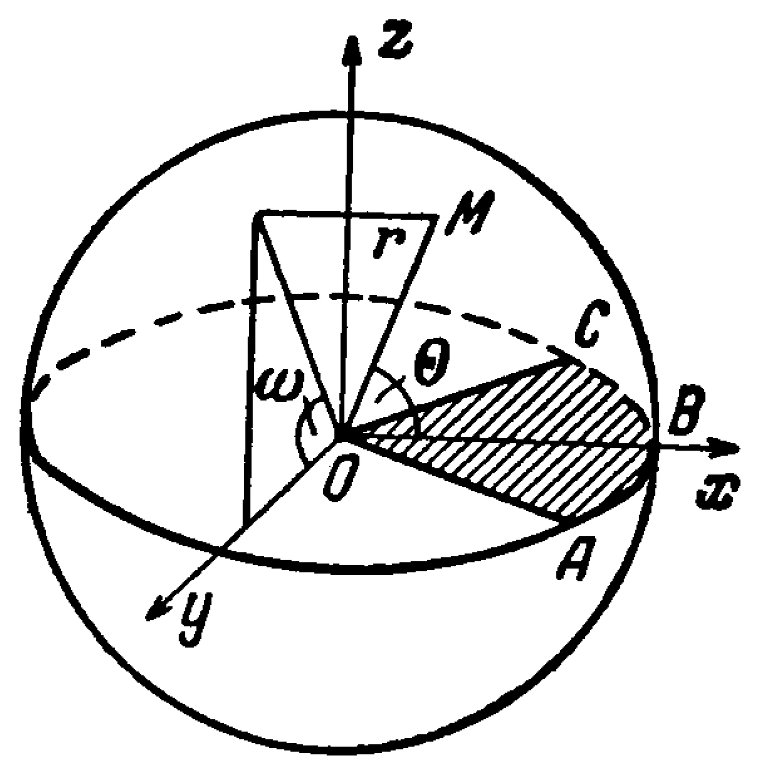
$$\begin{gathered}\varphi = C\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + C_1 \qquad \text{при } \alpha = 0\\ \varphi = Cr^{1/2}\sqrt{\sqrt{\cos\theta + \sin\theta\sin^2\omega} - \cos\theta} + C_1 \qquad \text{при } \alpha = \frac{\pi}{2}\\ \varphi = Cr\sin\theta\sin\omega + C_1 \qquad \text{при } \alpha = \pi\end{gathered} \tag{1.8}$$

где C, C_1 — произвольные постоянные, для определения которых нужны некоторые дополнительные условия.

Приведенные частные случаи наводят на мысль, что искомая функция может быть представлена в виде

$$\varphi = r^\gamma\Phi(\theta, \omega) + C_1 \tag{1.9}$$

причем, для того чтобы выполнялось условие (1.3), надо, чтобы $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.



Фиг. 1

Легко убедиться, что функция φ будет удовлетворять уравнению (1.7), если $\Phi(\theta, \omega)$ есть решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} + \gamma(\gamma+1)\Phi = 0 \tag{1.10}$$

Учитывая граничные условия (1.1) и (1.2), приходим к выводу, что задача сводится к отысканию на сфере (фиг. 1) функции $\Phi(\theta, \omega)$, удовлетворяющей уравнению (1.10) и обращающейся в нуль в точках дуги ABC ($|\theta| \leqslant \alpha$, $\omega = 0$ или π).

§ 2. От переменных θ, ω перейдем к переменным ρ, ψ при помощи соотношения

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\omega} \qquad (\zeta = \rho e^{i\psi}) \tag{2.1}$$

При этом преобразовании сфера с разрезом вдоль дуги ABC перейдет во внутренность единичного круга $\rho \leqslant 1$. Уравнение (1.10) в новых переменных имеет вид:

$$L(\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2} + \lambda f(\rho, \psi)\Phi = 0 \tag{2.2}$$

где

$$\lambda = 16\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\gamma(\gamma+1) \tag{2.3}$$

$$f(\rho, \psi) = \frac{\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\psi + 1}{[4\rho^2 + \operatorname{tg}^2{}^1/_2\alpha(\rho^4 + 2\rho^2\cos^2 2\psi + 1)]^2} \tag{2.4}$$

Если $\Phi_1(\rho, \psi)$ — результат замены переменных в функции $\Phi(\theta, \omega)$, то эта функция должна удовлетворять уравнению (2.2) внутри круга $\rho \leqslant 1$ и обращаться в нуль на его границе.

Так как функция $\lambda f(\rho, \psi) \geqslant 0$, то отличное от нуля решение уравнения (2.2), обращающееся на границе области в нуль, получим лишь для некоторого спектра значений величины λ.

Учитывая, что $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, из формулы (2.3) найдем

$$\gamma = -0.5 + \sqrt{0.25 + {}^1/_{16}\lambda \operatorname{ctg}^2 {}^1/_2\alpha} \leqslant 1 \tag{2.5}$$

Из указанного спектра значений величины λ следует взять то значение, которое удовлетворяет этому неравенству.

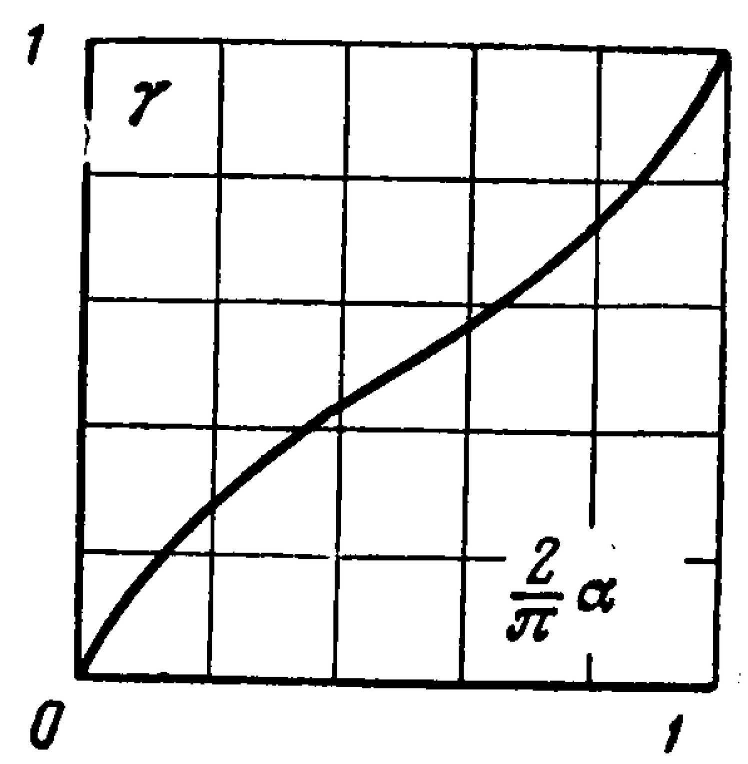
§ 3. Функция $\Phi_1(\rho, \psi)$ будет удовлетворять граничному условию, если положить, что

$$\Phi_1(\rho, \psi) = (1 - \rho^2) F(\rho^2, \rho^2 \cos 2\psi)$$

Разлагая функцию $F(\rho^2; \rho^2 \cos 2\psi)$ в двойной ряд Тейлора, получим

$$\Phi_1(\rho, \psi) = (1 - \rho^2)(a_{00} + a_{10}\rho^2 + a_{01}\rho^2 \cos 2\psi + a_{20}\rho^4 + a_{11}\rho^4 \cos 2\psi + a_{02}\rho^4 \cos^2 2\psi + \ldots) \tag{3.1}$$

Для определения постоянных $a_{00}, a_{10}, \ldots$ применим метод Галеркина. Пусть $L[\Phi_1(\rho, \psi)]$ — результат подстановки функции $\Phi_1(\rho, \psi)$ в левую часть уравнения (2.2). Если в формуле (3.1) ограничиться первыми n членами и потребовать, чтобы функция $L[\Phi_1(\rho, \psi)]$ была внутри круга $\rho \leqslant 1$ ортогональна каждому из этих n членов, получим однородную систему n линейных уравнений. Приравняв нулю определитель этой системы, получим уравнение n-й степени относительно λ, среди корней которого находим тот, который удовлетворяет условию (2.5).



Фиг. 2

Так, например, для прямоугольного штампа ($\alpha = {}^1/_4\pi$) получаем следующие первые шесть приближений для величины γ:

$$\gamma_1 = 0.429, \quad \gamma_2 = 0.341, \quad \gamma_3 = 0.340,$$
$$\gamma_4 = 0.315, \quad \gamma_5 = 0{,}314, \quad \gamma_6 = 0.314$$

В случае, когда $\alpha = {}^1/_2\pi$ — точное значение $\gamma = 0.5$, аналогичная последовательность приближений следующая:

$$\gamma_1 = 0.579, \quad \gamma_2 = 0.517, \quad \gamma_3 = 0.515, \quad \gamma_4 = 0.501, \quad \gamma_5 = 0.501, \quad \gamma_6 = 0.500$$

На фиг. 2 приведен график зависимости величины γ от угла α, построенный в соответствии со следующими данными:

$\alpha = 0$	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$\gamma = 0$	0.13	0.23	0.31	0.38	0.44	0.50	0.56	0.62	0.69	0.77	0.87	1.0

Принимая в случае прямоугольного штампа $\gamma = 0.31$, можно получить для давления под штампом следующую формулу:

$$p(r, \theta) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \frac{C(1 - 0.68 \operatorname{tg}^2 {}^1/_2\theta - 0.4 \operatorname{tg}^4 {}^1/_2\theta + \ldots)}{r^{0.69}(1 + \cos\theta)\sqrt{\operatorname{tg}^2 {}^1/_8\pi - \operatorname{tg}^2 {}^1/_2\theta}} \tag{3.2}$$

Для сравнения приведем формулу, полученную Л. А. Галиным:

$$p(r, \theta) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \frac{C}{r(1 + \cos\theta)\sqrt{\operatorname{tg}^2 {}^1/_2\alpha - \operatorname{tg}^2 {}^1/_2\theta}} \tag{3.3}$$

Поступила 20 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., 1953.