

МОДЕЛЬ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩАЯ НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Ю. Н. Работнов

(Москва)

За последние годы появилось большое количество исследований, посвященных вопросу об установлении связи между напряжениями и деформациями в пластических телах, обладающих упрочнением. Имеющийся экспериментальный материал убедительно показал, что в условиях сложного нагружения старые, простейшие теории пластичности, как теория малых упруго-пластических деформаций, не пригодны. Для объяснения опытных факторов пришлось ввести ряд новых идей, в том числе представление об угловой или конической точке на поверхности нагружения. Недавно опубликованный обзор [1] избавляет нас от необходимости излагать здесь эти новые идеи более подробно.

Нужно заметить, что гипотезы, лежащие в основе современных теорий пластичности, носят формальный характер, а экспериментальные данные недостаточно ясны, они используются обычно лишь для косвенного подтверждения теории и, как правило, допускают различные толкования. Поэтому до сих пор не установилась единая точка зрения на пути дальнейшего развития теории пластичности.

Настоящая заметка не претендует на какое-либо продвижение в этой области, цель ее состоит в том, чтобы на простом примере проиллюстрировать некоторые свойства упруго-пластических систем, аналогичные свойствам упрочняющегося пластического материала, действительными ему определенными теориями. Известно, что свойства упрочняющегося материала при растяжении могут быть моделированы при помощи стержневой системы, состоящей из упруго-пластических элементов, материал которых не обладает упрочнением [2]. Здесь развивается та же идея для системы с двумя степенями свободы.

Рассмотрим упруго-пластическую систему, на которую действуют силы Q_1, \dots, Q_n . Соответствующие перемещения пусть будут q_1, \dots, q_n . В n -мерном пространстве существует начальная поверхность текучести $f(Q_1, \dots, Q_n)$, отделяющая область упругих состояний от области состояний упруго-пластических. Простое нагружение — это нагружение вдоль луча, выходящего из начала координат, что соответствует пропорциональному возрастанию сил. Достигнув некоторого упруго-пластического состояния, изображаемого точкой M n -мерного пространства по какому-либо пути нагружения, мы можем либо продолжать нагружение, сопровождающееся пластической деформацией, либо разгружать систему. Следовательно, через точку M можно провести поверхность, называемую поверхностью последующей текучести, отделяющую область пластического нагружения от области упругой разгрузки.

Элементам этой системы могут быть приписаны простейшие свойства, например следование диаграмме одноосной пластичности с упругой разгрузкой. Свойства системы в целом, т. е. соотношения между приложенными силами Q_i и наблюдаемыми деформациями q_i , могут служить аналогом свойств упруго-пластического тела.

Заметим, что теория пластичности Батдорфа — Будянского [3, 4] по существу основана на рассмотрении подобной модели. Некоторые из высказанных этими авторами гипотез могут вызвать возражение (что признается и самими авторами), поэтому здесь мы будем исходить из более простой модели, скомбинированной из элементов, поведение которых не может вызвать каких-либо сомнений. В качестве такой модели мы выберем тонкостенную трубу из упруго-пластического материала, не обладающего упрочнением. Труба изгибается двумя моментами M_x и M_y в перпендикулярных плоскостях.

Обозначим радиус трубы — R , толщину стенки — δ , модуль упругости материала — E , предел текучести — σ_s . Если M_x и M_y меняются пропорционально, т. е. мы осуществляем простое нагружение, очевидно, что дело сводится просто к изгибу трубы моментом $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, и, не нарушая общности, мы можем направить ось x по нейтральной оси изгиба. Кривизна изогнутой оси трубы при напряжениях,

не превышающих предела текучести

$$\kappa = \frac{M}{\pi R^3 \delta E}$$

Если в трубе возникают пластические деформации, обозначим через θ (фиг. 1) полярный угол границы пластической зоны. Так как деформация в соответствующей точке равна σ_s / E , мы получаем

$$\kappa R \sin \theta = \sigma_s / E$$

Напряжение в упругой части, в точке, определяемой полярным углом α

$$\sigma = \sigma_s \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \quad (1)$$

Вычислим теперь момент от напряжений в упругой части, даваемых формулой (1), и от напряжений в пластической части, равных σ_s . Получим

$$M = \pi R^2 \delta \sigma_s \frac{2\theta + \sin 2\theta}{\sin \theta}$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$Q = \frac{M}{R^2 \delta \sigma_s}, \quad q = \frac{ER}{\sigma_s} \kappa = \frac{1}{\sin \theta}$$

Получим:

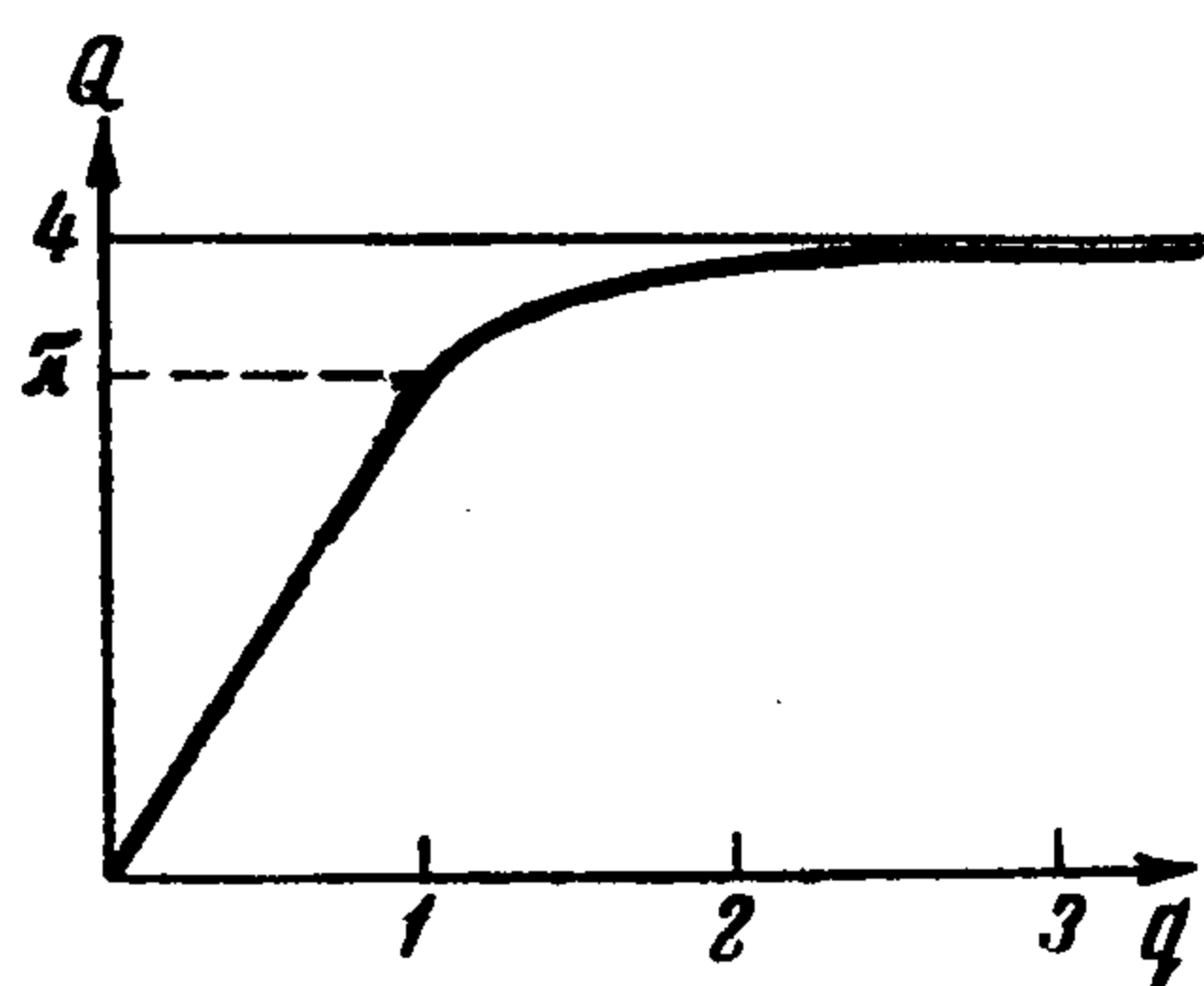
$$\begin{aligned} Q &= (2\theta + \sin 2\theta) q && \text{в упруго-пластической области} \\ Q &= \pi q && \text{в упругой области} \end{aligned} \quad (2)$$

Величина $(2\theta + \sin 2\theta)$, зависящая от q , может быть названа пластическим модулем; будем обозначать ее E_s , множитель π во второй формуле соответствует модулю упругости E_0 . На фиг. 2 изображена диаграмма $Q - q$.

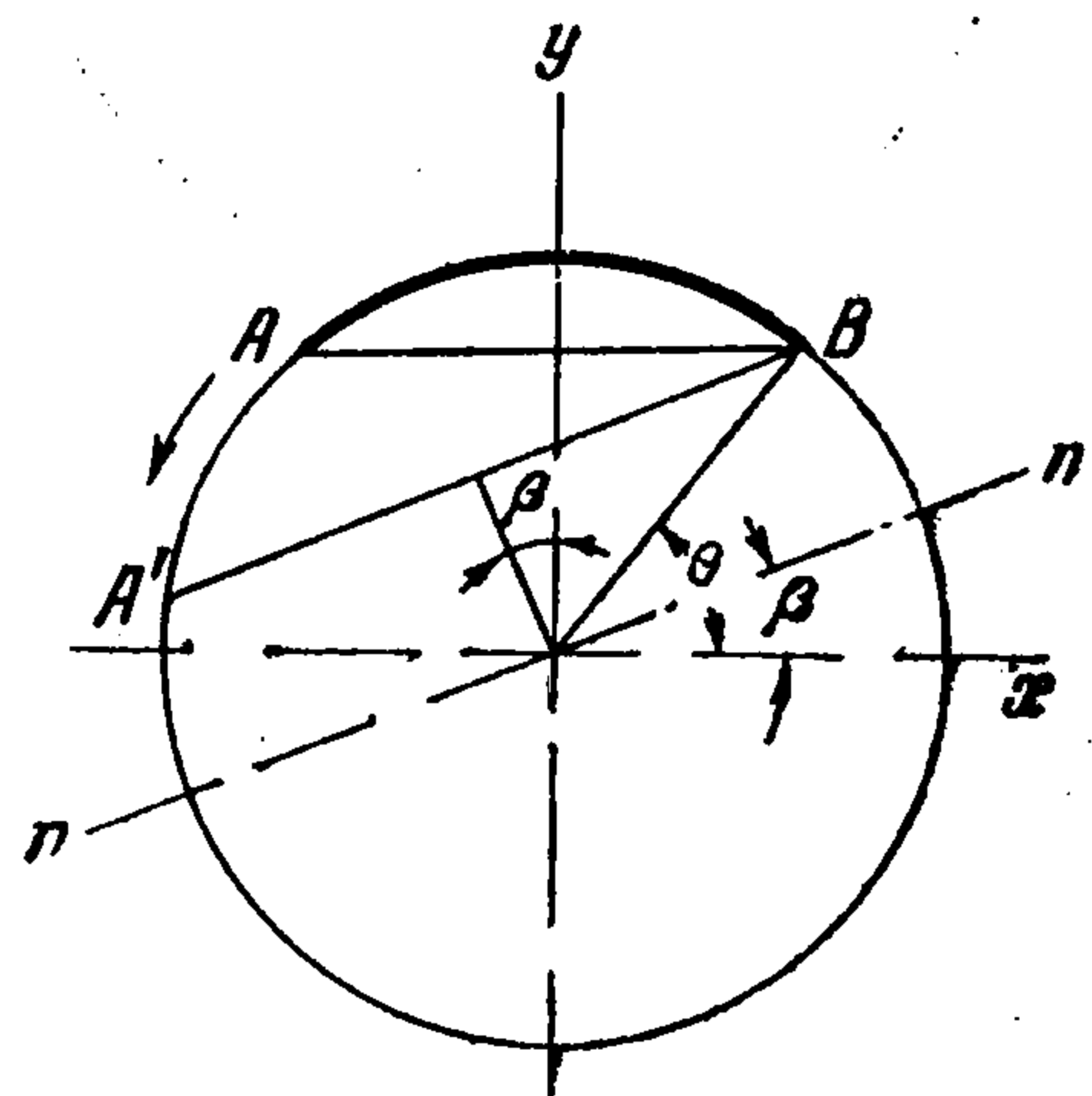
Возвращаясь теперь к общему случаю, когда действуют моменты M_x и M_y , мы получим для простого нагружения следующие соотношения:

$$Q_x = E_s q_x^2, \quad Q_y = E_s q_y^2 \quad (3)$$

Величина E_s зависит от $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ или, что то же, от $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$. Если $Q < \pi$, в формулах (2) вместо E_s нужно взять величину $E_0 = \pi$.



Фиг. 2



Фиг. 1

Эти соотношения совершенно аналогичны соотношениям между напряжениями и деформациями в теории Надаи — Генки.

Однако область применимости этих соотношений не ограничивается простым нагружением и условие разгрузки не совпадает с условием А. А. Ильюшина. Для дальнейшего рассмотрения нам будет полезно геометрическое представление в плоскости с координатами Q_x , Q_y (фиг. 3). Окружность $Q = \pi$ соответствует здесь начальной поверхности текучести, путь простого нагружения — лучу, проходящему через начало координат.

Область возможных упруго-пластических состояний вне начальной поверхности текучести оказывается также ограниченной. Действительно, безразмерный момент не может превосходить значения $Q = 4$, соответствующего переходу всего сечения трубы в пластическое состояние, окружность $Q = 4$ соответствует предельной поверхности текучести. Понятие о предельной поверхности текучести для материала с ограниченной способностью к упрочнению до сих пор в теорию пластичности не вводилось, хотя оно и представляется довольно естественным.

Предположим теперь, что мы произвели простое нагружение до некоторого значения нагрузки Q . Опять-таки, не нарушая общности, можно считать, что нагруже-

ние происходило по оси Q_x , до точки M . Граница пластической области определяется при этом углом θ . Будем производить дальнейшее нагружение, меняя не только Q_x , но и Q_y , которое равнялось нулю на первом этапе нагружения. Нейтральная ось изгиба будет уже не осью x , а некоторой прямой nn' (см. фиг. 1).

При этом, если нигде не произойдет разгрузки, формулы (3) будут сохранять силу. Следовательно, существуют пути нагружения, выходящие из точки M и отличные от пути простого нагружения, для которых остаются справедливыми соотношения деформационной теории. Крайний случай мы получим тогда, когда увеличение пластической области происходит только с одной стороны, например точка A движется по направлению стрелки в положение A' , а точка B остается на месте. Прямая $A'B$ должна быть параллельна оси nn' ; изгибающий момент относительно этой оси может быть вычислен по формуле (2), если внести в нее вместо угла θ угол $\theta' = \theta - \beta$. Таким образом

$$Q_x = Q(\theta - \beta) \cos \beta, \quad Q_y = Q(\theta - \beta) \sin \beta$$

Это значит, что крайний путь нагружения, проходящий через точку M , для которого справедливы соотношения деформационной теории, можно получить, если взять кривую, уравнение которой в полярных координатах дается формулой (2)

$$Q = Q(\theta)$$

и вращать ее около начала координат до того, как она пройдет через точку M . Очевидно, что второе семейство предельных кривых получается в результате вращения кривой $Q = Q(-\theta)$.

Эти крайние пути простого нагружения схематически показаны на фиг. 3.

В окрестности точки M

$$\Delta Q_x = \frac{dQ}{d\theta} \cos \beta (-\Delta\beta) - Q \sin \beta \Delta\beta, \quad \Delta Q_y = \frac{dQ}{d\theta} \sin \beta (-\Delta\beta) + Q \cos \beta \Delta\beta$$

а так как β мало, то

$$\Delta Q_x = -\frac{dQ}{d\theta} \Delta\beta, \quad \Delta Q_y = Q \Delta\beta$$

Заметим, что

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{dQ}{dq} \frac{dq}{d\theta} = E_t Q \operatorname{ctg} \theta$$

Здесь

$$\frac{dQ}{dq} = 2\theta - \sin 2\theta = E_t$$

Эту величину естественно назвать касательным модулем. Теперь мы можем определить наклон предельных путей простого нагружения, проходящих через точку M

$$\frac{\Delta Q_y}{\Delta Q_x} = \pm \frac{E_s}{E_t} \operatorname{tg} \theta \quad (4)$$

Соответствующий угол равен $1/2 \pi$ при $\theta = 0$ и $\theta = 1/2 \pi$, его минимальное значение, равное $76^\circ 28'$, достигается при $\theta = 57^\circ 30'$.

Выясним теперь условия упругой разгрузки после простого нагружения. Очевидно, что и здесь упругая разгрузка возможна не только путем пропорционального уменьшения моментов. Нейтральная ось разгрузки может перемещаться в известных пределах, и крайним случаем будет тот, когда она проходит через границу пластической области. Предположим, что было произведено простое нагружение по оси x до величины безразмерного момента Q ; разгрузка осуществлена в результате дополнительного изгиба относительно оси, составляющей угол φ с осью x . В результате разгрузки момент относительно оси x меняется на величину Q_x' и появляется момент Q_y' .

Поскольку разгрузка происходит в упругой области, можно положить

$$Q_x' = -\pi\omega \cos \varphi, \quad Q_y' = -\pi\omega \sin \varphi$$

Соответствующее напряжение

$$\sigma' = -\omega\sigma_s \sin(\alpha - \varphi)$$

Будем рассматривать процесс разгрузки по прямым, проходящим через точку M . Тогда

$$Q_x = q - \pi\omega \cos \varphi, \quad Q_y = -\pi\omega \sin \varphi \quad (5)$$

Напряжения при этом определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s [1 - \omega \sin(\alpha - \varphi)] & (\theta \leq \alpha \leq \pi - \theta) \\ \sigma &= \sigma_s \left[\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} - \omega \sin(\alpha - \varphi) \right] & \left(\begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \theta, \\ \pi - \theta \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Предельный путь разгрузки дается формулами (5) при $\varphi = \theta$; таким образом, кривая, соответствующая на нашей модели последующей поверхности текучести, проходящей через точку M , имеет эту точку угловой. Предельные прямые разгрузки составляют с осью x угол θ .

Сопоставляя результаты, полученные для условий применимости формул простого нагружения и для условий разгрузки, заметим, что качественно они совпадают с выводами теории Батдорфа — Будянского. Согласно этой теории, касательные, проведенные в угловой точке, ограничивают как область применимости деформационной теории, так и область разгрузки, у нас же угол разгрузки оказывается меньше, чем угол простого нагружения.

Выясним теперь границы области разгрузки, обусловленные возможностью вторичных пластических деформаций. Для этого нужно в формулах (6) положить $\sigma = -\sigma_s$. В пластической области получим:

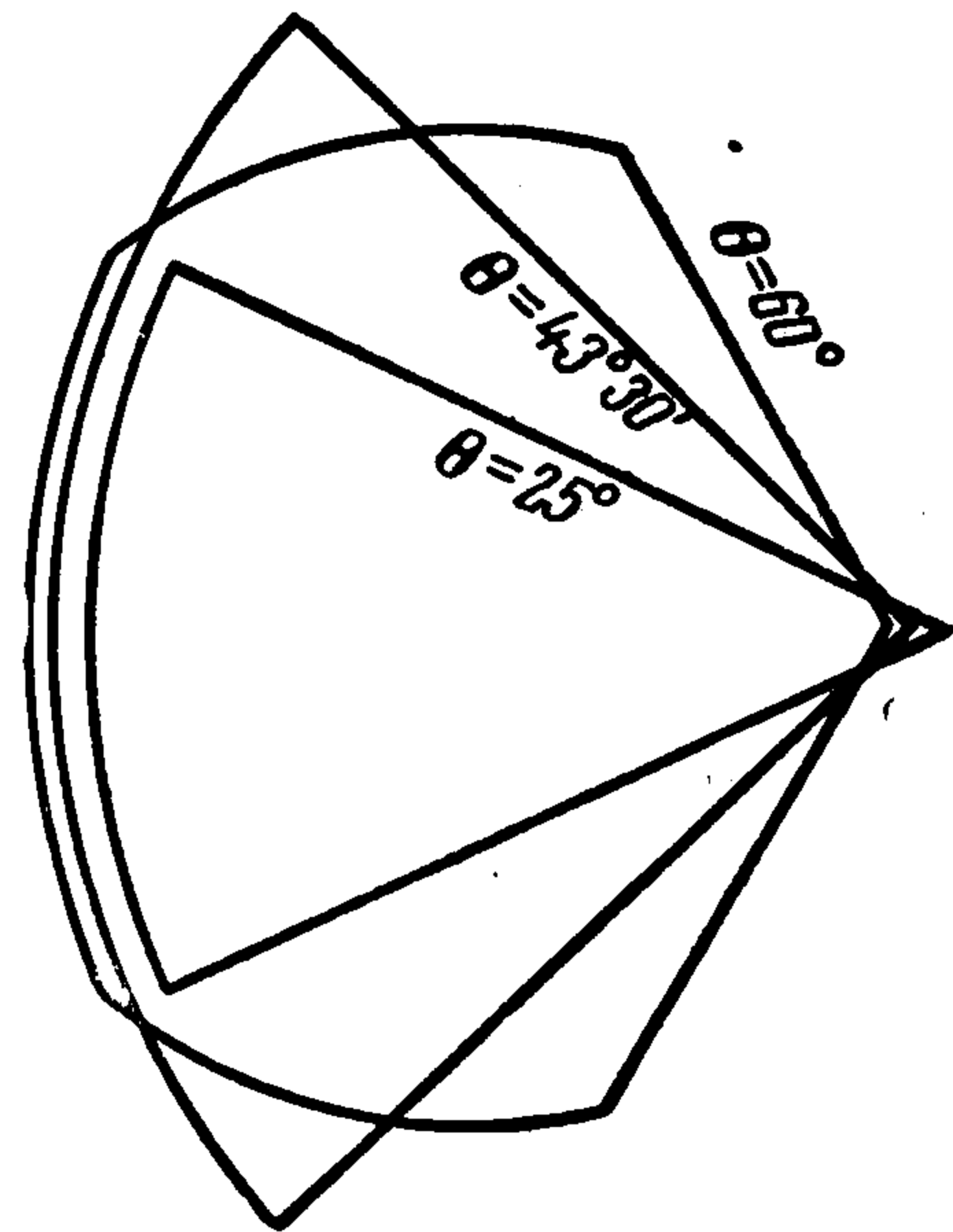
$$1 - \omega \sin(\alpha - \varphi) = -1$$

При $\alpha - \varphi = 1/2 \pi$, получаем $\omega = 2$. Таким образом, границей является окружность радиуса 2π с центром в точке $x = Q$, $y = 0$. Исследование возможности появления вторичных пластических деформаций в первоначально упругой области приводит нас к нахождению другой границы, также окружности, с центром в точке $x = Q - \pi$ и радиусом, равным $\pi/\sin \theta$. На фиг. 4 построены границы области разгрузки (кривые текучести) для некоторых значений θ .

При малых θ упругая область ограничена прямыми и дугой первой окружности, при $\theta > 43^\circ 30'$ — прямыми и дугами двух окружностей.

Для путей нагружения, выходящих из точки M и не заключенных внутри углов простого нагружения и разгрузки, анализ становится более сложным, мы ограничимся рассмотрением малых вариаций напряженного состояния. Предположим, что ось дополнительного поворота составляет с осью x угол $\varphi > \theta$ и пересекает, таким образом, пластическую зону. Дополнительные напряжения $\sigma' = \omega\sigma_s \sin(\alpha - \varphi)$ появляются только в упругой области, т. е. при $-\varphi < \alpha < \varphi$ и $\pi - \varphi < \alpha < \pi + \varphi$. Вычисляя моменты от этих напряжений, представим результаты в виде

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= \Delta q_x \frac{E_t(\varphi) + E_t(\theta)}{2} + \Delta q_y (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta) \\ \Delta Q_y &= \Delta q_x (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta) + \Delta q_y \frac{E_s(\varphi) + E_s(\theta)}{2} \end{aligned} \quad (7)$$



Фиг. 4

Здесь, очевидно, $\operatorname{tg} \varphi = \Delta q_y / \Delta q_x$. При $\varphi = \theta$ мы получаем отсюда соотношения между вариациями напряжений и деформаций, аналогичные тем, которые даются деформационной теорией пластичности

$$\Delta Q_x = E_t \Delta q_x, \quad \Delta Q_y = E_s \Delta q_y$$

При $\varphi = \pi - \theta$ имеет место разгрузка, и из соотношений (7) следует

$$\Delta Q_x = E_0 \Delta q_x, \quad \Delta Q_y = E_0 \Delta q_y$$

Формулы (7) оказываются довольно сложными и проведение аналогии с какой-либо из существующих теорий пластичности здесь затруднительно. Поэтому вряд ли можно ожидать возможности простого описания поведения материала даже при малом отклонении от пропорционального нагружения. Заметим, что, если выделить из формул (7) часть, соответствующую пластической деформации, то окажется, что вектор приращения пластической деформации составляет с осью x угол, не превышающий $\frac{1}{2}\pi - \theta$. Отсюда следует, что для нашей модели выполняется известное требование Друкера

$$(Q_i - Q_i^*) \Delta q_i^p \geq 0$$

Здесь Q_i^* — состояние, изображаемое точкой, лежащей внутри поверхности текучести. Легко проверить также, что соотношения (7) удовлетворяют фундаментальному определению упрочнения Друкера

$$\Delta Q_i \Delta q_i^p > 0$$

Наконец, последний вопрос, который мы здесь рассмотрим, состоит в следующем. В современной теории пластического течения принимается, что функция, выражающая условие пластичности, совпадает с потенциалом течения. Это значит, что при любом изменении напряженного состояния вектор приращения пластической деформации направлен по нормали к поверхности текучести, если она является гладкой. Это непосредственно вытекает из вышеупомянутого требования Друкера. Как мы выяснили, поверхность текучести для нашей модели состоит из двух лучей, проходящих через точку M и дуг одной или двух окружностей. Предположим, что система разгружена. После этого мы выходим любым путем нагружения, лежащим целиком в упругой области, к некоторой точке прямолинейной части кривой текучести, например к точке N (см. фиг. 3). Напряженное состояние, соответствующее точке N , таково, что напряжения всюду меньше предела текучести и достигают предела текучести при $\alpha = \theta$, убывая в ту или другую сторону от точки $\alpha = \theta$, как линейная функция координат. Предположим теперь, что мы сообщили трубе дополнительный изгиб с компонентами деформации Δq_x и Δq_y . Во всем сечении трубы произойдет изменение напряжений, согласно закону Гука, только в точке $\alpha = \theta$, где напряжение равнялось пределу текучести, оно останется неизменным, и около этой точки образуется малая пластическая область $\theta - \varepsilon_1 \leq \alpha \leq \theta + \varepsilon_2$. То же самое, конечно, произойдет в диаметрально противоположной точке.

При вычислении момента мы сначала распространим интегрирование на все сечение трубы, в результате чего получим, очевидно,

$$\Delta Q_x' = E_0 \Delta q_x, \quad \Delta Q_y' = E_0 \Delta q_y$$

а после этого вычтем момент от тех избыточных над пределом текучести напряжений, которые мы как бы добавили на участках $\theta - \varepsilon_1 \leq \alpha \leq \theta + \varepsilon_2$. Обозначая этот момент через Q_0 , заметим, что он имеет составляющие $Q_0 \sin \theta$ и $Q_0 \cos \theta$ по осям координат. Таким образом

$$\Delta Q_x = E_0 \Delta q_x - Q_0 \sin \theta, \quad \Delta Q_y = E_0 \Delta q_y + Q_0 \cos \theta$$

Отсюда

$$\Delta q_x = \frac{1}{E_0} \Delta Q_x + \frac{Q_0}{E_0} \sin \theta, \quad \Delta q_y = \frac{1}{E_0} \Delta Q_y - \frac{Q_0}{E_0} \cos \theta$$

В этих формулах первые члены в правой части представляют собой упругие деформации, вторые — пластические деформации. Как видно, вектор приращения пластической деформации перпендикулярен к поверхности текучести.

Конечно, в этих рассуждениях существенно то, что величины ϵ_1 и ϵ_2 имеют тот же порядок малости, что Δq_x и Δq_y , а для этого надо, чтобы расстояние NM не было мало.

Таким образом, предложенная простая модель воспроизводит ряд свойств пластического тела, обнаруживаемых на опыте или предполагаемых некоторыми теориями пластичности, а именно: ограниченную применимость соотношений деформационного типа, наличие угловой точки на последующих поверхностях текучести при гладкой начальной поверхности текучести, эффект Баушингера, направление вектора приращения пластической деформации по нормали к поверхности течения там, где последняя является гладкой. В то же время на этом примере можно видеть значительную сложность, связанную с описанием процессов непропорционального нагружения.

Поступила 27 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. К л ю ш н и к о в В. Д. О законах пластичности для материала с упрочнением. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.
2. Г е н к и Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. Сборник Теория пластичности. ИЛ, 1948.
3. B a t d o r f J. V., B u d i a n s k z V. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip NASA T. N., N 1871, April 1949.
4. C i c a l a P. Sulle deformazione plastiche Lincei — Rendicolti Sc. fis. e mat., v. V, 6, 1950.

О ДАВЛЕНИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА, ИМЕЮЩЕГО В ПЛАНЕ ФОРМУ КЛИНА

В. Л. Р в а ч е в

(Бердянск)

Решение задачи о давлении на упругое полупространство клинообразного в плане штампа с плоским основанием позволяет установить закон распределения давления в окрестности угловых точек для штампов полигональной (например, прямоугольной) формы. Это решение может быть также использовано при расчете плит на упругом основании.

Л. А. Галиным [1] был предложен метод решения этой задачи для случая, когда на упругое полупространство вне штампа действует некоторая пригрузка.

Оказывается, что, усовершенствовав метод Л. А. Галина, можно получить решение и в случае, когда указанная пригрузка отсутствует. При этом для давления под штампом получаем формулу вида

$$p(r, \theta) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{r^{\gamma-1} f(\theta)}{(1 + \cos \theta) \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta}}$$

где 2α — угол при вершине клина, $f(\theta)$ — некоторая функция, а γ — величина, изменяющаяся в пределах от 0 до 1 в зависимости от величины угла α .

§ 1. Пусть область (S) контакта между штампом и упругим полупространством $z \leq 0$ заключена между двумя лучами, угол между которыми равен 2α , а ось Ox направлена по биссектрисе этого угла.

Как известно, решение задачи сводится к отысканию гармонической во всем пространстве, за исключением точек плоской щели, имеющей форму области контак-