Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

КОНЕЧНЫЕ ПЛОСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Л. А. Толоконников

(Тула)

Рассматривая значительные деформации и неограниченные перемещения, формулируем условия совместности поступательных перемещений и вращений элементов тела при деформировании через инвариантные характеристики деформации. Уравнения равновесия преобразуются так, что оказывается возможным ввести функцию напряжений, через производные которой весьма просто выражаются инвариантные характеристики истинных напряжений. Используя комплексные координаты, можно компактно представить математическую формулировку задачи. Решения конкретных задач можно найти последовательными приближениями, причем каждый этап последовательных приближений сводится к решению классической бигармонической проблемы. В заключение рассматривается пример расчета концентрации напряжений у кругового тоннеля.

§ 1. Геометрия плоской деформации сплошного тела. Рассматриваются два состояния сплошного тела: естественное и деформированное. Положение материальной частицы в естественном состоянии определяется декартовыми координатами x_1, x_2, x_3. Обозначим $\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k$ вектор перемещения частицы при переходе тела из естественного в рассматриваемое деформированное состояние, причем здесь и в дальнейшем наличие повторяющихся индексов означает суммирование по этим индексам от единицы до трех. При плоской деформации отличны от нуля только составляющие перемещений u_1 и u_2, которые считаются функциями лишь двух координат x_1 и x_2.

Линейные составляющие тензора деформаций и составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ вычисляются по формулам [1]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \qquad 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \qquad \omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad 2\omega_3 = u_{2,1} - u_{1,2}\end{gathered} \tag{1.1}$$

Индексами 1 и 2 после запятой обозначаются частные производные по переменным x_1 и x_2, например

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = u_{1,2}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{2,2}$$

Проекции α_{ks} векторов $\mathbf{a}_k$, ортогональных к материальным координатным площадкам в деформированном состоянии, выражаются через производные от перемещений формулами

$$\begin{gathered}\alpha_{11} = 1 + \varepsilon_{22}, \qquad \alpha_{12} = -(\varepsilon_{12} - \omega_3), \qquad \alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0 \\ \alpha_{21} = -(\varepsilon_{12} + \omega_3), \quad \alpha_{22} = 1 + \varepsilon_{11}, \quad \alpha_{33} = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{12}^2 + \omega_3^2\end{gathered} \tag{1.2}$$

Наконец, приведем выражения через производные от перемещений коэффициентов искажения s_k площадей координатных площадок, удлинений λ_{ss} координатных волокон и величины Δ относительного изменения объема:

$$\begin{aligned} &\lambda_{11}^2 = s_2^2 = (1+\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{12}+\omega_3)^2 \\ &\lambda_{22}^2 = s_1^2 = (1+\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{12}-\omega_3)^2 \qquad s_3^2 = \alpha_{33}^2 = (1+\Delta)^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Приведенные соотношения показывают, что геометрия деформированного состояния окрестности произвольной точки тела и ориентация этой окрестности вполне определяются четырьмя производными $u_{k,s}$. В качестве координат деформированного состояния окрестности точки можно выбрать и другую четверку независимых параметров, среди которых важную роль играют инварианты деформации.

Обозначим через θ угол между первым главным направлением деформации в естественном состоянии и первым координатным направлением. Удлинения главных волокон обозначим λ_s, причем $\lambda_3 = 1$. Предположим, что при деформировании окрестность точки повертывается как твердое тело вокруг $\mathbf{i}_3$ на угол ω.

Опираясь на геометрическое толкование параметров θ, ω, λ_1 и λ_2, можно утверждать, что их достаточно для определения деформированного состояния и ориентации окрестности частицы в деформированном состоянии. В частности, через параметры θ, ω, λ_1 и λ_2 можно выразить ε_{ik} и ω_3. С этой целью рассмотрим единичные векторы $\mathbf{I}_k$, определяющие направления главных волокон в естественном состоянии:

$$\mathbf{I}_1 = \cos\theta\mathbf{i}_1 + \sin\theta\mathbf{i}_2, \qquad \mathbf{I}_2 = -\sin\theta\mathbf{i}_1 + \cos\theta\mathbf{i}_2, \qquad \mathbf{I}_3 = \mathbf{i}_3$$

и единичные векторы $\mathbf{I}_k'$, определяющие направления тех же материальных волокон в деформированном состоянии:

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}_1' = \cos(\theta+\omega)\,\mathbf{i}_1 + \sin(\theta+\omega)\,\mathbf{i}_2 \\ &\mathbf{I}_2' = -\sin(\theta+\omega)\,\mathbf{i}_1 + \cos(\theta+\omega)\,\mathbf{i}_2, \qquad \mathbf{I}_3' = \mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

С другой стороны, векторы (1.4) можно определить и фундаментальным соотношением общей теории деформаций [2]:

$$\mathbf{I}_n' = \frac{1}{\lambda_n}[\mathbf{I}_n + \omega_3\mathbf{i}_3\times\mathbf{I}_n + ((\varepsilon_{ik}))\,\mathbf{I}_n] \qquad (n = 1,\ 2) \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{i}_3\times\mathbf{I}_n$ означает векторное произведение, а символ $((\varepsilon_{ik}))\,\mathbf{I}_n$ представляет результат линейного преобразования вектора $\mathbf{I}_n$ посредством тензора $((\varepsilon_{ik}))$.

Сравнивая различные выражения одних и тех же векторов, нетрудно получить искомые соотношения между вариантными и инвариантными характеристиками деформации. Приведем эти соотношения в наиболее удобной для дальнейшего применения форме, разрешенной относительно производных:

$$\begin{aligned} &2(1+\varepsilon_{11}) = (\lambda_1+\lambda_2)\cos\omega + (\lambda_1-\lambda_2)\cos(2\theta+\omega) = 2(1+u_{1,1}) \\ &2(\varepsilon_{12}-\omega_3) = -(\lambda_1+\lambda_2)\sin\omega + (\lambda_1-\lambda_2)\sin(2\theta+\omega) = 2u_{1,2} \\ &2(1+\varepsilon_{22}) = (\lambda_1+\lambda_2)\cos\omega - (\lambda_1-\lambda_2)\cos(2\theta+\omega) = 2(1+u_{2,2}) \\ &2(\varepsilon_{12}+\omega_3) = (\lambda_1+\lambda_2)\sin\omega + (\lambda_1-\lambda_2)\sin(2\theta+\omega) = 2u_{2,1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Отсюда, между прочим, легко установить геометрическое значение вектора ω при плоской деформации:

$$2\omega_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) \sin \omega$$

Если же осуществить упрощения, присущие построению линейной теории деформаций, то (1.6) сводятся к выражениям составляющих тензора в произвольных осях через главные значения тензора деформаций.

§ 2. Условия совместности поступательных перемещений частиц тела и условия непрерывности малых вращений. Как известно [3], требования непрерывности поступательных перемещений и малых вращений элементов тела приводят в классической теории упругости к условиям совместности деформаций — тождествам Сен-Венана и уравнениям Бельтрами. Тождества Сен-Венана как условия непрерывности перемещений и функций ω_k сохраняют свое значение не только при малых деформациях. Чтобы упростить дальнейшие применения условий совместности плоских деформаций при постановке задач в напряжениях, запишем условия совместности деформаций через инвариантные характеристики деформирования, сохраняющие геометрическое значение при неограниченных деформациях и перемещениях. Будем предполагать при этом, что неизменность объема при деформировании является физическим свойством деформируемого тела:

$$\Delta = 0 \tag{2.1}$$

Логарифмические удлинения формоизменения выражаются через интенсивность $э_i$ и фазу β формоизменения формулами

$$\ln \frac{\lambda_k}{(1+\Delta)^{1/3}} = \sqrt{2}\, э_i \cos \beta_k, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \beta_2 = \beta + \frac{2}{3}\pi, \qquad \beta_3 = \beta - \frac{2}{3}\pi \tag{2.2}$$

Поэтому фаза плоских деформаций несжимаемого материала оказывается заведомо определенной:

$$\beta = \frac{1}{6}\pi \tag{2.3}$$

Таким образом, главные удлинения при плоской деформации несжимаемого материала определяются только одним параметром — интенсивностью формоизменения:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \operatorname{ch} \sqrt{1.5}\, э_i, \qquad \lambda_1 - \lambda_3 = 2 \operatorname{sh} \sqrt{1.5}\, э_i, \qquad \lambda_3 = 1 \tag{2.4}$$

Параметры деформации ε_{ik} и ω_3 в случае плоской деформации несжимаемого материала можно выразить, используя формулы (1.6) и (2.4), через инвариантные характеристики деформирования $э_i$ и ω и вариантную величину θ. Приравнивая смешанные вторые производные от u_1, u_2, вычисленные на основании (1.6), получаем условия непрерывности поступательных перемещений элементов тела:

$$\begin{aligned} 2(\theta + \omega)_{,1} &= 2 \operatorname{ch} э\, \theta_{,1} - (\operatorname{ch} э)_{,2} + (\sin 2\theta \operatorname{sh} э)_{,1} - (\cos 2\theta \operatorname{sh} э)_{,2} \\ 2(\theta + \omega)_{,2} &= 2 \operatorname{ch} э\, \theta_{,2} + (\operatorname{ch} э)_{,1} - (\sin 2\theta \operatorname{sh} э)_{,2} - (\cos 2\theta \operatorname{sh} э)_{,1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем использовано обозначение

$$э = 2\sqrt{1.5}\, э_i = 2 \ln (1 + \eta), \qquad \eta = \lambda_1 - 1 \tag{2.6}$$

Уравнения (2.5) служат определению вращений элементов тела, если считать известными характеристики чистой деформации θ и ϑ_i. Из (2.5) легко найти условие непрерывности этих вращений:

$$\begin{gathered}(\cos 2\theta \operatorname{sh} \vartheta)_{,22} - (\cos 2\theta \operatorname{sh} \vartheta)_{,11} - 2(\sin 2\theta \operatorname{sh} \vartheta)_{,12} + \\ + (\operatorname{ch} \vartheta)_{,11} + (\operatorname{ch} \vartheta)_{,22} + 2\theta_{,2}(\operatorname{ch} \vartheta)_{,1} - 2\theta_{,1}(\operatorname{ch} \vartheta)_{,2} = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

По содержанию соотношение (2.7) не отличается от упомянутого выше тождества Сен-Венана. И если принять систему упрощений, соответствующую построению теории малых деформаций: $\operatorname{sh} \vartheta = \vartheta$, $\operatorname{ch} \vartheta = 1$, то получим уравнение, совпадающее и по форме с уравнением Сен-Венана.

§ 3. Соотношения между напряжениями и деформациями, уравнения равновесия. Дифференциальные уравнения равновесия в переменных Лагранжа [2] содержат в качестве основных искомых функций обобщенные напряжения Σ_{mn}, которые выражаются через коэффициенты искажения координатных площадок s_m и контравариантные составляющие σ_{mn} тензора истинных напряжений, отнесенного к деформированной сетке координатных волокон. Если нормаль к некоторой материальной площадке совпадала до деформации с $\mathbf{i}_n$, то нормаль к той же материальной площадке после деформации будет $\mathbf{b}_n$, причем оказывается

$$s_k \mathbf{b}_k = \alpha_{k2}\mathbf{i}_1 + \alpha_{k2}\mathbf{i}_2 \qquad (k = 1,2) \tag{3.1}$$

Напомним, что σ_{mn} представляет собой ортогональную проекцию вектора напряжения, действующего на площадке с нормалью $\mathbf{b}_m$, на направление $\mathbf{b}_n$. Для дальнейшего полезно заранее вычислить проекции единичных векторов нормалей к координатным площадкам в деформированном состоянии на направления главных волокон в деформированном состоянии. Полагая

$$\mathbf{b}_k = b_{k1}\mathbf{I}_1' + b_{k2}\mathbf{I}_2' \tag{3.2}$$

на основании (3.1) и (1.4) находим

$$\begin{aligned} b_{11}s_1 &= a_{11} = \alpha_{11}\cos(\theta + \omega) + \alpha_{12}\sin(\theta + \omega) \\ b_{12}s_1 &= a_{12} = -\alpha_{11}\sin(\theta + \omega) + \alpha_{12}\cos(\theta + \omega) \\ b_{21}s_2 &= a_{21} = \alpha_{21}\cos(\theta + \omega) + \alpha_{22}\sin(\theta + \omega) \\ b_{22}s_2 &= a_{22} = -\alpha_{21}\sin(\theta + \omega) + \alpha_{22}\cos(\theta + \omega) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Будем считать в дальнейшем, что главные направления напряжений в рассматриваемом состоянии совпадают с направлениями главных волокон в деформированном состоянии. При этом векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}_m$, действующих на площадках с нормалями $\mathbf{b}_m$, легко выразить через главные истинные напряжения σ_1 и σ_2. По определению имеем

$$\sigma_{mn} = \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{b}_n$$

поэтому использование (1.2) приводит к следующим соотношениям:

$$\Sigma_{11} = \sigma_1 a_{11}^2 + \sigma_2 a_{12}^2, \qquad \Sigma_{22} = \sigma_1 a_{21}^2 + \sigma_2 a_{22}^2, \qquad \Sigma_{12} = \sigma_1 a_{11}a_{21} + \sigma_2 a_{12}a_{22} \tag{3.4}$$

Располагая формулами (3.3), можно считать обобщенные напряжения выраженными через главные напряжения и симметричные характеристики деформированого состояния. В свою очередь главные напряжения можно выразить через симметричные инварианты напряжений — гидростатическое напряжение σ, октаэдрическое касательное напряжение τ_i и фазу напряжений φ — посредством формул

$$\sigma_k = \sigma + \sqrt{2}\,\tau_i \cos\varphi_k, \qquad \varphi_1 = \varphi, \qquad \varphi_2 = \varphi + \frac{2}{3}\pi, \qquad \varphi_3 = \varphi - \frac{2}{3}\pi$$

Поскольку третье из главных напряжений — осевое напряжение σ_3 — определяется только значением гидростатического напряжения, фаза истинных напряжений при плоском деформированном состоянии оказывается заведомо определенной: $\varphi = {}^1/_6\,\pi$.

Таким образом, выяснение физических свойств плоско-деформируемого тела сводится к определению экспериментальной зависимости октаэдрического касательного напряжения от интенсивности формоизменения при различных значениях среднего нормального напряжения. Рассматривая ограниченный диапазон изменения гидростатических напряжений, будем считать в дальнейшем известной из опытов зависимость

$$\sigma_i = \tau_i\,(э_i) \tag{3.5}$$

универсальную для рассматриваемого диапазона гидростатических напряжений. В свою очередь интенсивность формоизменения считается зависящей только от октаэдрического касательного напряжения.

Учитывая определенность фазы истинных напряжений, сначала получаем выражения главных истинных напряжений

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{1.5}\,\tau_i, \qquad \sigma_2 = \sigma - \sqrt{1.5}\,\tau_i, \qquad \sigma_3 = \sigma \tag{3.6}$$

а затем и выражения обобщенных напряжений

$$\begin{gathered} \Sigma_{11} + \Sigma_{22} = 2\sigma \operatorname{ch} э - 2\sqrt{1.5}\,\tau_i \operatorname{sh} э \\ \Sigma_{11} - \Sigma_{22} = 2\cos 2\theta\,(-\sigma \operatorname{sh} э + \sqrt{1.5}\,\tau_i \operatorname{ch} э) \\ \Sigma_{12} = \sin 2\theta\,(-\sigma \operatorname{sh} э + \sqrt{1.5}\,\tau_i \operatorname{sh} э) \end{gathered} \tag{3.7}$$

Общие уравнения равновесия в переменных Лагранжа [2] применительно к случаю плоской деформации несжимаемого материала существенно упрощаются и представляются в виде

$$\begin{gathered} \Sigma_{11,1} + \Sigma_{12,2} + \Sigma_{11} f_{11} + \Sigma_{22} f_{12} + \Sigma_{12}(f_{13} + f_{14}) = 0 \\ \Sigma_{12,1} + \Sigma_{22,2} + \Sigma_{11} f_{12} + \Sigma_{22} f_{22} + \Sigma_{12}(f_{23} + f_{24}) = 0 \end{gathered}$$

если считать действительные массовые силы отсутствующими.

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1}{2}\cos 2\theta\, э_{,1} - \operatorname{sh} э \sin 2\theta\,(\theta + \omega)_{,1} \\ f_{12} &= \frac{1}{2}\sin 2\theta\, э_{,2} + \theta_{,2} + (-\operatorname{ch} э + \operatorname{sh} э \cos 2\theta)(\theta + \omega)_{,2} \\ f_{13} &= \frac{1}{2}\sin 2\theta\, э_{,1} + \theta_{,1} + (-\operatorname{ch} э + \operatorname{sh} э \cos 2\theta)(\theta + \omega)_{,1} \\ f_{14} &= \frac{1}{2}\cos 2\theta\, э_{,2} - \operatorname{sh} э \sin 2\theta\,(\theta + \omega)_{,2} \\ f_{21} &= \frac{1}{2}\sin 2\theta\, э_{,1} - \theta_{,1} + (\operatorname{ch} э + \operatorname{sh} э \cos 2\theta)(\theta + \omega)_{,1} \end{aligned}$$

$$f_{22} = -\frac{1}{2}\cos 2\theta\, э_{,2} + \operatorname{sh} э \sin 2\theta\, (\theta + \omega)_{,2}$$
$$f_{23} = \frac{1}{2}\sin 2\theta_{,2}\, э_{,2} - \theta_{,2} + (\operatorname{ch} э + \operatorname{sh} э \cos 2\theta)(\theta + \omega)_{,2}$$
$$f_{24} = -\frac{1}{2}\cos 2\theta\, э_{,1} + \operatorname{sh} э \sin 2\theta\, (\theta + \omega)_{,1}$$

Учитывая наличие условий совместности перемещений (2.5) и выражения обобщенных напряжений (3.7), дифференциальные уравнения равновесия можно представить в виде однородной алгебраической системы относительно двух дифференциальных операторов над инвариантами напряжений с отличным от нуля определителем. Единственно возможное тривиальное решение этой системы представляет собой новую форму уравнений равновесия

$$\begin{gathered}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{1{,}5}} - f + \tau_i \cos 2\theta\right)_{,1} + (\tau_i \sin 2\theta)_{,2} = 0 \\ (\tau_i \sin 2\theta)_{,1} + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} - f - \tau_i \cos 2\theta\right)_{,2} = 0\end{gathered} \tag{3.8}$$

где использовано обозначение

$$f = 2\sqrt{1.5}\int_0^{э_i} \tau_i(э_i)\, dэ_i \tag{3.9}$$

Структура уравнений равновесия (3.8) повторяет соответствующие уравнения классической плоской задачи, поэтому становится очевидной возможность введения функции напряжений U. Удовлетворяя уравнениям равновесия, положим

$$\begin{gathered}\frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} - f + \tau_i \cos 2\theta = pU_{,22} \\ \tau_i \sin 2\theta = -pU_{,12} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} - f - \tau_i \cos 2\theta = pU_{,11}\end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь мы ввели для удобства постоянный множитель p, представляющий собой характерное для каждой задачи напряжение. Простые алгебраические операции приводят к несколько иному виду формул (3.10):

$$\begin{gathered}\sin 2\theta = -\frac{p}{\tau_i} U_{,12}, \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2}\frac{p}{\tau_i}(U_{,22} - U_{,11}) \\ \tau_i^2 = p^2\left[(U_{,12})^2 + \frac{1}{4}(U_{,22} - U_{,11})^2\right], \quad \frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} = f + \frac{1}{2}p(U_{,22} + U_{,11})\end{gathered} \tag{3.11}$$

Поскольку интенсивность деформаций считается однозначно определяемой через интенсивность напряжений, можно утверждать, что функцией напряжений определяются не только напряжения но и характеристики деформации θ и $э_i$.

Для непрерывности перемещений и вращений, соответствующих определенной таким образом системе деформаций, выбор функции напряжений необходимо подчинить условию совместности малых поворотов (2.7). Подстановка выражений (3.5) и (3.11) в уравнение совместности (2.7) приводит к разрешающему задачу дифференциальному уравнению относительно функции напряжений. Мы не выписываем явной формы этого уравнения в декартовых координатах, поскольку несколько ниже приводится более компактная формулировка задачи в комплексных координатах.

§ 4. Формулировка граничных условий. Для формулировки геометрических условий на границе тела необходимо располагать физической характеристикой материала (3.5) и выражениями составляющих перемещений через функцию напряжений. Поэтому мы остановимся только на общей формулировке статических граничных условий.

Пусть в каждой точке цилиндрической поверхности тела заданы истинное нормальное напряжение $p\sigma_n$ и истинное касательное напряжение $p\tau_n$. Здесь же отметим, что задание соответствующих условных напряжений $p\lambda_\tau\sigma_n$ и $p\lambda_\tau\tau_n$, где λ_τ — удлинение контурного волокна, не вносит существенных усложнений в решение задач.

Обозначим через α угол между направлением первой из координатных осей и направлением внешней нормали ν к поверхности тела. Направление единичного вектора касательной к контуру тела τ выбирается так, чтобы при положительном обходе вдоль контура тела область, занятая телом, оставалась слева. При этом векторы нормали и касательной определяются формулами

$$\nu = n_1\mathbf{i}_1 + n_2\mathbf{i}_2, \qquad \boldsymbol{\tau} = -n_2\mathbf{i}_1 + n_1\mathbf{i}_2, \qquad n_1 = \cos\alpha, \qquad n_2 = \sin\alpha$$

На основании фундаментального соотношения теории деформаций находим направление касательной к контуру тела в деформированном состоянии:

$$\lambda_\tau\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + \omega_2\mathbf{i}_3 \times \boldsymbol{\tau} + ((\varepsilon_{ik}))\,\boldsymbol{\tau}$$

где

$$\lambda_\tau^2 = \lambda_2^2\cos^2(\alpha-\theta) + \lambda_1^2\sin^2(\alpha-\theta) = \operatorname{ch}\vartheta - \operatorname{sh}\vartheta\,\cos 2(\alpha-\theta) \qquad (4.1)$$

Определив предварительно проекции вектора $\boldsymbol{\tau}'$ на направления главных волокон в деформированном состоянии, легко найти единичный вектор нормали $\boldsymbol{\nu}'$ к контуру тела в деформированном состоянии:

$$\lambda_\tau\boldsymbol{\nu}' = \lambda_2\cos(\alpha-\theta)\,\mathbf{I}_1' + \lambda_1\sin(\alpha-\theta)\,\mathbf{I}_2'$$

Определив ориентацию граничной площадки тела относительно главных направлений напряжений, можно найти выражения нормальных и касательных напряжений на контурной площадке через главные напряжения либо симметричные инварианты напряжений:

$$\begin{aligned} p\lambda_\tau^2\sigma_n &= \lambda_\tau^2\sigma - \sqrt{1.5}\,\tau_i\,[\operatorname{sh}\vartheta - \operatorname{ch}\vartheta\cos 2(\alpha-\theta)] \\ p\lambda_\tau^2\tau_n &= -\sqrt{1.5}\,\tau_i\sin 2(\alpha-\theta) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Если заменить здесь функции θ и ϑ_i их выражениями через функцию напряжений U, то получим формулировку контурных условий для функции напряжений. При решении конкретных задач эти условия рекомендуется группировать так, чтобы накладывать ограничения на производные от функции напряжений по дуге контура тела.

§ 5. Постановка задачи в комплексных координатах. Подобно классическим задачам теории упругости плоского деформированного состояния решение многих вопросов теории конечных деформаций несжимаемого материала удобно проводить в комплексных координатах. Положим

$$z = x_1 + ix_2, \qquad \bar{z} = x_1 + ix_2$$

а индексами z и $\bar{z}$ будем обозначать частные производные от функции по соответствующим координатам. В первую очередь преобразуем к комплексным переменным формулы (3.11) и получим

$$\begin{gathered}\sin 2\theta = -i\frac{p}{\tau_i}(U_{zz} - U_{\bar{z}\bar{z}}), \qquad \cos 2\theta = -\frac{p}{\tau_i}(U_{zz} + U_{\bar{z}\bar{z}}) \\ \tau_i^2 = 4p^2 U_{zz} U_{\bar{z}\bar{z}}, \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} = f + 2pU_{z\bar{z}}, \qquad \operatorname{tg} 2\theta = i\frac{U_{zz} - U_{\bar{z}\bar{z}}}{U_{zz} + U_{\bar{z}\bar{z}}}\end{gathered} \tag{5.1}$$

Используем эти выражения в уравнении совместности перемещений (2.7) и после перехода к комплексным переменным найдем

$$p\left(\frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} U_{\bar{z}\bar{z}}\right)_{zz} + p\left(\frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} U_{zz}\right)_{\bar{z}\bar{z}} + (\operatorname{ch} \vartheta)_{z\bar{z}} + i\,[\theta_z (\operatorname{ch} \vartheta)_{\bar{z}} - \theta_{\bar{z}} (\operatorname{ch} \vartheta)_z] = 0$$

Используя (5.1), легко проверить, что

$$i\theta_z = \frac{p^2}{\tau_i^2}(U_{zz} U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} - U_{\bar{z}\bar{z}} U_{zzz}), \qquad i\theta_{\bar{z}} = \frac{p^2}{\tau_i^2}(U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} U_{zz} - U_{zz\bar{z}} U_{\bar{z}\bar{z}})$$

поэтому разрешающее уравнение представляется в виде

$$\begin{gathered}\left(\frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} U_{\bar{z}\bar{z}}\right)_{zz} + \left(\frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} U_{zz}\right)_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{p}(\operatorname{ch} \vartheta)_{z\bar{z}} + \\ + p\frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i}\frac{d\vartheta}{d\tau_i}(U_{zz\bar{z}} U_{z\bar{z}\bar{z}} - U_{zzz} U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}) = 0\end{gathered} \tag{5.2}$$

Если, в частности, использовать предположения классической теории упругости $\operatorname{sh}\vartheta = \vartheta$, $\operatorname{ch}\vartheta = 1$, $\operatorname{sh}\vartheta : \tau_i = G^{-1}$ и пренебречь в уравнении (5.3) слагаемыми порядка величин деформаций по сравнению с единицей, то уравнение (5.3) легко свести к бигармоническому.

Для представления статических граничных условий в комплексных переменных обратимся к формулам (4.2) и на основании (5.1) представим их в виде:

$$\begin{gathered}p\lambda_\tau^2 \sigma_n = \sigma \operatorname{ch} \vartheta - \sqrt{1.5}\,\tau_i \operatorname{ch} \vartheta + \\ + \frac{p}{\tau_i}(\sigma \operatorname{sh} \vartheta - \sqrt{1.5}\,\tau_i \operatorname{ch} \vartheta)(U_{zz} e^{2i\alpha} + U_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\alpha}) \\ ip\lambda_\tau^2 \tau_n = \sqrt{1.5}\,p\,(U_{zz} e^{2i\alpha} - U_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\alpha})\end{gathered}$$

Отсюда легко найти

$$\begin{gathered}\frac{\lambda_\tau^2 \sigma_n}{\sqrt{1.5}\operatorname{ch} \vartheta} = 2U_{z\bar{z}} - U_{zz} e^{2i\alpha} - U_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\alpha} + \frac{1}{p} f + \\ + p\frac{\operatorname{th} \vartheta}{\tau_i}\left[4U_{zz} U_{\bar{z}\bar{z}} + \left(\frac{1}{p} f + 2U_{z\bar{z}}\right)(U_{zz} e^{2i\alpha} + U_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\alpha})\right] \\ i\frac{\lambda_\tau^2 \tau_n}{\sqrt{1.5}} = U_{zz} e^{2i\alpha} - U_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\alpha}\end{gathered} \tag{5.3}$$

С другой стороны, производная функции напряжений по дуге контура представляется формулой

$$\frac{dU}{dS} = ie^{-i\alpha}(U_z e^{2i\alpha} - U_{\bar{z}})$$

поэтому граничные значения производных от функции напряжений и значения контурных нормальных и касательных напряжений связаны соотношением

$$
\begin{gathered}
2e^{i\alpha}\frac{dU_z}{ds} = -\frac{\lambda_\tau{}^2}{\sqrt{1.5}}\left(\tau_n + i\frac{\sigma_n}{\sqrt{1.5}}\right) + \\
+ ip\left\{\frac{f}{p^2} - \frac{\operatorname{th}\vartheta}{\tau_i}\left[-4U_{zz}U_{\bar z\bar z} + \left(\frac{f}{p} + 2U_{z\bar z}\right)\left(U_{zz}e^{2i\alpha} + U_{\bar z\bar z}e^{-2i\alpha}\right)\right]\right\}
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

представляющим собой формулировку статических граничных условий.

Часто в приложениях оказывается удобным применение изометрических криволинейных координат, которые можно получить в результате конформного преобразования:

$$\zeta = \zeta(z)$$

При этом

$$\frac{\partial}{\partial z} = \zeta'\frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \zeta'\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \zeta'\zeta''\frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial\bar z} = \bar\zeta'\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}$$

и уравнение совместности (5.2) представляется в виде

$$
\begin{gathered}
(\zeta'\bar\zeta')^2\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\zeta\zeta}\right)_{\bar\zeta\bar\zeta} + \left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\bar\zeta\bar\zeta}\right)_{\zeta\zeta}\right] + \bar\zeta'^2\bar\zeta'\zeta''\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\zeta}\right)_{\bar\zeta\bar\zeta} + \right. \\
\left. + \left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\bar\zeta\bar\zeta}\right)_{\zeta}\right] + \zeta'^2\bar\zeta'\bar\zeta''\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\bar\zeta}\right)_{\zeta\zeta} + \left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\zeta\zeta}\right)_{\bar\zeta}\right] + \\
+ \frac{1}{p}\zeta'\bar\zeta'(\operatorname{ch}\vartheta)_{\zeta\bar\zeta} + \zeta'\bar\zeta'\zeta''\bar\zeta''\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\zeta}\right)_{\bar\zeta} + \left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}U_{\bar\zeta}\right)_{\zeta}\right] + \\
+ p\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}\frac{d\vartheta}{d\tau_i}\left\{(\zeta'\zeta')^2(\zeta'U_{\zeta\zeta\bar\zeta} + \zeta''U_{\zeta\bar\zeta})(\bar\zeta'U_{\zeta\bar\zeta\bar\zeta} + \bar\zeta''U_{\zeta\bar\zeta}) - \right. \\
- \bar\zeta'\zeta'\left[\bar\zeta'^2U_{\zeta\zeta\zeta} + 3\zeta'\zeta''U_{\zeta\zeta} + (\zeta''^2 + \zeta'\zeta''')U_{\zeta}\right]\left[\bar\zeta'^2U_{\bar\zeta\bar\zeta\bar\zeta} + \right. \\
\left.\left. + 3\bar\zeta'\bar\zeta''U_{\bar\zeta\bar\zeta} + (\bar\zeta''^2 + \bar\zeta''\bar\zeta''')U_{\bar\zeta}\right]\right\} = 0
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

Здесь интенсивность деформаций считается представленной через интенсивность напряжений и в конечном счете через функцию напряжений, поскольку

$$\tau_i{}^2 = 4p^2(U_\zeta\zeta'' + U_{\zeta\zeta}\zeta'^2)(U_\zeta\bar\zeta'' + U_{\bar\zeta\bar\zeta}\bar\zeta'^2)$$

Аналогичным преобразованиям подвергаются и контурные условия.

Рассмотрим пример интегрирования разрешающего уравнения при произвольном законе формоизменения. Имея в виду осесимметричную деформацию, будем искать функцию напряжений, зависящую только от полярного расстояния точки:

$$U = \Phi(v), \qquad v = z\bar z$$

В рассматриваемом случае

$$\tau_i{}^2 = 4p^2v^2\Phi''^2$$

$$U_{zz\bar z}U_{z\bar z\bar z} - U_{zzz}U_{\bar z\bar z\bar z} = \frac{1}{2p^2}\frac{d\tau_i{}^2}{dv} \tag{5.6}$$

поэтому уравнение совместности представляется в виде

$$p\left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}\Phi''z^2\right)_{zz}+p\left(\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}\Phi''\bar z^2\right)_{\bar z\bar z}+\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left(v^2\frac{d\operatorname{ch}\vartheta}{dv}\right)=0$$

После перехода к переменной v и двух последовательных интегрирований получаем

$$2p\frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}\Phi''v^2+v\operatorname{ch}\vartheta=C_1v+C_2$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Используя (5.6), находим

$$\operatorname{sh}^2\vartheta=\left(\operatorname{ch}\vartheta-\frac{C_2}{v}-C_1\right)^2$$

и после простых преобразований получается закон изменения интенсивности деформаций:

$$\operatorname{ch}\vartheta=\frac{1}{2}\left[\frac{C_2}{v}+C_1+\left(\frac{C_2}{v}+C_1\right)^{-1}\right]$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются контурными условиями.

§ 6. Частные формы разрешающего уравнения, соответствующие различным физическим законам формоизменения. Остановимся на двух частных представлениях физических законов деформирования, когда физические свойства характеризуются только одной константой. Если физическая нелинейность представляется функцией

$$\tau_i=G\operatorname{sh}\vartheta,\qquad G=\mathrm{const}\tag{6.1}$$

то легко найти

$$\frac{d\vartheta}{d\tau_i}=\frac{1}{G\operatorname{ch}\vartheta},\quad \operatorname{ch}^2\vartheta=1+4\nu^2U_{zz}U_{\bar z\bar z},\quad \nu=\frac{p}{G}$$

и разрешающее уравнение представляется в форме

$$2\nu U_{zz\bar z\bar z}+(\operatorname{ch}\vartheta)_{z\bar z}+\frac{\nu^2}{\operatorname{ch}\vartheta}(U_{zz\bar z}U_{z\bar z\bar z}-U_{zzz}U_{\bar z\bar z\bar z})=0$$

Используя выражение интенсивности деформаций через производные от функции напряжений, находим

$$\begin{gathered}(1+4\nu^2U_{zz}U_{\bar z\bar z})^{3/2}U_{zz\bar z\bar z}-2\nu^3(U_{zz}U_{\bar z\bar z})_z(U_{zz}U_{\bar z\bar z})_{\bar z}+\\+\nu(1+4\nu^2U_{zz}U_{\bar z\bar z})\ (U_{zz}U_{\bar z\bar z})_{z\bar z}+\frac{1}{2}U_{zz\bar z}U_{z\bar z\bar z}-\frac{1}{2}U_{zzz}U_{\bar z\bar z\bar z}]=0\end{gathered}\tag{6.2}$$

Более широкое распространение имеет физическая нелинейность типа

$$\tau_i=G\operatorname{tg}\vartheta,\qquad G=\mathrm{const}\tag{6.3}$$

В этом случае находим

$$\begin{gathered}\frac{d\vartheta}{d\tau_i}=\frac{\operatorname{ch}^2\vartheta}{G},\qquad \frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\tau_i}=\frac{\operatorname{ch}\vartheta}{G},\qquad \mu=\frac{p}{G}\\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2\vartheta}=1-4\mu^2U_{zz}U_{\bar z\bar z},\qquad f=\frac{1}{2}G\ln\left(1-\frac{\tau_i^2}{G^2}\right)\end{gathered}\tag{6.4}$$

и уравнение совместности

$$\mu[(\operatorname{ch}\vartheta U_{zz})_{\bar z\bar z}+(\operatorname{ch}\vartheta U_{\bar z\bar z})_{zz}]+(\operatorname{ch}\vartheta)_{z\bar z}+\mu^2\operatorname{ch}^3\vartheta(U_{zz\bar z}U_{z\bar z\bar z}-U_{zzz}U_{\bar z\bar z\bar z})=0\tag{6.5}$$

представляется в форме

$$U_{zz\bar{z}\bar{z}} + \sum_{k=1}^{4} \mu^k L_{k+1}(U) = 0 \tag{6.6}$$

Здесь приняты специальные обозначения для нелинейных дифференциальных операторов над функцией напряжений:

$$\begin{aligned}
&L_2(U) = t_{z\bar{z}} + \tfrac{1}{2} U_{zz\bar{z}} U_{z\bar{z}\bar{z}} - \tfrac{1}{2} U_{zzz} U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \qquad t = U_{zz} U_{\bar{z}\bar{z}} \\
&L_3(U) = -8tU_{zz\bar{z}\bar{z}} + 2t_z U_{z\bar{z}\bar{z}} + 2t_{\bar{z}} U_{zz\bar{z}} + t_{zz} U_{\bar{z}\bar{z}} + t_{\bar{z}\bar{z}} U_{zz} \\
&L_4(U) = -4tL_2(U) + 6t(U_{zz\bar{z}} U_{z\bar{z}\bar{z}} - U_{zzz} U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}) + \\
&\qquad + 6U_{\bar{z}\bar{z}}^2 U_{zzz} U_{zz\bar{z}} + 6U_{zz}^2 U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} U_{z\bar{z}\bar{z}} \\
&L_5(U) = 16t^2 U_{zz\bar{z}\bar{z}} - 4t\,[2t_z U_{z\bar{z}\bar{z}} + 2t_{\bar{z}} U_{zz\bar{z}} + \\
&\qquad + t_{zz} U_{\bar{z}\bar{z}} + t_{\bar{z}\bar{z}} U] + 6\,[U_{\bar{z}\bar{z}}(t_z)^2 + U_{zz}(t_{\bar{z}})^2]
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Структура разрешающих уравнений (6.2) или (6.6) и контурных условий, получаемых применением (5.4), указывает на возможность представления решений конкретных задач разложениями в степенные ряды по степеням параметра ν или μ:

$$U = U^{(0)} + \mu U^{(1)} + \mu^2 (U)^{(2)} + \ldots \tag{6.8}$$

При этом определение «нулевого» приближения оказывается эквивалентным решению задачи классической теории упругости — построению по граничным данным бигармонической функции

$$U_{zz\bar{z}\bar{z}}^{(0)} = 0 \tag{6.9}$$

Для определения последующих приближений получаются дифференциальные уравнения

$$U_{zz\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + L_2(U^{(0)}) = 0 \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
&U_{zz\bar{z}\bar{z}}^{(2)} + L_2(U^{(0)}) + (U_{zz}^{(0)} U_{\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)} U_{zz}^{(1)})_{z\bar{z}} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(U_{zz\bar{z}}^{(0)} U_{z\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + U_{z\bar{z}\bar{z}}^{(0)} U_{zz\bar{z}}^{(1)}) - \tfrac{1}{2}(U_{zzz}^{(0)} U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}^{(0)} U_{zzz}^{(1)}) = 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Отсюда следует, что для определения каждого из последующих приближений надо найти частное решение неоднородного уравнения четвертого порядка, а затем определить бигармоническую функцию по граничным значениям. Для решения так поставленных задач рекомендуется применение метода Н. И. Мусхелишвили [4].

В заключение отметим, что «нулевые» и «первые» приближения для случаев физической нелинейности типа (6.1) или (6.3) не отличаются друг от друга. Поэтому известные [5] рекомендации способов решения задач нелинейной теории упругости при плоском деформированном состоянии нуждаются в обосновании.

§ 7. Пример расчета концентрации напряжений около круговой цилиндрической полости в бесконечно протяженном теле. Рассмотрим бесконечно протяженное тело, имеющее круговую цилиндрическую полость. Ось x_3 направляется вдоль оси полости радиуса R, поэтому будем изучать состояние плоскости x_1, x_2. Напряженное состояние тела на бесконечности считается заданным. Не ограничивая общности этого состояния, полагаем тело сжимающимся равномерно распределенной на бесконечности нагрузкой вдоль оси x_2 интенсивности $2pq\sqrt{1.5}$. Требуется определить распределение напряжений около свободной от напряжений поверхности тоннеля.

По заданным напряжениям на бесконечности

$$\sigma_1^\infty = 0, \qquad \sigma_2^\infty = 2\sigma_3^\infty = -pq2\sqrt{1.5}$$

в случае физической нелинейности типа (6.3) вычисляем симметричные инварианты:

$$\tau_i^\infty = pq, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} = -pq, \quad f^\infty = -\frac{1}{2}p\frac{1}{\mu}\ln(1-\mu^2q^2)$$

Отсюда легко получить формулировку условий на бесконечности для функции напряжений:

$$U_{zz}^\infty = U_{\bar{z}\bar{z}}^\infty = -\frac{1}{2}q, \; U_{z\bar{z}}^\infty = -\frac{1}{2}q + \frac{1}{4\mu}\ln(1-\mu^2q^2)$$

В соответствии с рекомендациями метода малого параметра находим условия на бесконечности для последовательных приближений:

$$(U_{zz}^{(0)})_\infty = (U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)})_\infty = (U_{z\bar{z}}^{(0)})_\infty = -\frac{1}{2}q \tag{7.1}$$

$$(U_{zz}^{(1)})_\infty = (U_{\bar{z}\bar{z}}^{(1)})_\infty = 0, \qquad (U_{z\bar{z}}^{(1)})_\infty = -\frac{1}{4}q^2 \tag{7.2}$$

$$(U_{zz}^{(2)})_\infty = (U_{\bar{z}\bar{z}}^{(2)})_\infty = (U_{z\bar{z}}^{(2)})_\infty = 0, \ldots \tag{7.3}$$

Условия на свободном от напряжений контуре $z = -Re^{i\alpha}$ получаются на основании (5.4) при $ds = -Rd\alpha$:

$$\frac{d}{d\alpha}U_z^{(0)} = 0 \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{R}e^{i\alpha}\frac{d}{d\alpha}U_z^{(1)} = i\left[U_{zz}^{(0)}U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)} - U_{z\bar{z}}^{(0)}(U_{zz}^{(0)}e^{2i\alpha} + U_{\bar{z}\bar{z}}e^{-2i\alpha})\right] \tag{7.5}$$

$$\frac{1}{R}e^{i\alpha}\frac{d}{d\alpha}U_z^{(2)} = i\left[-(U_{z\bar{z}}^{(1)} + U_{zz}^{(0)}U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)})(U_{zz}^{(0)}e^{2i\alpha} + U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)}e^{-2i\alpha}) + \right.$$
$$\left. + U_{zz}^{(0)}U_{\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)}U_{zz}^{(1)} - U_{z\bar{z}}^{(0)}(U_{zz}^{(1)}e^{2i\alpha} + U_{\bar{z}\bar{z}}^{(1)}e^{-2i\alpha})\right], \ldots \tag{7.6}$$

Известна [4] бигармоническая функция $U^{(0)}$, удовлетворяющая условиям (7.1) на бесконечности и условию (7.4) на контуре полости. Используя формулу Гурса для представления бигармонической функции и представление аналитических функций степенными рядами, получим

$$U^{(0)} = \frac{1}{4}q\left[-R^4\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{\bar{z}^2}\right) + 2R^2\left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right) + 2R^2\ln z\bar{z} - (z+\bar{z})^2\right] \tag{7.7}$$

Вычисляя $L_1(U^0)$, положим

$$\widetilde{U}^{(1)} = -\frac{1}{8}q^2R^2\left[\frac{R^6}{(z\bar{z})^3} - \frac{2R^4}{(z\bar{z})^2} + R^4\left(\frac{1}{z\bar{z}^3} + \frac{1}{z^3\bar{z}}\right) + \frac{R^2}{z\bar{z}} + \frac{z^2}{\bar{z}^2} + \frac{\bar{z}^2}{z^2}\right] \tag{7.8}$$

и обнаружим, что уравнение (6.10) будет удовлетворено, если функция $U^{(1)} - \widetilde{U}^{(1)}$ оказывается бигармонической. Вновь используем формулу Гурса, полагая

$$2U^{(1)} = 2\widetilde{U}^{(1)} + \bar{z}\varphi^{(1)}(z) + z\overline{\varphi^{(1)}(z)} + \varkappa^{(1)}(z) + \overline{\varkappa^{(1)}(z)}$$

где $\varphi^{(1)}$ и $\varkappa^{(1)}$ — аналитические функции.

Удовлетворяя условиям (7.2) на бесконечности, находим

$$\frac{1}{q^2}\varphi^{(1)}(z) = -\frac{1}{4}z + \varphi_{-1}^{(1)}\frac{1}{z} + \varphi_{-3}^{(1)}\frac{1}{z^3} + \ldots$$

$$\frac{1}{q^2}\varkappa^{(1)}(z) = \widetilde{\varkappa}^{(1)}\ln(z) + \varkappa_{-2}^{(1)}\frac{1}{z^2} + \varkappa_{-4}^{(1)}\frac{1}{z^4} + \ldots$$

Вычисляя контурные значения производных от $U^{(0)}$, представим условие на контуре $z = -Re^{i\alpha}$ для определения функции $U^{(1)}$ в виде

$$\frac{d}{d\alpha} U_z^{(1)} = -\frac{1}{4} iq^2 R\,(1 + 2\cos 2\alpha)^2 e^{-i\alpha}$$

Удовлетворяя этому условию, находим

$$U^{(1)} = \widetilde{U}^{(1)} + q^2 \Big[-\frac{1}{4} z\bar{z} + \frac{3}{8} R^2 \left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right) + \frac{1}{3} R^4 \left(\frac{z}{\bar{z}^3} + \frac{\bar{z}}{z^3} \right) - \\ - \frac{1}{2} R^2 \ln z\bar{z} + \frac{1}{12} R^4 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2} \right) - \frac{7}{40} R^6 \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{\bar{z}^4} \right) \Big] \qquad (7.9)$$

Вычисляя напряжения в точке $z = -R$, получим

$$U_{zz}^{(0)}\big|_{z=-R} = U_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)}\big|_{z=-R} = U_{z\bar{z}}^{(0)}\big|_{z=-R} = -\frac{3}{2} q, \qquad U_{zz}^{(1)} = U_{\bar{z}\bar{z}}^{(1)} = -\frac{3}{4}$$

$$U_{z\bar{z}}^{(1)} = -3q^2, \qquad \tau_i = 3pq\left(1 + \frac{1}{2}\mu q\right), \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{1.5}} = -3pq\left(1 + \frac{1}{2}\mu q\right)$$

Полагая $q = 1 : 2\sqrt{1.5}$, найдем

$$\sigma_2 |^{\infty} = -p, \qquad \sigma_2 |_{r=-R} = -p \cdot 3\,(1 + 0.2\mu) \qquad (7.10)$$

Таким образом, учет только первого приближения в выражении функции напряжений приводит к увеличению коэффициента концентрации напряжений по сравнению с коэффициентом концентрации, вычисленным в классической теории упругости.

Это еще раз указывает на тот факт, что первым приближением учитывается лишь геометрическая нелинейность. Для учета эффекта физической нелинейности необходимо определение $U^{(2)}$. Процесс определения второго приближения не отличается по существу от описанного выше процесса вычисления первого приближения. Опуская громоздкое выражение $U^{(2)}$, приведем лишь выражение коэффициента концентрации, вычисленного на основании второго приближения:

$$m = \frac{\sigma_2^{\text{max}}}{\sigma_2^{\infty}} = 3\,(1 + 0.2\,\mu - \mu^2)$$

Отсюда следует, что, начиная с максимального значения $m_{\text{max}} = 3.03$ при $\mu = 0.1$, можно обнаружить снижение коэффициента концентрации вместе с повышением интенсивности внешних сил.

Поступила 15 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
2. Толоконников Л. А. Уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях. ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.
3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1949.
5. Adkins J. E., Green A. E., Shield R. T. Finite Plane Strain. Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. 246, ser. A, No. 910, 1953.