

ОБ ОДНОМ АЛГОРИФМЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
 ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

М. С. Корнишин, Х. М. Муштари

(Казань)

В работе дается описание предложенного Х. М. Муштари алгоритма решения системы нелинейных алгебраических уравнений, к которой приводится решение нелинейной задачи теории пологих оболочек.

Этот алгоритм применяется далее при рассмотрении немалого изгиба прямоугольной в плане пологой цилиндрической панели со свободно опертыми краями под действием равномерной поперечной нагрузки. Задача решается путем применения метода Бубнова — Галеркина к интегрированию уравнения совместности деформаций и уравнения равновесия. Выбранные для функции усилий и функции прогиба выражения в каждой точке контура удовлетворяют всем статическим и геометрическим граничным условиям (§ 1 статьи написан Х. М. Муштари, § 2,3 — М. С. Корнишиным). Числовые расчеты были выполнены на электронной счетной машине «Стрела» вычислительного центра Академии наук СССР по программе, составленной В. В. Скворцовым, за что авторы ему благодарны.

1. Метод приближенного решения задач теории среднего изгиба гибких пологих оболочек. Основные зависимости нелинейной теории очень пологих оболочек, прямоугольных в плане, а также пологих цилиндрических оболочек могут быть приведены к виду

$$D \Delta \Delta w - T_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \right) - 2T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \right) - p = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta \Delta \psi = Et \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \right) - k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \left(D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad (1.2)$$

Здесь t — толщина, E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного сжатия материала оболочки, k_1 и k_2 — главные кривизны срединной поверхности до деформации, w — прогиб, считаемый положительным в сторону внутренней нормали, p — удельное поперечное давление, T_1 , T_{12} и T_2 — мембранные усилия:

$$T_1 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad T_{12} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Для решения этих нелинейных уравнений по методу последовательных приближений принимают за первое приближение решение соответствующей линейной задачи и определяют второе приближение путем решения уравнений, полученных из (1.1) и (1.2) после подстановки в их нелинейные члены выражений w и ψ в первом приближении и т. д. При этом многократно приходится решать систему линейных дифференциальных уравнений при данных граничных условиях, что само по себе представляет большие трудности. Кроме того, остается неясным [вопрос об области сходимости и в особенности вопрос о скорости сходимости этого процесса.

Поэтому нам представляется предпочтительным интегрирование уравнений (1.1) и (1.2) по методу Бубнова — Галеркина, аппроксимируя искомые функции рядами вида

$$w = \sum_{ij} w_{ij} f_{ij}, \quad \psi = \sum_{ij} \psi_{ij} \varphi_{ij} \quad (1.3)$$

где f_{ij} и φ_{ji} — функции от x и y , удовлетворяющие соответствующим граничным условиям.

Умножая (1.1) на f_{ij} , (1.2) на φ_{ij} и интегрируя по площади панели, получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд w_{ij} и ψ_{ij} прогиба и функции условий. Так как ψ_{ij} входят линейно, можно найти их выражения через w_{ij} (что, впрочем, несущественно). Таким образом, получаем систему кубических уравнений относительно w_{ij}

$$\sum_{ij} A_{ij}^m w_{ij} + F^m(w_{ij}) = B_m p \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

где через $F^m(w_{ij})$ обозначены нелинейные части соответствующих уравнений, A_{ij}^m и B_m — известные числа.

В общем случае решение этой системы при сколько-нибудь значительном числе членов рядов (1.3) приводит к весьма громоздким вычислениям, для выполнения которых даже при помощи быстродействующих вычислительных машин необходимо затратить значительное количество машинного времени. Кроме того, крайне утомительно составление уравнений Бубнова — Галеркина и программирование решения для машины. Учитывая это, мы предложили [1] ограничить круг решаемых задач случаем «среднего изгиба», когда прогибы остаются небольшими, не превышая 1,5—2 толщины оболочки. В этом случае, если в решении линейной задачи доминирует лишь небольшое число амплитуд главных гармоник, а влияние остальных гармоник на величины напряжений так незначительно, что хорошо сходятся не только ряды (1.3), но и ряды для $\partial^2 w / \partial x^2, \dots$, то при решении нелинейной задачи можно получить удовлетворительную сходимость этих рядов. В работе [1] доказывалась допустимость линеаризации указанных уравнений относительно неглавных амплитуд и давалась оценка допускаемой погрешности. Здесь, стремясь к расширению области применимости и к уточнению оценки погрешности упрощенного варианта решения, мы отказываемся от линеаризации уравнений (1.4), для решения которых предлагаем следующий приближенный метод.

Для пояснения идеи метода рассмотрим задачу, в решении которой главную роль играет один член ряда для w с амплитудой w_{11} . Пусть нам необходимо составить таблицу значений w_{ij} (а также компонент изгибного и мембранного напряжений) для ряда значений нагрузки p . Вместо этого будем задаваться последовательными значениями $|w_{11}|$, начиная с малых его значений, например начиная с $|w_{11}| = 0.1 t$. При этом значении $|w_{11}|$ величины остальных амплитуд w_{12}, w_{21}, \dots будут мало отличаться от их значений w_{ij}^L , найденных по линейной теории. Поэтому, если в выражениях $F^m(w_{ij})$ вместо $|w_{11}|$ всюду подставить $0.1 t$, а в членах, не линейных относительно остальных амплитуд, заменить w_{ij} через w_{ij}^L , допускаемая погрешность в величине F^m будет весьма мала, а так как этот нелинейный член сам по себе мал по сравнению с линейными членами, из полученной системы линейных уравнений найдем с очень большой точностью соответствующую величину p и остальные $n - 1$ амплитуды (если ограничиться n членами ряда при аппроксимации w).

Подставляя далее в (1.4) $|w_{11}| = 0.2 t$ и заменяя в нелинейных членах остальные w_{ij} через их значения, найденные для $|w_{11}| = 0.1 t$, получаем новую систему линейных уравнений, решая которую, находим соответствующие значения p и w_{ij} . Поступая аналогичным образом и далее, получим искомую таблицу, при помощи которой путем интерполяции можно найти интересующие нас величины для заданных значений нагрузки.

При этом очевидно, что с каждым шагом погрешность в величинах w_{ij} будет увеличиваться. Однако она будет оставаться незначительной до тех пор, пока $w_{ij} \partial^2 f_{ij} / \partial x^2, \dots$ не станут величинами одного порядка с $w_{11} \partial^2 f_{11} / \partial x^2, \dots$, так как при этом главные члены нелинейной части уравнений (1.4) нами определялись точно. Конечно, систему (1.4) можно решать и при помощи обычного метода последовательных приближений: при заданном значении p определять все w_{ij} по линейной теории и подставляя найденные w_{ij}^L в F^m , после чего, решая линеаризованную систему относительно w_{ij} , находить их исправленные значения, повторяя эту процедуру до тех пор, пока получаемые поправки не станут пренебрежимо малыми. Однако не-

обходимые при этом вычисления являются весьма громоздкими, так как их приходится повторять многократно и притом заново для каждого заданного значения p .

Предлагаемый метод обладает преимуществом большой простоты. Для получения оценки допускаемой погрешности и уменьшения погрешности можно комбинировать наш метод с указанным методом последовательных приближений, применяя последний, например, через каждые 10 шагов для уточнения величин w_{ij} . Результаты вычислений последнего шага можно сравнить также с результатами, полученными другим каким-либо способом, позволяющим дать оценку допущенной погрешности. Такая оценка дается в следующем параграфе на примере решения одной задачи поперечного изгиба гибких панелей. Она показывает медленное возрастание допускаемой погрешности с увеличением прогиба даже при шаге 0.25. С уменьшением шага погрешность быстро уменьшается. Метод может быть применен и к решению других нелинейных задач: к исследованию поведения оболочек после потери устойчивости, к исследованию нелинейных колебаний и т. п.

2. Изгиб пологой цилиндрической панели со свободно опертыми краями. Основные уравнения для пологой цилиндрической панели получим из (1.1), (1.2), полагая $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$, где R — радиус цилиндра. Помещая начало координат в центре панели, граничные условия свободного опирания запишем в виде

$$\begin{aligned} \psi_{yy} = \psi_{xy} = 0, \quad w_{xx} = w = 0 \quad \text{при } x = \pm a \\ \psi_{xx} = \psi_{xy} = 0, \quad w_{yy} = w = 0 \quad \text{при } y = \pm b \end{aligned} \quad (2.1)$$

где через $2a$ и $2b$ обозначены соответственно длина и ширина панели. Условия (2.1) удовлетворяются точно, если положить

$$\begin{aligned} \psi = \psi_{11} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) + \psi_{12} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) + \\ + \psi_{21} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w = w_{11} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + w_{12} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos 3 \frac{\pi y}{2b} + w_{21} \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.2), (2.3) в уравнения (1.1), (1.2) и применяя к каждому из них процедуру Бубнова, после некоторых преобразований получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [2\lambda^4 + 2 + (\lambda^2 + 1)^2] f_{11} + 2f_{12} + 2\lambda^4 f_{21} = -0.0625 \lambda^2 (2\zeta_{11}^2 + 9\zeta_{12}^2 + \\ + 9\zeta_{21}^2 + 6\zeta_{11}\zeta_{12} + 6\zeta_{11}\zeta_{21} + 16\zeta_{12}\zeta_{21}) + 0.1643 k\lambda^2 (0.1111 \zeta_{11} + 0.0222 \zeta_{12} + 0.200 \zeta_{21}) \\ 2f_{11} + [32\lambda^4 + 2 + (4\lambda^2 + 1)^2] f_{12} = 0.0625 \lambda^2 (-\zeta_{11}^2 - 9\zeta_{21}^2 - 2\zeta_{11}\zeta_{12} + \\ + 9\zeta_{11}\zeta_{21} + 25\zeta_{12}\zeta_{21}) + 0.6572 k\lambda^2 (0.0222 \zeta_{11} + 0.0044 \zeta_{12} - 0.1429 \zeta_{21}) \\ 2\lambda^4 f_{11} + [2\lambda^4 + 32 + (\lambda^2 + 4)^2] f_{21} = 0.0625 \lambda^2 (-\zeta_{11}^2 - 9\zeta_{12}^2 + 9\zeta_{11}\zeta_{12} - \\ - 2\zeta_{11}\zeta_{21} + 25\zeta_{12}\zeta_{21}) + 0.6572 k\lambda^2 (0.0222 \zeta_{11} - 0.0159 \zeta_{12} + 0.040 \zeta_{21}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} p^* = 5.502 (\lambda^2 + 1)^2 \zeta_{11} + \lambda^2 k (17.543 f_{11} + 14.035 f_{12} + 2.807 f_{21}) - \\ - 240.34 \lambda^2 [f_{11} (\zeta_{11} + 1.5 \zeta_{12} + 1.5 \zeta_{21}) + f_{12} (0.5 \zeta_{11} + 0.5 \zeta_{12} - 2.25 \zeta_{21}) + \\ + f_{21} (0.5 \zeta_{11} + 0.5 \zeta_{21} - 22.5 \zeta_{12})] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 [f_{11} (5.5 \zeta_{11} + 15 \zeta_{12} + 13.5 \zeta_{21}) + f_{12} (0.875 \zeta_{11} + 0.5 \zeta_{12} - 6.937 \zeta_{21}) + \\ + f_{21} (-1.187 \zeta_{11} + 1.125 \zeta_{12} - 4.187 \zeta_{21})] - k\lambda^2 (0.1168 f_{11} + 0.0934 f_{12} + \\ + 0.1368 f_{21}) - 0.0229 (\lambda^2 + 1)^2 \zeta_{11} - 0.0687 (\lambda^2 + 9)^2 \zeta_{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 [f_{11} (5.5 \zeta_{11} + 13.5 \zeta_{12} + 15 \zeta_{21}) + f_{12} (-1.187 \zeta_{11} - 4.187 \zeta_{12} + 1.125 \zeta_{21}) + \\ + f_{21} (0.875 \zeta_{11} - 6.937 \zeta_{12} + 0.50 \zeta_{21})] - k\lambda^2 (0.4672 f_{11} - 1.0679 f_{12} + \\ + 0.3271 f_{21}) - 0.0229 (\lambda^2 + 1)^2 \zeta_{11} - 0.0687 (9\lambda^2 + 1)^2 \zeta_{21} = 0 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$f_{ik} = \frac{\psi_{ik}}{Et^3}, \quad \zeta_{ik} = \frac{w_{ik}}{t}, \quad k = \frac{4b^2}{Rt}, \quad p^* = \frac{16Fb^4}{Et^4}, \quad \lambda = \frac{b}{a}$$

k — параметр кривизны, q^* — параметр нагрузки.

Исходя из соотношений (2.4) — (2.6) для заданных значений параметров нагрузки p^* , кривизны k и λ , можно определить значения параметров ζ_{ik} , f_{ik} , которые характеризуют собой напряженное и деформированное состояние панели.

Ниже приводятся выражения для величин мембранных напряжений σ_x° , σ_y° , величин изгибающих моментов M_x , M_y и параметра прогиба ζ_0 в центре панели:

$$\sigma_x^\circ = E \frac{t^2}{b^2} \alpha, \quad \sigma_y^\circ = E \frac{t^2}{b^2} \beta \quad (2.7)$$

где

$$(2.8)$$

$$\alpha = -2\pi^2 f_{11} + 8\pi^2 f_{21}, \quad \beta = -2\pi^2 \lambda^2 f_{11} + 8\pi^2 \lambda^2 f_{12}, \quad M_x = -D \frac{t}{b^2} \gamma, \quad M_y = -D \frac{t}{b^2} \delta$$

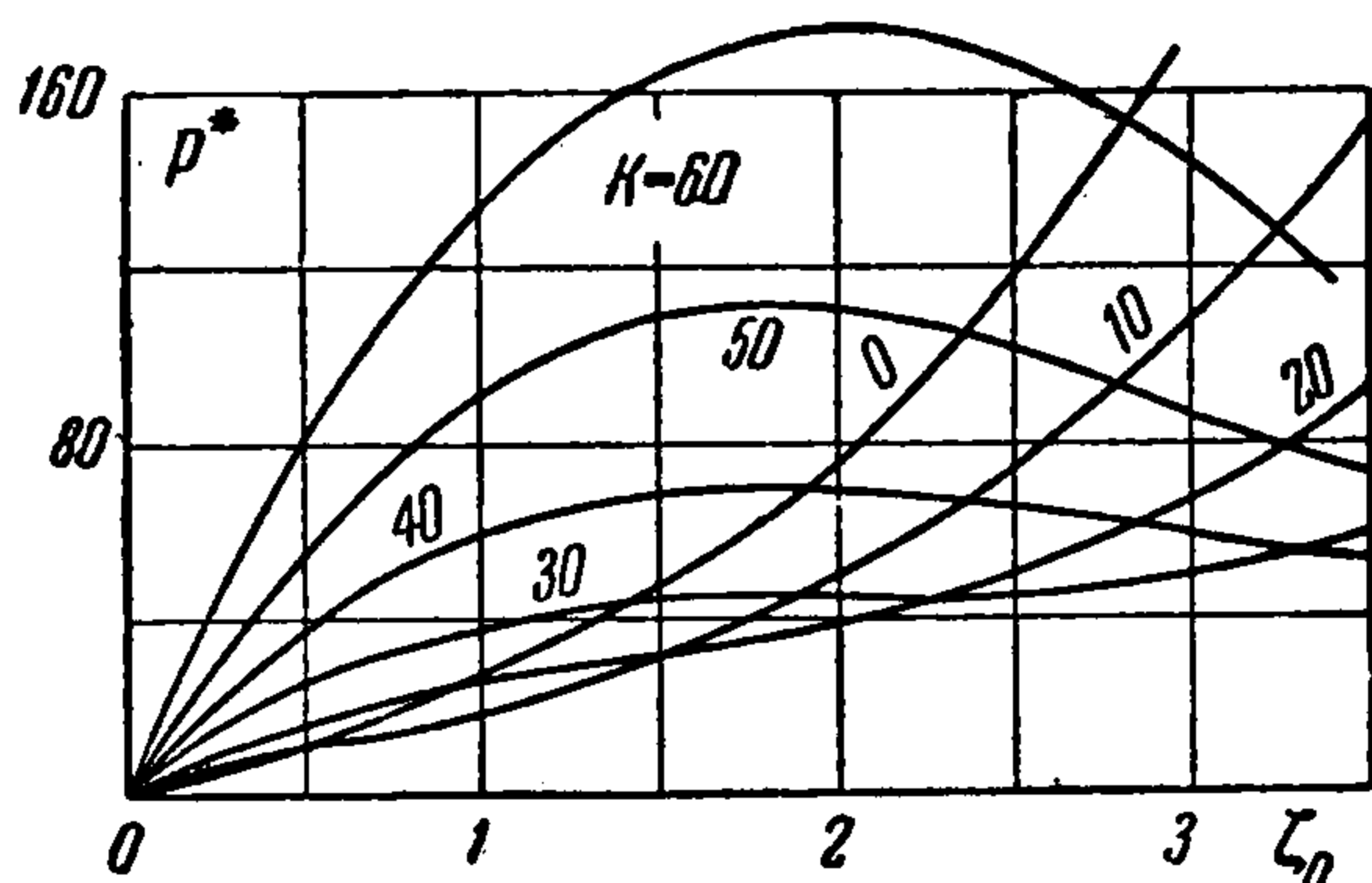
где

$$\gamma = \frac{1}{4} \pi^2 [\zeta_{11} (\lambda^2 + \nu) + \zeta_{12} (\lambda^2 + 9\nu) + \zeta_{21} (9\lambda^2 + \nu)].$$

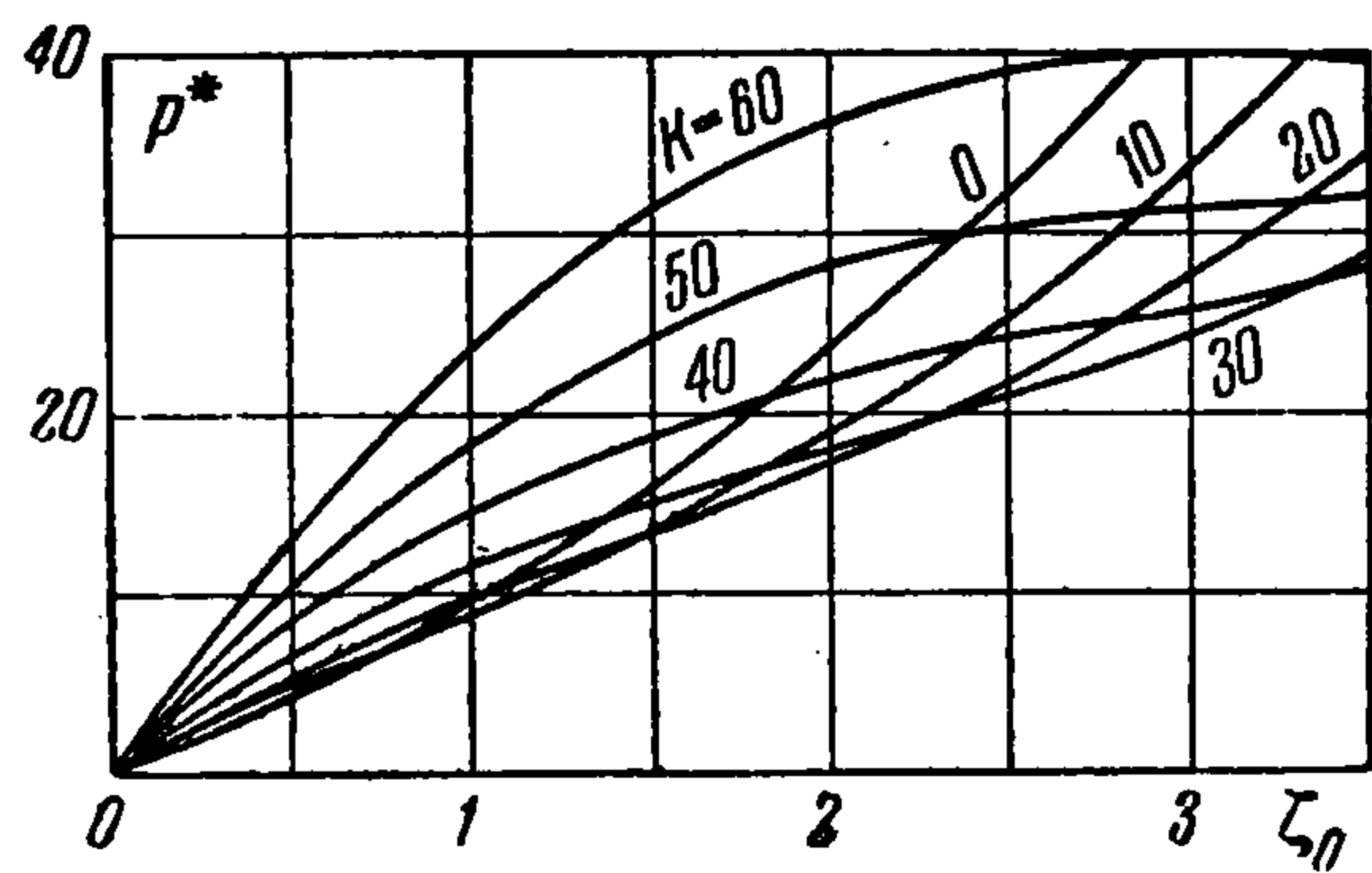
$$\delta = \frac{1}{4} \pi^2 [\zeta_{11} (1 + \nu\lambda^2) + \zeta_{12} (9 + \nu\lambda^2) + \zeta_{21} (1 + 9\nu\lambda^2)]$$

$$\zeta_0 = \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{21} \quad (2.9)$$

3. Результаты вычислений и некоторые выводы. Результаты вычислений представлены графиками (фиг. 1, 2) и табл. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 графически представлены зависимости между параметром нагрузки p^* и параметром прогиба в центре панели ζ_0 для значений $\lambda = 1$ (фиг. 1) и $\lambda = 0.5$ (фиг. 2), а табл. 1 дает значения коэффициентов формул (2.7), (2.8).

Для дальнейшего введем обозначения (имея в виду квадратную пластинку):

p_c^* , α_c , γ_c , ζ_{12}^c — значения величин p^* , α , γ , ζ_{12} , вычисленные для данного ζ_{11} согласно теории среднего изгиба [1].

p_1^* , α_1 , γ_1 , ζ_{12}' — значения, вычисленные для того же ζ_{11} согласно описанному выше алгоритму при $\Delta\zeta_{11} = 0.25$.

p_2^* , α_2 , γ_2 , ζ_{12}'' соответствуют тому же ζ_{11} , причем ζ_{12}'' получено путем уточнения ζ_{12}' методом последовательных приближений. Эти последние можно принять за точные значения, так как ζ_{12}'' определено с точностью до четвертого знака после запятой.

p_0^* , α_0 , γ_0 соответствуют решению нелинейной задачи при сохранении лишь одного первого члена в выражении (2.3) функции прогиба, причем эти величины вычислены для тех же значений прогиба в центре панели, что и p_2^* , ..., γ_2 .

Для сравнения в табл. 2 и 3 приведены значения перечисленных выше величин.

Как видно из табл. 2, даже при довольно крупном шаге ($\Delta\zeta_{11} = 0.25$), принятом для алгоритма в рассматриваемой задаче, даваемые им значения ζ_{12}' близки к точным значениям ζ_{12}'' , в том числе и при достаточно больших ζ_{11} ($\zeta_{11} = 5$). Следовательно, алгоритм решения системы нелинейных алгебраических уравнений, описанный в п. 1, является весьма эффективным. Далее из рассмотрения табл. 2 и 3 видно, что если при определении прогибов порядка 2—2,5 толщины уже решение с сохранением одного

$\lambda = 1$

Таблица 1

k	ζ_0	p^*	α	β	γ	δ
0	0.484	11.43	0.055	0.055	1.349	1.349
	0.955	25.21	0.204	0.204	2.482	2.482
	1.404	43.10	0.413	0.413	3.281	3.281
	1.832	66.20	0.650	0.650	3.750	3.750
	2.240	95.33	0.891	0.891	3.861	3.861
5	0.487	10.945	-0.014	-0.010	1.406	1.406
	0.971	22.76	0.081	0.092	2.757	2.727
	1.448	36.80	0.257	0.285	3.857	3.773
	1.883	55.52	0.475	0.534	4.624	4.462
	2.307	79.60	0.707	0.812	5.058	4.803
10	0.487	11.47	-0.085	-0.075	1.385	1.411
	0.981	21.52	-0.052	-0.039	2.904	2.900
	1.465	32.79	0.085	0.113	4.304	4.214
	1.930	47.39	0.287	0.353	5.417	5.189
	2.373	66.69	0.513	0.647	6.189	5.783
15	0.483	13.00	-0.154	-0.130	1.290	1.364
	0.983	22.54	-0.190	-0.170	2.904	2.981
	1.485	31.31	-0.100	-0.085	4.579	4.573
	1.972	42.06	0.083	0.120	6.055	5.881
	2.436	56.72	0.311	0.409	7.202	6.784
20	0.475	15.52	-0.218	-0.169	1.134	1.269
	0.978	25.63	-0.329	-0.285	2.760	2.956
	1.495	32.67	-0.296	-0.284	4.656	4.814
	2.005	39.87	-0.135	-0.142	6.500	6.500
	2.493	49.95	0.099	0.119	8.052	7.779
25	0.464	18.93	-0.276	-0.188	0.936	1.132
	0.966	30.78	-0.462	-0.370	2.489	2.825
	1.494	37.09	-0.499	-0.465	4.528	4.907
	2.028	41.18	-0.360	-0.410	6.722	7.005
	2.544	46.73	-0.124	-0.202	8.706	8.734

Таблица 2

ζ_{11}	ζ_{12}^c	ζ'_{12}	ζ''_{12}	p_c^*	p_1^*	p_2^*	$\lambda = 1, k = 0$	p_0^*	ζ_0
2	-0.0807	-0.0837	-0.0860	64.87	66.20	66.01			63.20
3	-0.1664	-0.1841	-0.1927	124.12	131.20	129.95	124.79		2.615
5	-0.3621	-0.4660	-0.4991	237.12	356.93	348.03	329.08		4.00

Таблица 3

ζ_{11}	α_c	α_1	α_2	γ_c	γ_1	γ_2	$\lambda = 1, k = 0$	ζ_0	α_0	γ_0
2	0.66	0.65	0.64	3.74	3.73	3.66			1.828	0.87
3	1.23	1.13	1.07	4.30	3.72	3.43	2.615		1.75	8.40

главного члена в выражении для w дает удовлетворительные результаты, то при определении напряжений также решение совершенно не пригодно.

Для прогибов порядка двух толщин представляется наиболее целесообразным применять теорию среднего изгиба [1], так как поправка, даваемая нелинейной теорией без упрощений, мала, а связанные с ней вычислительные трудности очень велики.

Поступила 19 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. М у ш т а р и Х. М., Средний изгиб полой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра. Изв. Казанского Филиала АН СССР, серия физико-матем. и технических наук, вып. 12, 1958.