Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. А. Якубович

(Ленинград)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = [\mathrm{C} + \varepsilon \mathrm{B}(\theta t, \varepsilon)]\, x \tag{0.1}$$

где C — постоянная матрица,

$$\varepsilon \mathrm{B}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \mathrm{B}_1(\tau) + \varepsilon^2 \mathrm{B}_2(\tau) + \ldots$$

$$\mathrm{B}_j(\tau) \in L(0, 2\pi), \qquad \mathrm{B}_j(\tau + 2\pi) = \mathrm{B}_j(\tau)$$

почти всюду,

$$\int_0^{2\pi} \| \mathrm{B}_j(\tau) \| \, d\tau \leqslant \beta_j$$

и ряд $\varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \ldots$ сходится при $|\varepsilon^0| \leqslant \varepsilon_0$.

Системы подобного вида, а также системы с почти периодическими коэффициентами рассматривались в работах Н. Г. Четаева [1], И. З. Штокало [2], Н. П. Еругина [3], И. Г. Малкина [4], С. Н. Шиманова [5], Чезари [6], Хейла [7], Гамбилла [8] и других. Этими авторами получены разнообразные результаты.

В настоящей статье исследуется случай, когда система (0.1) — система канонического вида; этот случай имеет ряд специфических особенностей. При этом нас особо интересует так называемый «резонансный» случай, когда собственные значения матрицы C сравнимы по модулю $i\theta$. Именно к таким системам приводит ряд задач теории динамической устойчивости упругих систем [9].

Как пример рассматривается (§ 4) задача о построении области динамической неустойчивости «комбинационного» резонанса для одного уравнения, встречающегося в приложениях.

Бо́льшая часть изложения справедлива, однако для общих систем (0.1) не обязательно канонического вида; формулы (3.17) приближенного интегрирования системы (0.1), по-видимому, ранее не отмечавшиеся, также справедливы в общем случае.

В случае общих систем при наличии асимптотической устойчивости метод функций Ляпунова позволяет оценивать значение малого параметра, для которого имеет место устойчивость (см., например, [4б], стр. 348 — 355). Для систем канонического вида асимптотическая устойчивость невозможна; метод функций Ляпунова здесь неприменим. Задача об оценке значения малого параметра, для которого имеет место устойчивость (или неустойчивость), для канонических систем представляет задачу, по-видимому, значительно более трудную. Она решалась совсем другими методами в работах [10—14б] (см. также обзор [13а]). Мы здесь этой задачей не занимаемся.

При рассмотрении канонических систем приходится сталкиваться со следующей трудностью. Характеристические показатели системы (0.1) в случае устойчивости могут быть лишь чисто мнимые. Разлагая их в ряд по степеням $\varepsilon^{1/p}$, вычисляем последовательно коэффициенты этих разложений. На конечном этапе вычислений получаем в качестве приближенных значений характеристи еских показателей чисто мнимые значения. Может показаться, что следующие не вычисленные слагаемые могут сдвинуть эти значения как в правую, так и в левую полуплоскость и что поэтому на конечном шаге вычислений нельзя сделать никаких выводов об устойчивости системы (0.1).

Теорема 3.1 указывает случаи, когда эта трудность может быть преодолена.

Получение указанных приближений с общей точки зрения принципиально не представляет трудностей. Однако, как это часто бывает в приложениях, от принципиальной до практической возможности проведения выкладок очень далеко.

Формулы (3.17) дают возможность практически без большого труда «проинтегрировать» (этот термин объяснен ниже) систему (0.1) с точностью до величин порядка ε^2 включительно (см. ниже пример, § 4). Практически этого приближения часто оказывается вполне достаточно.

Мы будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями и терминологией. Форма

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{i}(\mathrm{J}x, y), \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_k \\ -\mathrm{I}_k & 0 \end{pmatrix}$$

определяет в $n = 2k$-мерном комплексном пространстве невырожденное индефинитное скалярное произведение сигнатуры нуль. (I_k — единичная матрица порядка k).

Пусть W — некоторая, вообще говоря, комплексная матрица. Тогда

$$\langle \mathrm{W}x, y\rangle = \langle x, \mathrm{W}^+ y\rangle, \qquad \text{где } \mathrm{W}^+ = \mathrm{J}^{-1}\mathrm{W}\mathrm{J}$$

Матрица W называется J-эрмитовой, если $\mathrm{W}^+ = \mathrm{W}$, J-антиэрмитовой, если $\mathrm{W}^+ = -\mathrm{W}$, и J-унитарной, если $\mathrm{W}^+\mathrm{W} = \mathrm{I}_n$.

Всякая J-эрмитова матрица W имеет вид $\mathrm{W} = \mathrm{JH}$, где $\mathrm{H}^* = -\mathrm{H}$; всякая J-антиэрмитрова матрица имеет вид $\mathrm{W} = \mathrm{JH}$, где $\mathrm{H} = \mathrm{H}^*$; условие J-унитарности можно записать в виде $\mathrm{W}^*\mathrm{JW} = \mathrm{J}$; матрицы J-унитарные образуют группу.

Для канонических систем матрица коэффициентов $\mathrm{C} + \varepsilon\mathrm{B}(\theta t, \varepsilon)$ является вещественной J-антиэрмитовой матрицей (параметры ε и θ вещественны). Можно было бы рассматривать и комплексные J-антиэрмитовы матрицы.

Матрица фундаментальной системы решений (матрицант) $\mathrm{X}(t)$, $\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n$ является для канонических систем J-унитарной матрицей [15][1] (параметры θ и ε фиксированы).

По теореме Ляпунова — Пуанкаре характеристическое уравнение

$$\det\left[\mathrm{X}\left(\frac{2\pi}{\theta}\right) - \rho\mathrm{I}\right] = 0 \tag{0.2}$$

системы (0.1) является возвратным. Его корни $\rho_j(\theta, \varepsilon)$ являются функциями θ и ε.

§ 1. Вспомогательные сведения о функциях от матриц. Пусть G—сумма конечного числа связных и односвязных областей на комплексной плоскости, внутри которых задана однозначная аналитическая функция $f(z)$.

Пусть спектр некоторой матрицы А лежит в области G. Матрицу $f(\mathrm{A})$ можно определить формулой

$$f(\mathrm{A}) = \sum_h \int_{\Gamma_h} (\zeta \mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} f(\zeta)\, d\zeta \tag{1.1}$$

где Γ_h — непересекающиеся окружности (или другие замкнутые кривые), целиком лежащие в области G, такие, что каждая точка спектра матрицы А лежит внутри одной и только одной окружности Γ_h.

Из этого определения следует, что $f(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}) = \mathrm{S}^{-1} f(\mathrm{A})\mathrm{S}$ и если матрица А распадается на «ящики» $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \dotplus \mathrm{A}_2$, то $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A}_1) \dotplus f(\mathrm{A}_2)$.

---

[1] Приведем простое доказательство этого. Обозначая $\mathrm{JH}(t)$ матрицу коэффициентов канонической системы, имеем

$$d\mathrm{X}/dt = \mathrm{JH}(t)\mathrm{X}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{X}^*\mathrm{JX}) \equiv 0, \quad (\mathrm{X}^*\mathrm{JX})_t = (\mathrm{X}^*\mathrm{JX})_0 = \mathrm{J}, \qquad \text{или } \mathrm{X}^+\mathrm{X} = \mathrm{I}$$

Поэтому вычисление $f(A)$ сводится к случаю, когда A — жорданов ящик. Для этого случая по формуле (1.1) получается выражение, совпадающее с обычным ([15], стр. 132).

Таким образом, определение $f(A)$ по формуле Коши (1.1) совпадает с другими возможными определениями: В. И. Смирнов ([16], стр. 315—338) и Ф. Р. Гантмахер ([15], стр. 83—94).

Лемма 1.1. Пусть $\varphi(z)$ — однозначная аналитическая функция в области G (вообще говоря, не связной), $\varphi(G) = G_1$, $\psi(w)$ — однозначная аналитическая функция в области G_1. Обозначим $f(z) = \psi[\varphi(z)]$ однозначную аналитическую функцию в области G. Пусть спектр матрицы A лежит в области G (и, следовательно, спектр матрицы $B = \varphi(A)$ лежит в области G_1). Тогда $f(A) = \psi(B)$, т. е. при последовательном вычислении $B = \varphi(A)$, $\psi(B) = \psi[\varphi(A)]$ и непосредственном вычислении $f(A) = \psi[\varphi(A)]$ результаты совпадают.

Доказательство. Как известно [15,16], по матрице A и функции $\varphi(z)$ может быть построен многочлен $\Phi(z) = \Sigma\alpha_m z^m$ такой, что $\varphi(A) \equiv \Sigma\alpha_m A^m$. Для этого достаточно определить многочлен $\Phi(z)$ из условий

$$\Phi(\lambda_j) = \varphi(\lambda_j), \quad \Phi'(\lambda_j) = \varphi'(\lambda_j), \ldots, \quad \Phi^{(n-1)}(\lambda_j) = \varphi^{(n-1)}(\lambda_j)$$

(здесь λ_j — собственные значения и n — порядок матрицы A; было бы достаточно взять вместо n максимальный размер канонического ящика, отвечающего собственному значению λ_j). Построим аналогичным образом многочлен $\Psi(w)$:

$$\Psi(\mu_j) = \psi'(\mu_j), \ldots, \quad \Psi^{(n-1)}(\mu_j) = \psi^{(n-1)}(\mu_j)$$

Здесь $\mu_j = \varphi(\lambda_j)$ — собственные значения матрицы B.

Покажем, что многочлен $F(z) \equiv \Psi[\Phi(z)]$ может служить для вычисления $f(A)$, т. е. $F(A) = f(A)$. Имеем

$$F(\lambda_j) = \Psi[\Phi(\lambda_j)] = \Psi(\mu_j) = \psi(\mu_j) = f(\lambda_j)$$
$$F'(\lambda_j) = \Psi'(\mu_j)\,\Phi'(\lambda_j) = \psi'(\mu_j)\,\varphi'(\lambda_j) = f'(\lambda_j)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n-1)}(\lambda_j) = f^{(n-1)}(\lambda_j)$$

Таким образом, $F(z)$ и $f(z)$ совпадают ([15], стр. 84) на спектре матрицы A, т. е. $F(A) = f(A)$.

Обозначим C_1 результат последовательного и C_2 непосредственного вычисления $\psi[\varphi(A)]$. Имеем

$$B = \varphi(A) = \Phi(A), \qquad C_1 = \psi(B) = \psi(B) = \Psi[\Phi(A)] = F(A)$$

С другой стороны, $C_2 = f(A) = F(A)$, т. е. $C_1 = C_2$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. Предположим, что матрица

$$Y(\varepsilon) = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \ldots$$

является аналитической функцией ε при $\varepsilon = 0$, $Y_0 = \exp A_0$ и матрица A_0 не имеет различных, сравнимых по модулю $2\pi i$ собственных значений:

$$\alpha_j - \alpha_h \neq 2\pi m i \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.2}$$

Тогда в окрестности матрицы Y_0 можно определить функцию $\ln Y$ так, что:

1) $\ln Y(\varepsilon)$ — аналитическая функция ε при $\varepsilon = 0$;

2) $\ln Y(0) = \ln e^{A_0} = A_0$.

Доказательство. Обозначим $\rho_h = e^{\alpha_h}$ собственные значения матрицы Y_0. Определим $\ln Y$ формулой

$$\ln Y = \frac{1}{2\pi i} \sum_h \oint_{\Gamma_h} (\zeta I - Y)^{-1} (\ln \zeta)_{m_h} d\zeta \tag{1.3}$$

Здесь Γ_h — окружности с центрами в точках ρ_h настолько малого радиуса, что соответствующие круги не пересекаются и не содержат точку $\zeta = 0$,

$$(\ln \zeta)_{m_h} = \ln |\zeta| + i (\arg \zeta + 2\pi m_h)$$

однозначная ветвь функции $\ln \zeta$. Числа m_h выбираются из условий

$$(\ln \rho_h)_{m_h} = \alpha_h \tag{1.4}$$

Такой выбор возможен лишь, если одинаковым числам ρ_h отвечают одинаковые α_h. Последнее действительно имеет место в силу соотношений (1.2).

Указанное определение $\ln Y$ совпадает с определением функции от матрицы по формуле (1.1) для функции

$$\psi(w) = (\ln w)_{m_h}, \quad \text{если} \quad w \in (\Gamma_h)$$

где (Γ_h) означает круг с окружностью Γ_h.

В окрестности спектра матрицы A_0 определим функцию $f(z) = \psi(e^z)$.

Из условия (1.4) следует, что $f(z) \equiv z$. По лемме 1.1 при последовательном вычислении матриц $Y_0 = e^{A_0}$, $\ln Y_0 = \psi(Y_0)$ получим тот же результат, что и при непосредственном $\ln Y_0 = \psi(e^{A_0}) = f(A_0) = A_0$.

Аналитическая зависимость $\ln Y(\varepsilon)$ от ε следует непосредственно из формулы (1.3). Лемма доказана.

Может быть небезынтересно следующее замечание. Существуют матрицы A_0 (для которых не выполнено условие (1.2)) такие, что:

1) для любой матрицы Y, достаточно близкой к матрице $Y_0 = e^{A_0}$, существует матрица $A = \ln Y$ такая, что $e^A = Y$,

2) в окрестности матрицы Y_0 нельзя определить функцию $\ln Y$ так, чтобы $\ln Y_0 = \ln e^{A_0} = A_0$ и чтобы функция $\ln Y$ была непрерывной в точке Y_0.

Соответствующие примеры привести очень легко[1]. Пусть, например, $A_0 = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; тогда $Y_0 = e^{A_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

---

[1] Вообще матрицы Y_0 с кратными собственными значениями для многозначных функций $f(z)$ играют роль существенно особых точек: при $Y \to Y_0$ множество предельных значений $f(Y)$ имеет мощность континуума ([16], стр. 332—337). Это множество состоит, вообще говоря, из ряда «поверхностей» и одной изолированной точки. Мы исключим особенности, если при Y, достаточно близких к Y_0, будем брать значение $f(Y)$ из окрестности этой точки. Это значение $f(Y)$ называется регулярным. Приведенные утверждения нуждаются, конечно, в более строгих формулировках ([16], стр. 332—337).

Как известно [15,16], для любой матрицы, достаточно близкой к I_2, можно определить логарифмы. Пусть

$$Q(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \qquad (0 < \mu < 1)$$

Все значения $\ln Q(\mu)$ даются формулой [16]

$$\ln Q(\mu) = \begin{pmatrix} (\ln\mu)_0 + 2p\pi i & 0 \\ 0 & -(\ln\mu)_0 + 2q\pi i \end{pmatrix} \qquad (p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

При μ, достаточно близком к единице, матрица $Q(\mu)$ сколь угодно близка к матрице $Y_0 = I_2$, но матрица $\ln Q(\mu)$ не может быть сколь угодно близкой к матрице $A_0 = \ln Y_0$.

Предположим теперь, что матрица A_0 J-антиэрмитова. Тогда наряду с собственным значением α_h матрица A_0 будет иметь собственное значение $(-\bar{\alpha}_h)$ и наряду с собственным значением $\rho_h = e^{\alpha_h}$ матрица Y_0 будет иметь собственное значение $\bar{\rho}_h^{-1} = e^{-\bar{\alpha}_h}$. При этом по формуле (1.4) собственным значениям ρ_h и $\bar{\rho}_h^{-1}$ будут отвечать одинаковые числа m_h.

Лемма 1.3. Предположим, что Y и Y_0 J-унитарные матрицы и собственным значениям ρ_h и $\bar{\rho}_h^{-1}$ матрицы Y_0 отвечают в формуле (1.3) одинаковые числа m_n. Тогда матрица $\ln Y$, определенная формулой (1.3), будет J-антиэрмитовой, $(\ln Y)^+ = -\ln Y$.

Доказательство. Мы имеем

$$(\ln Y)^+ = -\frac{1}{2\pi i}\sum_h \int_{\bar{\Gamma}_h \circlearrowright} (\bar{\zeta} I - Y^+)^{-1} (\overline{\ln \zeta})_{m_n} \, d\bar{\zeta}$$

Здесь $\bar{\Gamma}_h$ означает контур, комплексно сопряженный к контуру Γ_h (симметричный контуру Γ_h относительно действительной оси). В последнем интеграле делаем преобразование инверсии $\bar{\zeta} = \xi^{-1}$. При этом

$$\arg\xi = \arg\zeta, \qquad (\overline{\ln \zeta})_m = \ln|\zeta| - i(\arg\zeta + 2\pi m) = -(\ln\xi)_m$$

Обозначая Γ'_h окружность, полученную из окружности Γ_h, преобразованием инверсии получим

$$(\ln Y)^+ = -\frac{1}{2\pi i}\sum_h \int_{\Gamma'_h \circlearrowright} (\xi^{-1} I - Y^{-1})^{-1} \frac{(\ln \xi)_{m_h}}{\xi^2} \, d\xi$$

(Когда ζ пробегает контур Γ_h в положительном направлении), ξ пробегает контур Γ'_h в отрицательном направлении). Так как

$$\xi^{-2}(\xi^{-1} I - Y^{-1})^{-1} = \xi^{-1} I + (Y - \xi I)^{-1}, \text{ то}$$

$$(\ln Y)^+ = \frac{1}{2\pi i}\sum_h \int_{\Gamma'_h \circlearrowleft} [\xi^{-1} I + (Y - \xi I)^{-1}] (\ln \xi)_{m_h} \, d\xi$$

Спектр матрицы Y_0 симметричен относительно единичной окружности; поэтому внутри контура Γ_h' лежит одно и только одно (возможно, кратное) собственное значение матрицы Y_0. Кроме того, точка $\zeta = 0$ лежит вне каждой окружности Γ'_h, поэтому

$$\int_{\Gamma'_h \circlearrowleft} \xi^{-1} (\ln \xi)_{m_h} \, d\xi = 0$$

Следовательно,

$$(\ln Y)^{+} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{h}\oint_{\Gamma'_h} (\xi I - Y)^{-1}(\ln \xi)_{m_h}\, d\xi \tag{1.5}$$

Правая часть формулы (1.5) отличается от правой части формулы (1.3) знаком и порядком слагаемых. Действительно, центр окружности Γ'_h есть $\bar{\rho}_h^{-1}$, а собственным значениям ρ_h и $\bar{\rho}_h^{-1}$ отвечают по условию одинаковые числа m_h. Поэтому, обозначая $\rho_{h'}$ симметрично расположенное собственное значение $\rho_{h'} = \bar{\rho}_h^{-1}$, получим, что интегралы по контурам Γ'_h и $\Gamma_{h'}$ равны.

Таким образом, $(\ln Y)^{+} = -\ln Y$, что и требовалось доказать.

§ 2. Сведение резонансного случая к нерезонансному. Полагая в (0.1) $\theta t = \tau$, получим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\theta}[C + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x \tag{2.1}$$

Покажем, что при сделанных предположениях матрицант системы (1.1) имеет вид:

$$X(\tau, \varepsilon) = X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \ldots \tag{2.2}$$

где матрицы $X_j(\tau)$ абсолютно непрерывны и ряд (2.2) сходится при достаточно малых ε равномерно по τ, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. (Здесь θ считается фиксированным.)

Проведем кратко это обычное доказательство. Подставляя формально ряд (2.2) в уравнение (2.1), для определения $X_j(\tau)$ получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\frac{dX_0}{d\tau} = \frac{1}{\theta} CX_0, \qquad \frac{dX_j}{d\tau} = \frac{1}{\theta}[CX_j + (B_1 X_{j-1} + \ldots + B_j X_0)]$$

Отсюда $X_0 = \exp\left(\frac{\tau}{\theta} C\right)$ и, так как $X_j(0) = 0$, $j \geqslant 1$, то

$$X_j = \int_0^{\tau} X_0(\tau - \sigma)\,[B_1 X_{j-1} + \ldots + B_j X_0]_{\sigma}\, d\sigma$$

Следовательно, все $X_j(\tau)$ абсолютно непрерывны. Обозначим

$$\xi_j = \max \| X_j(\tau) \| \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi)$$

$$\beta_j = \frac{1}{|\theta|}\int_0^{2\pi} \| B_j(\tau) \|\, d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots), \qquad \beta_0 = \frac{2\pi}{|\theta|}\| C \|$$

Легко видеть, что $\xi_j \leqslant \eta_j$, где η_j определяются из рекуррентных соотношений

$$\eta_j = e^{\beta_0}(\beta_1 \eta_{j-1} + \ldots + \beta_j \eta_0), \qquad \eta_0 = e^{\beta_0} \tag{2.3}$$

Вводя функции

$$\beta(\varepsilon) = \sum_1^{\infty} \beta_j \varepsilon^j, \qquad \eta(\varepsilon) = \sum_1^{\infty} \eta_j \varepsilon^j$$

получим, что соотношение (2.3) равносильно следующему:

$$\eta(\varepsilon) = \frac{\eta_0 \beta(\varepsilon)}{e^{-\beta_0} - \beta(\varepsilon)}$$

Таким образом, ряд $\eta_1 \varepsilon + \eta_2 \varepsilon^2 + \eta_3 \varepsilon^3 + \ldots$, а следовательно, и ряд (2.2) сходятся при $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ для всех ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\exp\left(-\frac{2\pi}{|\theta|}\|C\|\right)=\beta_1\varepsilon+\beta_2\varepsilon^2+\ldots$$

Так как по общему свойству систем с периодическими коэффициентами ([17], стр. 179—180)

$$X(\tau+2\pi,\varepsilon)\equiv X(\tau,\varepsilon)\,X(2\pi,\varepsilon)$$

то при $|\varepsilon|<\varepsilon_1$ ряд (2.2) сходится равномерно на любом конечном интервале $(0,\tau_0)$. После подстановки ряда (2.2) в уравнение

$$X(\tau,\varepsilon)=I+\frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau[C+\varepsilon B(\sigma,\varepsilon)]\,X(\sigma,\varepsilon)\,d\sigma$$

получается тождество. Следовательно, матрицант системы (2.1) действительно имеет вид (2.2).

Обозначим λ_j собственные значения матрицы C. В задачах динамической устойчивости наиболее интересным является случай, когда выполнено одно из соотношений

$$\lambda_j-\lambda_h=im\theta\qquad(m\text{ — целое число, } m\neq 0)\tag{2.4}$$

Именно в этом случае возможен параметрический резонанс[1]. В этом случае не выполняется условие (1.2) леммы 2.1, которую мы намерены применить. Поэтому рассмотрим сначала, как этот случай свести к случаю, когда соотношения (2.4) не имеют места.

Обозначим $\rho_j^{(0)}=\exp[2\pi\lambda_j/\theta]$ корни уравнения (0.2) при $\varepsilon=0$. Соотношения (2.4) означают, что при $\varepsilon=0$ имеются кратные корни $\rho_j^{(0)}=\rho_h^{(0)}$. Собственные значения λ_j разбиваются на классы сравнимых между собой по модулю $i\theta$ собственных значений. Собственным значениям $\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_p}$ одного класса соответствуют одинаковые корни характеристического уравнения при $\varepsilon=0$:

$$\rho^{(0)}=\exp\left[\frac{2\pi\lambda_{j_1}}{\theta}\right]=\ldots=\exp\left[\frac{2\pi\lambda_{j_p}}{\theta}\right]$$

Пусть $\alpha_0=(\theta/2\pi)\ln\rho^{(0)}$, где значение логарифма произвольно. Иначе говоря, α_0 — любое число, сравнимое с числами заданного класса по модулю $i\theta$. Имеем

$$\lambda_{j_s}=\alpha_0+im_s\theta\qquad(m_s\text{ — целое число})\tag{2.5}$$

На корневом[2] подпространстве L_{j_s}, отвечающем собственному значению λ_{j_s}, определим матрицу C_0 соотношением

$$C_0f=im_sf,\qquad f\in L_{j_s}\tag{2.6}$$

Тогда на каждом из корневых подпространств матрицы C матрица C_0 кратна единичной матрице; поэтому

$$C_0C=CC_0\tag{2.7}$$

---

[1] При этом дополнительно собственные значения λ_j должны быть чисто мнимые, чего мы здесь не предполагаем.

[2] Напомним, что корневым подпространством L, отвечающим собственному значению λ, называется подпространство векторов f, для которых $(C-\lambda I)^m f=0$ для некоторого целого m.

Положим

$$K_0 = \frac{1}{\theta} C - C_0 \tag{2.8}$$

В инвариантном подпространстве L_{j_s} матрица K_0 имеет собственное значение

$$\frac{1}{\theta}\lambda_{j_s} - im_s = \frac{\alpha_0}{\theta}$$

Таким образом, группе собственных значений $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_s}$ матрицы C отвечает одно собственное значение α_0/θ матрицы K_0; кратность этого собственного значения равна сумме кратностей собственных значений $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_s}$. В системе (2.1) проделаем замену

$$x = e^{\tau C_0} y$$

Получим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = [K_0 + \varepsilon D(\tau, \varepsilon)]\, y \qquad \left(D(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\tau C_0} B(\tau, \varepsilon)\, e^{\tau C_0}\right) \tag{2.9}$$

При этом следует использовать соотношение (2.7).

Для системы (2.9) в отличие от системы (2.1) класс собственных значений матрицы K_0, отвечающих одному мультипликатору $\rho^{(0)}$, состоит из совпавших собственных значений.

Из формулы (2.6) следует, что на каждом подпространстве L_{j_s}, а следовательно, во всем пространстве

$$e^{C_0(\tau+2\pi)} = e^{C_0\tau}$$

Поэтому $D(\tau, \varepsilon)$ будет 2π-периодической функцией τ, аналитической по ε при $\varepsilon = 0$ в том же смысле, что и $B(\tau, \varepsilon)$, т. е.

$$\varepsilon D(\tau, \varepsilon) = \varepsilon D_1(\tau) + \varepsilon^2 D_2(\tau) + \ldots,$$

где

$$\int_0^{2\pi} \| D_j(\tau) \| \, d\tau \leqslant \delta_j \tag{2.10}$$

и ряд $\varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \ldots$ сходится при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

Теорема 2.1. При подходящем выборе чисел α_0 в формуле (2.3):

а) если система (2.1) — система канонического вида (вообще говоря, с комплексными коэффициентами)

$$C^+ = -C, \qquad B(\tau, \varepsilon)^+ = -B(\tau, \varepsilon) \tag{2.11}$$

то и система (2.9) будет системой канонического вида:

$$K_0^+ = -K_0, \qquad D(\tau, \varepsilon)^+ = -D(\tau, \varepsilon) \tag{2.12}$$

б) если система (2.1) имеет вещественные коэффициенты и

$$\theta \neq \pm (2/m) \operatorname{Im} \lambda_j \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

то система (2.9) будет также иметь вещественные коэффициенты;

в) если система (2.1) — система канонического вида с вещественными коэффициентами и

$$\theta \neq \pm (2/m) \operatorname{Im} \lambda_j \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots)$$

то система (2.9) будет также системой канонического вида с вещественными коэффициентами.

Доказательство. а) Покажем, что $C_0^+ = -C_0$, если $C^+ = -C$. Для векторов f, g, принадлежащих одному корневому подпространству L_{j_s}, имеем по формуле (2.6)

$$\langle C_0 f,\ g\rangle = im_s\langle f,\ g\rangle = -\langle f,\ C_0 g\rangle \tag{2.13}$$

Рассмотрим два корневых подпространства L_j и L_h с собственными значениями λ_j и $\lambda_h = -\bar{\lambda}_j \neq \lambda_j$. Легко проверить, что эти собственные значения λ_j и λ_h не могут принадлежать одному классу. Если $\lambda_j \equiv \alpha_0 \bmod i\theta$, то $\lambda_h \equiv -\bar{\alpha}_0 \bmod i\theta$. Условимся выбирать в качестве чисел α_0 в формуле (2.5) в классах $\{\lambda_j\}$ и $\{\lambda_h\}$ числа α_0 и $-\bar{\alpha}_0$. Тогда собственным значениям λ_j и $\lambda_h = -\bar{\lambda}_j$ будут по формуле (2.5) отвечать одинаковые числа m_s. Поэтому снова будет справедливо соотношение (2.13).

Предположим теперь, что $\lambda_h \neq -\bar{\lambda}_j$ и $\lambda_h \neq \lambda_j$. Соответствующие корневые подпространства J-ортогональны ([13], гл. X). Поэтому

$$\langle C_0 f,\ g\rangle = 0, \qquad \langle f,\ C_0\, g\rangle = 0 \qquad \text{при } f \in L_h,\ g \in L_j$$

т. е. снова

$$\langle C_0 f,\ g\rangle = -\langle f,\ C_0\, g\rangle \tag{2.14}$$

Таким образом, соотношение (2.14) выполнено для векторов f, g из любых корневых подпространств матрицы C, а следовательно, и вообще для любых векторов. Поэтому $C_0^+ = -C_0$.

Тогда $(e^{C_0 t})^+ = e^{C_0^+ t} = e^{-C_0 t}$, т. е. матрица $e^{C_0 t}$ будет J-унитарной и из формул (2.8), (2.9) следует (2.12).

б) Достаточно доказать, что при подходящем выборе чисел α_0 матрица C_0 будет вещественной.

Отметим вначале, что если для любого вектора f выполняется соотношение

$$\overline{C_0 f} = C_0 \bar{f} \tag{2.15}$$

то матрица C_0 вещественна. (Здесь $\bar{f}$ означает вектор с комплексно сопряженными элементами.) Действительно, возьмем в формуле (2.15) $f = e_j$ — вектор-столбец, все элементы которого, кроме j-го, равны нулю, а элемент с номером j равен единице. Вектор $C_0 e_j$ будет j-м столбцом матрицы C_0. Из формулы (2.15) имеем $\overline{C_0 e_j} = C_0 \bar{e}_j = C_0 e_j$, т.е. этот вектор имеет вещественные элементы. Следовательно, матрица C_0 вещественна.

Так как матрица C вещественна, то корневые подпространства L_λ и $L_{\bar{\lambda}}$ для невещественного собственного значения λ комплексно сопряженны: если $f \in L_\lambda$, то $\bar{f} \in L_{\bar{\lambda}}$ и наоборот. Обозначая $\bar{L}$ подпространство, состоящее из векторов, комплексно сопряженных к векторам L, это можно записать так: $\bar{L}_\lambda = L_{\bar{\lambda}}$.

Предположим вначале, что собственные значения λ_j и $\bar{\lambda}_j$ принадлежат одному классу и $\operatorname{Im}\lambda_j \neq 0$, тогда

$$\lambda_j - \bar{\lambda}_j = mi\theta, \qquad \theta = \frac{2\operatorname{Im}\lambda_j}{m}$$

В силу сделанного предположения число m четно. Так как

$$\lambda_j = \operatorname{Re}\lambda_j + {}^1\!/_2\, im\theta,$$

числа λ_j и $\operatorname{Re}\lambda_j$ сравнимы по модулю $i\theta$. Поэтому в формуле (2.5) можно взять $\alpha_0 = \operatorname{Re}\lambda_j$. Если λ_{j_s} — одно из чисел заданного класса, то по формуле (2.5) имеем $\bar{\lambda}_{j_s} = \alpha_0 - im_s\theta$, т. е. $\bar{\lambda}_{j_s}$ также принадлежит этому классу и соответствующее число $\overline{m_s} = -m_s$.

Пусть $f \in L_{\lambda_{j_s}}$. Тогда $\bar{f} \in L_{\bar{\lambda}_{j_s}}$ и согласно определению (2.6) матрицы C_0 имеем

$$C_0 \bar{f} = i\bar{m}_s \bar{f} = -im_s \bar{f} = \overline{C_0 f} \qquad (2.16)$$

Таким образом, для векторов из указанного типа подпространств соотношение (2.15) выполняется.

Если λ_j — вещественное собственное значение, то полагаем $\alpha_0 = \lambda_j$. Соответствующее корневое подпространство вещественно, $\bar{L}_{\alpha_0} = L_{\alpha_0}$ (т. е. L_{α_0} инвариантно относительно операции комплексного сопряжения). Так как соответствующее число $m_s = 0$, то для векторов $f \in L_{\alpha_0}$, $\bar{f} \in L_{\alpha_0}$ имеем $C_0 f = 0$, $C_0 \bar{f} = 0$, т. е. снова выполнено (2.15).

Осталось рассмотреть случай, когда λ_j и $\bar{\lambda}_j$ принадлежат различным классам. Тогда классы, которым принадлежат λ_j и $\bar{\lambda}_j$, состоят из комплексно сопряженных собственных значений. Выбирая для этих классов в качестве чисел α_0 комплексно сопряженные числа α_0 и $\bar{\alpha}_0$, получим, что собственным значениям λ_{j_s} и $\bar{\lambda}_{j_s}$ отвечают числа m_s и $\bar{m}_s = -m_s$. Поэтому для векторов $f \in L_{\lambda_{j_s}}$ и $\bar{f} \in L_{\bar{\lambda}_{j_s}}$ выполняется соотношение (2.16).

Мы получили, что для векторов f любого корневого подпространства матрицы C выполнено соотношение (2.15). Так как все пространство — прямая сумма корневых подпространств, соотношение (2.15) выполняется для любого вектора, т. е. C_0 — вещественная матрица.

в) Мы должны показать, что можно одновременно осуществить выбор чисел α_0, указанный в пунктах «а» и «б». Для этого нужно:

1) для классов собственных значений $\{\lambda_j\}$ и $\{-\bar{\lambda}_j\} \neq \{\lambda_j\}$ выбирать в качестве чисел α_0 числа α_0 и $-\bar{\alpha}_0$;

2) для классов $\{\lambda_j\}$ и $\{\bar{\lambda}_j\} \neq \{\lambda_j\}$ выбирать комплексно сопряженные числа α_0 и $\bar{\alpha}_0$;

3) если $\{\lambda_j\} = \{\bar{\lambda}\}$, то $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$.

Легко видеть, что при этом совокупность чисел α_0 будет расположена симметрично относительно вещественной и мнимой осей.

Так как $C^+ = -C$ и C — вещественная матрица, то спектр матрицы C расположен симметрично относительно вещественной и мнимой осей. Следовательно, наряду с классом $\{\lambda_j\}$ будут классы $\{\bar{\lambda}_j\}$ и $\{-\bar{\lambda}_j\}$. Перебирая последовательно классы с $\operatorname{Re} \lambda_j \geqslant 0$, будем выбирать в них числа α_0, удовлетворяющие условиям 2 и 3. В классах с $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ выберем числа α_0, симметрично расположенные с числами α_0, $\operatorname{Re} \alpha_0 \geqslant 0$ относительно мнимой оси.

Мы получим тогда, что совокупность чисел α_0 удовлетворяет условиям 1, 2 и 3. Теорема доказана.

Примечание. Из доказательства пункта «б» легко видеть, что при $\theta = m^{-1} \operatorname{Im} \lambda_j$, $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, мы получим вещественную матрицу C_0, а следовательно, и систему (2.9) с вещественными коэффициентами, если в соответствующих классах будем выбирать числа α_0 вещественными, а числа m_s — полуцелыми. При этом, однако, матрица $D(\tau, \varepsilon)$ будет 4π-периодической. После замены $\tau = 2\tau_1$ получим 2π-периодическую систему того же вида.

Следующая теорема уточняет для нашего случая теорему Ляпунова—Флоке о приводимости системы с периодическими коэффициентами.

Теорема 2.2. Предположим, что дана система (2.9), где матрица $D(\tau, \varepsilon)$ — аналитическая функция ε при $\varepsilon = 0$ в указанном выше смысле с 2π-периодическими коэффициентами и матрица K_0 не имеет различных, сравнимых по модулю i собственных значений.

Матрицант $Y(\tau, \varepsilon)$ уравнения (2.9) представим в виде

$$Y(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon)\, e^{K(\varepsilon)\tau} \qquad (2.17)$$

где

$$P(\tau, \varepsilon) = I + \varepsilon P_1(\tau) + \varepsilon^2 P_2(\tau) + \ldots \qquad (2.18)$$

$$K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \ldots \qquad (2.19)$$

аналитические функции ε при $\varepsilon = 0$, $P_j(\tau)$ — 2π-периодические, абсолютно непрерывные матрицы; ряд (2.18) мажорируется рядом с постоянными коэффициентами. Если система (2.9) — канонического вида,

$$K_0^+ = -K_0, \qquad D(\tau, \varepsilon)^+ = -D(\tau, \varepsilon),$$

то

$$P(\tau, \varepsilon)^+ P(\tau, \varepsilon) = I, \qquad K(\varepsilon)^+ = -K(\varepsilon) \qquad (2.20)$$

Доказательство повторяет обычное доказательство теоремы Ляпунова о приводимости [3a,17] со ссылками на леммы § 1. Легко проверить, что для матрицы $Y(\varepsilon) = Y(2\pi, \varepsilon)$ выполнены условия леммы 1.2. При этом $A_0 = 2\pi K_0$. Поэтому можно определить $K(\varepsilon) = (2\pi)^{-1} \ln Y(2\pi, \varepsilon)$ так, что $K(\varepsilon)$ будет аналитической функцией ε при $\varepsilon = 0$ и $K(0) = K_0$. Тогда матрица

$$P(\tau, \varepsilon) = Y(\tau, \varepsilon)\, e^{-K(\varepsilon)\tau} \qquad (2.21)$$

будет аналитической функцией ε при $\varepsilon = 0$ с коэффициентами $P_j(\tau)$, являющимися абсолютно непрерывными функциями τ. Легко проверить, что $P(\tau + 2\pi, \varepsilon) \equiv P(\tau, \varepsilon)$, т. е. $P_j(\tau + 2\pi) = P_j(\tau)$. Так как ряд для $Y(\tau, \varepsilon)$ и ряд для $e^{-K(\varepsilon)\tau}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ мажорируются рядом с постоянными коэффициентами, то это же справедливо для ряда (2.18).

Если система (2.9) канонического вида, то $Y(\tau, \varepsilon)$ будет J-унитарной матрицей. По лемме 1.3, где $Y = Y(2\pi, \varepsilon)$, $Y_0 = Y(2\pi, 0)$, получим, что $K(\varepsilon)^+ = -K(\varepsilon)$. Из (2.21) следует $P(\tau, \varepsilon)^+ P(\tau, \varepsilon) \equiv I$, что и требовалось доказать.

§ 3. Вычисление коэффициентов разложений (2.18) и (2.19). Дифференцируя (2.17) по τ, получим, что $P(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP}{d\tau} = [K_0 + \varepsilon D(\tau, \varepsilon)]\, P - PK_0 \qquad (3.1)$$

Подставляя ряды (2.18), (2.19) и (2.10) в уравнение (3.1), получим

$$\frac{dP_n}{d\tau} = K_0 P_n - P_n K_0 + (D_1 P_{n-1} + \ldots + D_{n-1} P_1) - (P_{n-1} K_1 + \ldots + P_1 K_{n-1}) - K_n \qquad (3.2)$$

Считая матрицы $P_0 = I$, $P_1, \ldots, P_{n-1}$, $K_1, \ldots K_{n-1}$ известными, имеем для определений P_n, K_n уравнение вида

$$\frac{dZ}{d\tau} = K_0 Z - ZK_0 + F(\tau) - L \qquad (3.3)$$

Здесь $Z = P_n$, $L = K_n$ и $F(\tau + 2\pi) = F(\tau)$ почти всюду. Решение $Z(\tau)$ должно быть периодической матрицей, $Z(\tau + 2\pi) = Z(\tau)$. Кроме того $P_n(0) = 0$ при $n \geqslant 1$, поэтому

$$Z(2\pi) = Z(0) = 0 \qquad (3.4)$$

Лемма 3.1. Предположим, что в уравнении (3.3) (где неизвестными являются $Z(\tau)$ и постоянная матрица L) матрица K_0 не имеет различных значений, сравнимых по модулю, т. е.

$$\lambda_j - \lambda_h \neq mi, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{и } F(\tau) \in L(0, 2\pi)$$

Тогда для произвольно заданной матрицы $Z_0 = Z(2\pi) = Z(0)$ решение $\{Z(\tau), L\}$ существует и единственно. При этом

$$\begin{gathered} \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \|Z(\tau)\| \leqslant \gamma_1 \|Z_0\| + \gamma_2 \int_0^{2\pi} \|F(\tau) - L\| d\tau \\ \|L\| \leqslant \gamma_3 \|Z_0\| + \gamma_4 \int_0^{2\pi} \|F(\tau)\| d\tau \end{gathered} \tag{3.5}$$

Постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ определяются только матрицей K_0. Матрицу Z_0 всегда можно выбрать так, что

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) d\tau = F_{\text{ср}}.$$

При этом

$$\max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \|Z(\tau)\| \leqslant \gamma_0 \int_0^{2\pi} \|F(\tau)\| d\tau \tag{3.6}$$

где γ_0 определяется только матрицей K_0.

Доказательство. Рассматривая матрицы как векторы n^2-мерного пространства, запишем уравнение (3.3) в виде

$$\frac{dZ}{d\tau} = \Lambda Z + F(\tau) - L \tag{3.7}$$

где Λ — оператор коммутирования: $\Lambda Z = K_0 Z - Z K_0$.

Как известно [15], n^2 собственных значений оператора Λ суть числа $\lambda_j - \lambda_h$, $j, h = 1, \ldots, n$. По крайней мере n из них для $j = h$ равны нулю. Обозначим Π' корневое подпространство оператора Λ, отвечающее нулевому собственному значению, и Π'' — прямую сумму корневых подпространств, отвечающих ненулевым собственным значениям.

Пусть Λ' и Λ'' — операторы, индуцируемые оператором Λ в инвариантных подпространствах Π' и Π'' соответственно. Любая матрица A представима в виде

$$A = A' + A'', \qquad A' \in \Pi', \qquad A'' \in \Pi''$$

Уравнение (3.7) распадается на два уравнения:

$$\frac{dZ'}{d\tau} = \Lambda' Z' + F(\tau)' - L', \qquad \frac{dZ''}{d\tau} = \Lambda'' Z'' + F(\tau)'' - L'' \tag{3.8}$$

Условие $Z(2\pi) = Z(0)$ равносильно условиям

$$Z'(2\pi) = Z'(0), \qquad Z''(2\pi) = Z''(0) \tag{3.9}$$

Второе уравнение (3.8) имеет решение

$$Z''(\tau) = e^{\Lambda'' \tau} [Z''(0) + \int_0^{\tau} e^{-\Lambda'' \sigma} [F(\sigma)'' - L''] d\sigma] \tag{3.10}$$

Отсюда получим, что второе равенство (3.9) равносильно следующему:

$$(e^{-2\pi\Lambda''} - \mathrm{I})\, Z''(0) = \int_0^{2\pi} e^{-\Lambda''\sigma} F(\sigma)'' d\sigma - (\Lambda'')^{-1} (e^{-\Lambda'' 2\pi} - \mathrm{I})\, L'' \qquad (3.11)$$

Вспоминая определение оператора Λ'', получим, что собственными значениями оператора $e^{-2\pi\Lambda''} - \mathrm{I}$ являются числа $\alpha_{jh} = \exp[-2\pi(\lambda_j - \lambda_h)] - 1$ для тех значений индексов j, h, для которых $\lambda_j - \lambda_h \neq 0$.

Так как по условию $\lambda_j - \lambda_h \neq \pm mi$, $m = 1, 2, \ldots$, то $\alpha_{jh} \neq 0$. Поэтому для любой матрицы $Z''(0)$ может быть определена однозначно матрица L'' и обратно. В частности, в качестве L'' можно взять $L'' = F_{\text{ср}}$. Из уравнений (3.10) и (3.11) вытекают оценки:

$$\begin{gathered}\max_{0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi} \| Z''(\tau) \| \leqslant \gamma_1'' \| Z''(0) \| + \gamma_2'' \int_0^{2\pi} \| F(\sigma)'' - L \| d\sigma \\ \| L'' \| \leqslant \gamma_3'' \| Z''(0) \| + \gamma_4'' \int_0^{2\pi} \| F(\sigma)'' \| d\sigma\end{gathered} \qquad (3.12)$$

где γ_j'' зависят только от матрицы K_0. Если $L'' = F''_{\text{ср}}$, то имеем также

$$\| Z''(0) \| \leqslant \gamma''_s \int_0^{2\pi} \| F(\sigma)'' \| d\sigma$$

Первое уравнение (3.8) распадается на столько уравнений, сколько ящиков имеет жорданова форма матрицы Λ'. Каждое такое уравнение в скалярной записи будет системой вида

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = \varphi_1 - \varkappa_1, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = \zeta_1 + \varphi_2 - \varkappa_2, \ldots, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = \zeta_{l-1} + \varphi_l - \varkappa_l \qquad (3.13)$$

Задавая произвольно $\zeta(0), \ldots, \zeta_l(0)$, мы можем из этих уравнений найти последовательно $\zeta_1(\tau), \ldots, \zeta_l(\tau)$. Для того чтобы эти функции были 2π-периодическими, нужно, чтобы среднее значение правых частей равнялось нулю. Таким образом, для заданных $\zeta_1(0), \ldots, \zeta_l(0)$ решение $\zeta_1(\tau), \ldots, \zeta_l(\tau)$, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l$ определяется однозначно.

Можно взять $\varkappa_1 = (\varphi_1)_{\text{ср}}, \ldots, \varkappa_l = (\varphi_l)_{\text{ср}}$. При этом $\zeta_1(0)$ выбирается так, чтобы правая часть второго уравнения имела среднее значение, равное нулю. Аналогично определяются $\zeta_2(0), \ldots, \zeta_{l-1}(0)$. Значение $\zeta_l(0)$ остается произвольным. Таким образом, Z_0' можно выбрать так, что $L' = F'_{\text{ср}}$. Предположим, что заданы числа $\zeta_1(0), \ldots, \zeta_l(0)$. Тогда из уравнений (3.13) легко получить, что числа $\varkappa_j$ оцениваются линейной формой с положительными коэффициентами относительно величин

$$|\zeta_1(0)|, \ldots |\zeta_{j-1}(0)|, \quad \int_0^{2\pi} |\varphi_1(\sigma)| d\sigma, \ldots, \int_0^{2\pi} |\varphi_l(\sigma)| d\sigma$$

т. е. что справедлива оценка

$$\| L' \| \leqslant \gamma_3' \| Z(0)' \| + \gamma_4' \int_0^{2\pi} \| F(\sigma)' \| d\sigma$$

аналогичная второй оценке (3.12). Из первого уравнения (3.8) следуют уравнение и оценка, аналогичные уравнению (3.10) и первой оценке (3.12). Они получаются из них заменой $''$ на $'$.

Объединяя утверждения и оценки, полученные для подпространств Π', Π'', получим все утверждения леммы, кроме оценки (3.6). При $L = F_{\text{ср}}$ из предыдущих рассуждений получим также, что

$$\| Z_0 \| \leqslant \gamma_5 \int_0^\tau \| F(\sigma) \| \, d\sigma$$

Отсюда и из оценки (3.5) следует (3.6) Лемма доказана.

Практически решение $\{Z(\tau), L\}$ удобнее определять так. Пусть

$$F(\tau) \sim \sum_m F^{(m)} e^{im\tau}$$

(Ряд справа, вообще говоря, расходящийся, так как $F(\tau)$ лишь интегрируема по Лебегу.) По доказанному существует абсолютно непрерывная матрица-функция $Z(\tau)$, являющаяся решением уравнения (3.3). Пусть

$$Z(\tau) = \sum_m Z^{(m)} e^{im\tau} \tag{3.14}$$

(Ряд сходится, так как $Z(\tau)$ абсолютно непрерывна.)

Подставляя эти ряды в уравнение (3.3), получим в силу единственности разложения суммируемой функции в ряд Фурье

$$im Z^{(m)} = K_0 Z^{(m)} - Z^{(m)} K_0 + F^{(m)} \quad (m \neq 0), \quad K_0 Z^{(0)} - Z^{(0)} K_0 + F^{(0)} - L = 0 \tag{3.15}$$

Матрицы $Z^{(m)}$, $m \neq 0$ определяются (однозначно) из первого уравнения (3.15). Если задана матрица $Z(0)$, то по ней находим

$$Z^{(0)} = Z(0) - \Sigma'_m \qquad \left(\sum_m = \sum_m{}' Z^{(m)}\right)$$

и затем из второго уравнения (3.15) — матрицу L. Здесь и в дальнейшем штрих у Σ означает, что суммирование ведется по всем $m \neq 0$. Если взять $Z(0) = \Sigma'_m$, то $Z^{(0)} = 0$ и $L = F^{(0)} = F_{\text{ср}}$.

Замечание. Эти рассуждения почти доказывают теорему 3.1. Однако мы использовали здесь существование решения $Z(\tau)$ и сходимость ряда (3.14). По-видимому, можно из формул (3.15) вывести сходимость ряда (3.14) и абсолютную непрерывность $Z(\tau)$ (относительно матриц $F^{(m)}$ известно лишь, что это коэффициенты Фурье суммируемой матрицы-функции). Этот путь, однако, вряд ли короче.

Таким образом, из уравнений (3.2) можно последовательно находить матрицы K_1, $P_1(\tau)$, K_2, $P_2(\tau)$ и т. д.

При этом из условия $P(\tau, \varepsilon) \equiv I$ следует, что $P_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ Поэтому в уравнении (3.3) будем иметь $Z(0) = \Sigma_m = 0$ и, если хотим воспользоваться формулами (3.15), мы должны определить вначале матрицы $Z^{(m)}$, $m \neq 0$, а затем матрицы $Z^{(0)} = -\Sigma'_m$ и L.

Удобнее, однако, поступать иначе. Пусть $U(\tau, \varepsilon)$ — матрица фундаментальной системы решений уравнения (2.9) такая, что

$$U(0, \varepsilon) = V(\varepsilon) = I + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \ldots$$

— аналитическая функция ε при $\varepsilon = 0$.

Тогда $V(\varepsilon)^{-1}$ будет также аналитической в окрестности $\varepsilon = 0$ и

$$U(\tau, \varepsilon) = Y(\tau, \varepsilon) V(\varepsilon) = P^{(1)}(\tau, \varepsilon) \exp [K^{(1)}(\varepsilon) \tau]$$

где

$$P^{(1)}(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon) V(\varepsilon), \qquad K^{(1)}(\varepsilon) = V(\varepsilon)^{-1} K(\varepsilon) V(\varepsilon)$$

Матрицы $P = P^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ и $K = K^{(1)}(\varepsilon)$ удовлетворяют уравнению (3.1). При этом $K^{(1)}(0) = K(0) = K_0$. Полагая

$$K^{(1)}(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \ldots$$

$$P^{(1)}(\tau, \varepsilon) = P_0(\tau) + \varepsilon P_1(\tau) + \varepsilon^2 P_2(\tau) + \ldots$$

получим снова для матриц P_n, K_n уравнение вида (3.2). Теперь, однако, вообще говоря, $P_n(0) \neq 0$. Более того, любое конечное число матриц $P_n(0) = V_n$ можно выбирать произвольным образом; вообще же достаточно обеспечить сходимость ряда

$$P^{(1)}(0, \varepsilon) = V(\varepsilon) = I + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_n + \ldots$$

Удобнее всего выбирать $V_n = P_n(0)$ так, чтобы в уравнении (3.2)

$$K_n = (D_1 P_{n-1} + \ldots + D_{n-1} P_1 - P_{n-1} K_1 - \ldots - P_1 K_{n-1})_{\text{ср}}$$

По лемме 1.3 это всегда можно сделать. Следует, однако, помнить, что при таком выборе матриц K_n получаем не матрицу $K(\varepsilon)$ в формуле (2.17), где $Y(0, \varepsilon) \equiv I$, но подобную ей.

Наконец, чтобы не усложнять изложение, предположим, что в формуле (0.2)

$$B_j(\tau) \in L_2(0, 2\pi)$$

Тогда

$$B_j(\tau),\ D_j(\tau) \in L(0, 2\pi), \qquad D_j(\tau) \in L_2(0, 2\pi)$$

Если две действительные матрицы-функции

$$A(\tau),\ B(\tau) \in L_2(0, 2\pi) \qquad A(\tau) \sim \sum_m A_m e^{im\tau}, \qquad B(\tau) \sim \sum_m B_m e^{im\tau}$$

то

$$[A(\tau) B(\tau)]_{\text{ср}} = \sum_m^{\infty} A_{-m} B_m = 2\operatorname{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m B_m$$

Здесь ряд сходится абсолютно. Используя эту формулу и формулы (3.15), где $Z^{(0)} = Z_{\text{ср}} = 0$, $L = F^{(0)} = F_{\text{ср}}$, легко получить расчетные формулы для вычисления матриц K_1, K_2, K_3, P_1, P_2.

В системе (2.9) матрица $D(\tau, \varepsilon)$ представима рядом (2.10) и

$$D_j(\tau) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_j^{(m)} e^{im\tau}$$

Обозначим через $W = \mathbf{K}_m(G)$ решение уравнения

$$imW = K_0 W - W K_0 + G \tag{3.16}$$

Тогда

$$K_1 = [D_1(\tau)]_{\text{ср}} = D_1^{(0)}, \quad P_1(\tau) = \sum_{m \neq 0} \mathbf{K}_m(D_1^{(m)}) e^{im\tau}, \quad K_2 = \sum_{m \neq 0} D_1^{(-m)} \mathbf{K}_m(D_1^{(m)})$$

$$F^{(m)} = \sum_{k+l=m} [D_1^{(l)} \mathbf{K}_k(D_1^{(k)})] - \mathbf{K}_m(D_1^{(m)}) K_1 + D_2^{(m)}$$

$$P_2(\tau) = \sum_{m \neq 0} \mathbf{K}_m \cdot (F^{(m)}) e^{im\tau}$$

$$K_3 = \sum_{m \neq 0} [D_1^{(-m)} \mathbf{K}_m(F^{(m)}) + D_2^{(-m)} \mathbf{K}_m(D_1^{(m)})] + D_3^{(0)} \tag{3.17}$$

Если $D(\tau, \varepsilon)$ — вещественная матрица-функция, то

$$K_2 = 2\mathrm{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{D}_1^{(m)} \mathbf{K}_m (D_1^{(m)}) + D_2^{(0)}$$

$$K_3 = 2\mathrm{Re} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{D}_1^{(m)} \mathbf{K}_m (F^{(m)}) + \bar{D}_2^{(m)} \mathbf{K}_m (D_1^{(m)})] + D_3^{(0)}$$

Легко было бы выписать формулы для K_n и $P_n(\tau)$; мы это не делаем, так как они очень громоздки. Будем называть приближенным решением n-го порядка уравнения (2.9) выражение

$$Y^{(n)}(\tau, \varepsilon) = (I + \varepsilon P_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^n P_n(\tau)) \exp [(K_0 + \ldots + \varepsilon^n K_n) \tau]$$

Очевидны преимущества этого приближенного решения при изучении поведения матриканта $Y(\tau, \varepsilon)$ при $\tau \to \infty$ по сравнению с приближенным решением в форме

$$Y(\tau, \varepsilon) \approx e^{K_0 \tau} + \varepsilon Y_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^n Y_n(\tau)$$

где правая часть — частная сумма ряда в разложении матриканта $Y(\tau, \varepsilon)$ в ряд по ε.

Рассмотрим более подробно случай канонической системы.

Предположим, что $\lambda_0 = i\omega_0$ — некоторое чисто мнимое и, вообще говоря, m-кратное собственное значение матрицы K_0. Матрица $K(\varepsilon)$ имеет m собственных значений вида

$$\lambda_j(\varepsilon) = i\omega_0 + \alpha_j \varepsilon^{p_j/q_j} + \beta_j \varepsilon^{p_j + 1/q_j} + \ldots \qquad (3.18)$$

Если $\mathrm{Re}\,\alpha_j > 0$, для некоторого j, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\varepsilon) > 0$ и система (0.1) неустойчива для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Если все $\mathrm{Re}\,\alpha_j < 0$ (для $j = 1, \ldots, m$ и для всех собственных значений $i\omega_0$), то все $\mathrm{Re}\,\lambda_j(\varepsilon) < 0$ при $\varepsilon \neq 0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. В этом случае система (0.1) асимптотически устойчива при достаточно малом ε. Этот случай, однако, не может осуществляться для систем канонического вида, так как системы канонического вида не могут быть асимптотически устойчивы.

Если все $\mathrm{Re}\,\alpha_j \leqslant 0$ и имеются α_j, для которых $\mathrm{Re}\,\alpha_j = 0$, то для этих последних значений j следует определять коэффициенты β_j — выводы об устойчивости будут аналогичными — и т. д.

Для систем канонического вида при наличии устойчивости все коэффициенты α_j, β_j и т. д. будут получаться чисто мнимыми.

Теорема 3.1. Предположим, что система (0.1) является системой канонического вида и при последовательном вычислении коэффициентов α_j, β_j, ... разложения (3.18) все они получаются чисто мнимыми и на некотором этапе различными, так что, обозначая $\lambda_j'(\varepsilon)$ частную сумму ряда (3.18), имеем при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j'(\varepsilon) = 0, \qquad \lambda_j'(\varepsilon) \neq \lambda_h'(\varepsilon) \qquad (j, h = 1, \ldots, m;\ j \neq h)$$

Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(\varepsilon) = 0, \qquad \lambda_j(\varepsilon) \neq \lambda_h(\varepsilon), \qquad (j, h = 1, \ldots, m;\ j \neq h)$$

Доказательство. Обозначим $\lambda_j''(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon) - \lambda_j'(\varepsilon)$. Имеем при $\varepsilon \to 0$

$$|\lambda_j''(\varepsilon)| = o(|\lambda_j'(\varepsilon) - \lambda_h'(\varepsilon)|) \qquad (j \neq h) \tag{3.19}$$

Окружим точку $i\omega_0$ кругом, внутри которого нет других собственных значений матрицы K_0. При достаточно малом ε в этом круге будут лежать только m собственных значений (3.18). Матрица $K(\varepsilon)$ будет J-антиэрмитова (теорема 2.2), ее спектр симметричен относительно мнимой оси. Поэтому, если не выполнено заключение теоремы, найдутся по крайней мере два собственных значения, для которых при всех достаточно малых ε будет

$$\operatorname{Im}\lambda_j(\varepsilon) = \operatorname{Im}\lambda_h(\varepsilon) \qquad (j \neq h)$$

Откуда следует

$$\operatorname{Im}[\lambda_j'(\varepsilon) - \lambda_h'(\varepsilon)] = -\operatorname{Im}[\lambda_j''(\varepsilon) - \lambda_h''(\varepsilon)]$$

и так как по условию $\operatorname{Re}\lambda_j'(\varepsilon) = \operatorname{Re}\lambda_h'(\varepsilon) = 0$, то

$$|\lambda_j'(\varepsilon) - \lambda_h'(\varepsilon)| = |\operatorname{Im}[\lambda_j'(\varepsilon) - \lambda_h'(\varepsilon)] \leqslant |\lambda_j''(\varepsilon)| + |\lambda_h''(\varepsilon)|$$

что противоречит соотношениям (3.19). Теорема доказана.

Будем называть особым случаем случай, когда матрица $K(\varepsilon)$ имеет для всех достаточно малых ε чисто мнимые собственные значения, часть из которых кратные. Для вычисления конечного числа коэффициентов α_j, β_j разложений (3.18) требуется знание лишь конечного числа матриц K_0, K_1, $K_2, \ldots$ Поэтому, если не имеет места особый случай, то, для того чтобы выяснить, устойчива или неустойчива каноническая система (0.1) при всех достаточно малых ε, требуется определить лишь конечное число матриц K_0, K_1, $K_2, \ldots$

Практически нет нужды определять коэффициенты разложения (3.18), удобнее поступать следующим образом.

Как мы видели, для канонических систем с вещественными коэффициентами можно считать матрицу $K(\varepsilon)$ вещественной и J-антиэрмитовой. Характеристическое уравнение

$$\det[K(\varepsilon) - \lambda I] = 0 \tag{3.20}$$

будет поэтому иметь вещественные коэффициенты и содержать лишь четные степени λ, т. е. иметь вид [1]:

$$\mu^k + \chi_1\mu^{k-1} + \ldots + \chi_k = 0 \tag{3.21}$$

где $\mu = \lambda^2$, $2k = n$. Коэффициенты χ_j зависят от параметров системы, в частности от ε и θ. При этом χ_j являются аналитическими функциями ε и $1/\theta$. Все решения уравнения (0.1) будут ограничены при $t \to \infty$ (устойчивость), если уравнение (3.2) имеет вещественные отрицательные корни μ_j. Если среди корней μ_j имеются комплексные или вещественные положительные, то уравнение (0.1) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения (неустойчивость).

[1] Спектр вещественной J-атиэрмитовой матрицы симметричен относительно вещественной оси, мнимой оси и, следовательно, относительно начала координат. Поэтому характеристическое уравнение не меняется при замене λ на $-\lambda$ и, таким образом, содержит лишь четные степени λ.

Таким образом, получение условий устойчивости (неустойчивости) канонической системы (0.1) сводится: 1) к вычислению с заданной точностью матрицы $K(\varepsilon)$; 2) к построению областей апериодической устойчивости для уравнения (3.21).

Условия апериодической устойчивости (т. е. условия того, что уравнение (3.2) имеет вещественные отрицательные корни) хорошо известны (см., например, [19], стр. 214—226).

При этом следует дополнительно исследовать множество (обычно это линии) $\delta = 0$, где δ — дискриминант уравнения (3.2). На границах областей динамической неустойчивости $\delta = 0$, однако линии $\delta = 0$ могут лежать и в областях устойчивости; в этом случае устойчивость или неустойчивость определяется тем, имеет ли матрица $K(\varepsilon)$ канонические ящики или нет.

§ 4. **Пример**. Рассмотрим уравнение ([9], стр. 311)[1]

$$C_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + [I - \varphi_0 A] f = 0 \tag{4.1}$$

где

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1/\omega_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \alpha_0 + \beta_0 \cos \theta t$$

α_0, β_0 — малые параметры $0 < \omega_1 < \omega_2$. Умножая на C_2^{-1}, придем к уравнению

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + [P_0^2 - \psi N] f = 0 \tag{4.2}$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \alpha + \beta \cos \theta t$$

$$\alpha = \alpha_0 \delta, \quad \beta = \beta_0 \delta, \quad \delta = \frac{a_{21}}{\omega_2^2} = \frac{a_{12}}{\omega_1^2}$$

Вводя обозначения

$$x_1 = P_0^{1/2} f, \quad x_2 = P_0^{-1/2} \frac{df}{dt}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & P_0 \\ -P_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\theta t) = \tau_1(\theta t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

получим систему

$$\frac{dx}{dt} = [C + B(\theta t)]\, x \tag{4.3}$$

Легко проверить, что матрицы JC и $JB(\theta t)$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, являются симметрическими, т. е. что система (4.3) — каноническая.

Автором показано [14б], что для уравнения (4.2) «широкой» областью динамической неустойчивости (касательные к границам в точке $(0, \theta_0)$ не совпадают) является лишь область, отвечающая «комбинационной» частоте $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$, и все прочие области являются «узкими» (касательные к границам области в точке на оси θ совпадают).

Поэтому мы рассмотрим здесь задачу «интегрирования» уравнения (4.2) для значений θ, близких к $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$, и определим соответствующую область динамической неустойчивости. Полагая

$$\tau = \theta t, \quad \gamma = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 \theta}$$

получим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = \left[\frac{1}{\theta_0} C + \left(\gamma C + \frac{1}{\theta} B(\tau)\right)\right] x \tag{4.4}$$

---

[1] Отметим, ссылаясь на книгу [9], что к этому уравнению приводят многие задачи динамической устойчивости пластинок и плоской формы изгиба.

Матрицу $\gamma C + (1/\theta) B(\tau)$ мы рассматриваем здесь как «возмущение»; перед ней в уравнении (4.4) можно было бы поставить «малый параметр» ε, а затем в окончательных формулах положить $\varepsilon = 1$. Это соответствует тому, что окончательные формулы верны для малых α, β, γ.

Опуская вычисления, приведем окончательный результат [1]:

$$K_0 = \frac{\omega_2}{\theta_0}\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_1 = \gamma C + \frac{\beta}{2\theta\sqrt{\omega_1\omega_2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1(I - M) \\ \nu_2(I + M) - \nu_1(3I + M) & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1 = \frac{1}{4\theta^2\theta_0\omega_2}\left[\frac{\alpha^2}{1 - 2\omega_1/\theta_0} + \frac{\beta^2}{16(1 - \omega_1/\theta_0)}\right]$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\theta^2\omega_1\omega_2}\left[\frac{\alpha^2}{1 - 2\omega_1/\theta_0} + \frac{\beta^2}{8(1 - \omega_1/\theta_0)}\right]$$

Характеристическое уравнение $\mathrm{Det}(K - \lambda I) = 0$ с точностью до величин второго порядка ($K = K_0 + K_1 + K_2$) имеет вид:

$$\mu^2 + \chi_1\mu + \chi_2 = 0, \qquad \text{где} \quad \mu = \lambda^2$$

$$\chi_1 = \left(\frac{\omega_2}{\theta} - 1 + 2\nu_1\right)^2 + \frac{\omega_1}{\theta}\left(\frac{\omega_1}{\theta} - 2\nu_2 + 4\nu_1\right)$$

$$\chi_2 = \frac{\omega_1}{\theta}\left[\left(\frac{\omega_1}{\theta} - 2\nu_2 + 4\nu_1\right)\left(\frac{\omega_2}{\theta} - 1 + 2\nu_1\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\theta^2\omega_1\omega_2}\left(\frac{\omega_2}{\theta} - 1 + 2\nu_1\right)\right]$$

Границы области динамической неустойчивости определяются из уравнения $\delta = {}^1/_4\chi_1^2 - \chi_2 = 0$ и область динамической неустойчивости — неравенством $\delta < 0$. Из уравнения $\delta = 0$ получим для границ области динамической устойчивости «комбинационного» резонанса $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$ формулу

$$\theta_\pm = \theta_0 \pm \frac{\beta}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}} - \frac{1}{16\theta_0\omega_1\omega_2}(8\alpha^2 + \beta^2) + \ldots \tag{4.5}$$

Неустойчивость имеет место при $\theta_- < \theta < \theta_+$.

Поступила 10 VI 1958

---

[1] Наиболее трудоемкими являются вычисления матрицы K_2. Эти вычисления и определение последнего слагаемого в формуле (4.5) провел под руководством автора В. С. Гренков. Автор пользуется случаем, чтобы поблагодарить В. С. Гренкова за проделанную работу. Подробно эти вычисления, а также определение областей динамической неустойчивости для «главного» резонанса $\theta_0 = 2\omega_1/m$, $\theta_0 = 2\omega_2/m$ будут опубликованы в Инженерном сборнике. Отметим, что вычисление главного резонанса много проще, ибо можно воспользоваться тем обстоятельством, что уравнение (4.4) имеет решение $x(\tau)$, удовлетворяющее соотношению $x(\tau + 2\pi) = (-1)^m x(\tau)$. Вдоль границ областей динамической неустойчивости, отвечающих «главному» резонансу, корни характеристического уравнения (0.2) неподвижны; вдоль границ областей динамической неустойчивости, отвечающих комбинационному резонансу

$$\theta_0 = (\omega_j + \omega_h)/m, \qquad \omega_j \neq \omega_h, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

эти корни, будучи кратными, перемещаются (неизвестным образом) по единичной окружности. Это делает задачу определения границ динамической неустойчивости комбинационного резонанса намного более сложной, чем для главного резонанса.

Соотношение $x(\tau + 2\pi) = (-1)^m x(\tau)$ было использовано для построения областей «главного» резонанса по методу гармонического баланса в книге [9], § 57 и далее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ, 1946, стр. 192—196.
2. Штокало И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости. Мат. сборник, т. 3/45, № 2, 1946.
3. Еругин Н. П. а) Приводимые системы. Труды физ.-мат. ин-та им. Н. А. Стеклова, т. XIII, 1946.
   б) Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.
   в) Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд-во Ленингр. университета, 1956.
4. Малкин И. Г. а) О характеристических числах систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
   б) Теория устойчивсти движения. ГИТТЛ, 1952, стр. 348—355.
5. Шиманов С. Н. К теории квазигармонических колебаний. ПММ, т. XVI, вып. 2, стр. 129—146, 1952.
6. Cesari L. Sulla stabilita delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Atti Accad. Italia, Mem, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6), 11, 633—692, 1940.
7. Hale J. K. On boundedness of the solutions of linear differential systems with periodic coefficients. Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 5, No. 1—3, pp. 137—167, 1954.
8. Gambill R. A. a) Stability criteria for linear differential systems with periodic coefficients. Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 5, No. 1—3, pp. 169—181, 1954.
   b) Criteria for parametric instability for linear differential systems with periodic coefficients. Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 6, No. 1—2, pp. 37—43, 1955.
9. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1956.
10. Ляпунов А. М. а) Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Собр. соч., т. II, стр. 332—387. Изд-во АН СССР, 1956.
    б) Об одном ряде, встречающемся в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Собр. соч., т. II, стр. 410—472. Изд-во АН СССР, 1956.
11. Крейн М. Г. а) О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. ПММ, т. XV, вып. 3, стр. 323—348, 1951.
    б) Основные положения λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник памяти А. А. Андронова, стр. 414—498, Изд-во АН СССР, М., 1955.
    в) О признаках устойчивой ограниченности решений периодических ограниченных систем. ПММ, т. XIX, вып. 6, стр. 641—680, 1955.
12. Лидский В. Б. и Нейгауз М. Г. а) Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.
    б) К критериям устойчивости системы дифференциальных уравнений периодическими коэффициентами. ПММ, т. XIX, вып. 5, стр. 625—627, 1955.
13. Старжинский В. М. а) Обзор работ по условиям устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 4, стр. 469—510, 1954.
    б) Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Мат. сборник, т. XVIII, стр. 119—138, 1954.
14. Якубович В. А. а) Оценки характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954.
    б) Распространение метода А. М. Ляпунова определения ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$ на случай знакопеременной функции $p(t)$. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
    в) О динамической устойчивости упругих систем. Д. АН СССР, т. 121, № 4, 1958.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, М., 1954.
16. Смирнов В. И. Курс высшей математики. т. III, Ч. 2. ГИТТЛ, М., 1956.
17. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М.— Л., 1949.
18. Мальцев А. М. Основы линейной алгебры, гл. X, ОГИЗ, 1948.
19. Блох З. Ш. Динамика линейных систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1952.
20. Артемьев Н. А. Метод определения характеристических показателей и приложения его к двум задачам небесной механики. Изв. АН СССР, сер. мат., 1944.