Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

В. С. Жгенти

(Тбилиси)

В этой работе проведено исследование с точки зрения уравнений с малым параметром при старших производных общего вида тонких упругих оболочек, очерченных по поверхностям положительной гауссовой кривизны, закрепленных по краю.

§ 1. Оператор теории тонких упругих оболочек и формулировка основной теоремы. На срединной поверхности S оболочки введем ортогональные криволинейные координаты x_1, x_2, где $x_1 = \mathrm{const}$ и $x_2 = \mathrm{const}$ — линии кривизны. Обозначим через G область изменения параметров x_1, x_2 на плоскости $x_1 + ix_2$, соответствующей поверхности S.

Будем предполагать, что граница области G — достаточно гладкая замкнутая непересекающаяся кривая I.

Пусть длина элементарной дуги

$$ds^2 = A_1^2(x_1,\ x_2)\, dx_1^2 + A_2^2(x_1,\ x_2)\, dx_2^2$$

Будем предполагать, что функции A_1, A_2—непрерывно дифференцируемые до достаточно высокого порядка в $G + L$ и $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ в $G + L$.

Пусть гауссова кривизна средней поверхности S положительна, т. е.

$$k_1 k_2 > 0$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны той же поверхности. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ являются соответственно ортами касательных линий x_1, x_2 и нормали средней поверхности S.

Мы исходим из соотношений [1, 2]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_2 - k_1 u_3 \\
\varepsilon_{12}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{21}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2}{A_1}\right)\right\} \\
\varepsilon_{22}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_1 - k_2 u_3
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
\varkappa_{11}(\mathbf{u}) &= -\frac{1}{A_1}\frac{\partial k_1}{\partial x_1} u_1 - \frac{1}{A_2}\frac{\partial k_1}{\partial x_2} u_2 - k_1^2 u_3 - \frac{1}{A_1 A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\
\varkappa_{12}(\mathbf{u}) = \varkappa_{21}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}\left\{(k_2 - k_1)\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)\right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right\} \qquad (1.2) \\
\varkappa_{22}(\mathbf{u}) &= -\frac{1}{A_1}\frac{\partial k_2}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial k_2}{\partial x_2} u_2 - k_2^2 u_3 - \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i\right)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор малого смещения точек срединной поверхности S.

Потенциальная энергия деформации тонкой оболочки имеет вид [2]:

$$\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\iint_G\Big\{h\,[\varepsilon_{11}{}^2+2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}{}^2+2(1-\sigma)\varepsilon_{12}{}^2]+$$
$$+\frac{h^3}{12}[\varkappa_{11}{}^2+2\sigma\varkappa_{11}\varkappa_{22}+\varkappa_{22}{}^2+2(1-\sigma)\varkappa_{12}{}^2]\Big\}A_1A_2dx_1dx_2$$

где h — толщина оболочки, E — модуль Юнга, а σ — коэффициент Пуассона.

Дифференциальные уравнения равновесия тонкой упругой оболочки, полученные из принципа минимума потенциальной энергии, запишем в виде

$$h\,(\mathbf{B}\mathbf{u}+h^2\mathbf{N}\mathbf{u})=A_1A_2\mathbf{q} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{q}$ — внешняя нагрузка, а

$$\mathbf{B}\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{3}(B_i\mathbf{u})\,\mathbf{e}_i,\qquad \mathbf{N}\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{3}(N_i\mathbf{u})\,\mathbf{e}_i$$

причем

$$B_1\mathbf{u}=\frac{E}{1-\sigma^2}\Big\{-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[A_2(\varepsilon_{11}+\sigma\varepsilon_{22})\Big]+(\sigma\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{1-\sigma}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(A_1{}^2\varepsilon_{12})\Big\}$$

$$B_2\mathbf{u}=\frac{E}{1-\sigma^2}\Big\{-\frac{\partial}{\partial x_2}[A_1(\sigma\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})]+(\varepsilon_{11}+\sigma\varepsilon_{22})\frac{\partial A_1}{\partial x_2}-\frac{1-\sigma}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(A_2{}^2\varepsilon_{12})\Big\}$$

$$B_3\mathbf{u}=-\frac{E}{1-\sigma^2}[(k_1+\sigma k_2)\varepsilon_{11}+(\sigma k_1+k_2)\varepsilon_{22}]\,A_1A_2$$

$$N_1\mathbf{u}=\frac{E}{12(1-\sigma^2)}\Big\{-A_2\Big[\frac{\partial k_1}{\partial x_1}(\varkappa_{11}+\sigma\varkappa_{22})+\frac{\partial k_2}{\partial x_1}(\sigma\varkappa_{11}+\varkappa_{22})\Big]-$$
$$-\frac{1-\sigma}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_2}[A_1{}^2(k_2-k_1)\varkappa_{12}]\Big\}$$

$$N_2\mathbf{u}=\frac{E}{12(1-\sigma^2)}\Big\{-A_1\Big[\frac{\partial k_1}{\partial x_2}(\varkappa_{11}+\sigma\varkappa_{22})+\frac{\partial k_2}{\partial x_2}(\sigma k_{11}+\varkappa_{22})\Big]+$$
$$+\frac{1-\sigma}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_1}[A_2{}^2(k_2-k_1)\varkappa_{12}]\Big\}$$

$$N_3\mathbf{u}=\frac{E}{12(1-\sigma)}\Big\{-A_1A_2[k_1{}^2(\varkappa_{11}+\sigma\varkappa_{22})]+k_2{}^2(\sigma\varkappa_{11}+\varkappa_{22})+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big[\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\varkappa_{11}+\sigma\varkappa_{22})\Big]+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\sigma\varkappa_{11}+\varkappa_{22})\Big]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_1}[A_2(\varkappa_{11}+\sigma\varkappa_{22})]-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_2}[A_1(\sigma\varkappa_{11}+\varkappa_{22})]-$$
$$-(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{A_1{}^2}\frac{\partial}{\partial x_2}(A_1{}^2\varkappa_{12})-(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{A_2{}^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(A_2{}^2\varkappa_{12})\Big\}$$

Допустим, что вектор $\mathbf{q}$ непрерывен и непрерывно дифференцируем до достаточно высокого порядка в $G+L$.

Предположим еще, что

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}_0(x_1,\,x_2)+\mathbf{q}_1(x_1,\,x_2;\,h) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{q}_0\not\equiv 0$ не зависит от h, а

$$\lim_{h\to 0}\iint_G|\mathbf{q}_1|^2\,dx_1dx_2=0 \tag{1.5}$$

Введем вектор $\mathbf{U} = h\mathbf{u}$, который в силу (1.3) и (1.4) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{BU} + h^2\mathbf{NU} = A_1A_2\,[\mathbf{q}_0(x_1, x_2) + \mathbf{q}_1(x_1, x_2, h)] \tag{1.6}$$

Рассмотрим две следующие задачи.

Задача A. Пусть вектор $\mathbf{U} = U_1\mathbf{e}_1 + U_2\mathbf{e}_2 + U_3\mathbf{e}_3$ удовлетворяет уравнению (1.6) и граничному условию

$$U_1 = U_2 = U_3 = \frac{\partial U_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } L \tag{1.7}$$

где ν — нормаль кривой L.

Задача B. Пусть вектор $\mathbf{U}_0 = U_{10}\mathbf{e}_1 + U_{20}\mathbf{e}_2 + U_{30}\mathbf{e}_3$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{BU}_0 = A_1A_2\mathbf{q}_0(x_1, x_2) \tag{1.8}$$

и граничному условию

$$U_{10} = U_{20} = 0 \quad \text{на } L \tag{1.9}$$

Заметим, что задачи A и B — корректно поставленные.

Основная теорема. Если $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}_0$ являются решениями задач A и B, то

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \tag{1.10}$$

где вектор $\mathbf{U}_1 = U_{11}\mathbf{e}_1 + U_{21}\mathbf{e}_2 + U_{31}\mathbf{e}_3$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
U_{11} &= \{a_1h^{1/2}\cos(gh^{-1/2}) + h\,[b_1\sin(gh^{-1/2}) + c_1\cos(gh^{-1/2}) + d_1]\}\,e^{-gh^{-1/2}} \\
U_{21} &= \{a_2h^{1/2}\cos(gh^{-1/2}) + h\,[b_2\sin(gh^{-1/2}) + c_2\cos(gh^{-1/2}) + d_2]\}\,e^{-gh^{-1/2}} \\
U_{31} &= \{a_3\,[\sin(gh^{-1/2}) + \cos(gh^{-1/2})] + b_3h^{1/2}\,[\sin(gh^{-1/2}) - \cos(gh^{-1/2}) + 1]\}\,e^{-gh^{-1/2}}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

причем функция g, определенная в некоторой окрестности Ω границы L, обращается в нуль на L и положительна в точках области G. Вектор $\mathbf{U}_2$ зависит от h таким образом, что

$$\lim_{h\to 0}\iint_G |\mathbf{U}_2|^2\,dx_1dx_2 = 0 \tag{1.12}$$

§ 2. Основное неравенство. Пусть имеем уравнение

$$\mathbf{Bv} + h^2\mathbf{Nv} = \mathbf{Q} \tag{2.1}$$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма. Если вектор

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

удовлетворяет уравнению (2.1) и граничному условию

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } L \tag{2.2}$$

тогда

$$\iint_G |\mathbf{v}|^2\,dx_1dx_2 \leqslant \gamma\iint_G |\mathbf{Q}|^2\,dx_1dx_2 \tag{2.3}$$

где γ — положительное постоянное число, не зависящее от h, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{Q}$.

Основным неравенством называем неравенство (2.3).

Доказательство. Введем обозначение

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \iint_G \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\,dx_1dx_2$$

Применяя краевые условия (2.2) и неравенство $a^2+b^2+2\sigma ab \geqslant \geqslant (1-\sigma)(a^2+b^2)$, легко получим

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) \geqslant \frac{EA_0}{1+\sigma}\iint\limits_G \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{v})\,dx_1dx_2 \tag{2.4}$$

где

$$A_1A_2 \geqslant A_0 > 0 \quad \text{в} \quad G+L$$

Имеет место следующее равенство:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{w})A_1A_2 =$$

$$=\sum_{i=1}^{3} v_iP_i(\mathbf{w}) + \frac{\partial}{\partial x_1}\{A_2[v_1\varepsilon_{11}(\mathbf{w})+v_2\varepsilon_{12}(w)]\} + \frac{\partial}{\partial x_2}\{A_1[v_1\varepsilon_{12}(\mathbf{w})+v_2\varepsilon_{22}(\mathbf{w})]\} \tag{2.5}$$

где

$$P_1\mathbf{w} = -\frac{\partial}{\partial x_1}[A_2\varepsilon_{11}(\mathbf{w})] + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\varepsilon_{22}(\mathbf{w}) - \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial x_2}[A_1^2\varepsilon_{12}(\mathbf{w})]$$

$$P_2\mathbf{w} = -\frac{\partial}{\partial x_2}[A_1\varepsilon_{22}(\mathbf{w})] + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\varepsilon_{11}(\mathbf{w}) - \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial x_1}[A_2^2\varepsilon_{12}(\mathbf{w})]$$

$$P_3\mathbf{w} = -A_1A_2[k_1\varepsilon_{11}(\mathbf{w}) + k_2\varepsilon_{22}(\mathbf{w})]$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$P_i\mathbf{w} = 0 \qquad (i=1,\,2,\,3) \tag{2.6}$$

Из уравнения $P_3\mathbf{w}=0$ получим

$$w_3 = \frac{k_1}{k_1^2+k_2^2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}w_2\right) + \frac{k_2}{k_1^2+k_2^2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}w_1\right) \tag{2.7}$$

Внеся (2.7) в уравнения $P_1\mathbf{w}=0$, $P_2\mathbf{w}=0$, имеем

$$\sum_{j=1}^{2} A_{ij}w_j = 0 \qquad \left(A_{ij} = \sum_{j_1+j_2\leqslant 2} f_{ij}^{j_1j_2}\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}}\right) \qquad (i=1,\,2) \tag{2.8}$$

причем

$$f_{11}^{20} = -\frac{A_2k_2^2}{A_1(k_1^2+k_2^2)}, \qquad f_{11}^{02} = -\frac{A_1}{2A_2}, \qquad f_{12}^{11} = f_{21}^{11} = -\frac{(k_1-k_2)^2}{2(k_1^2+k_2^2)}$$

$$f_{22}^{20} = -\frac{A_2}{2A_1}$$

$$f_{22}^{02} = -\frac{A_1k_1^2}{A_2(k_1^2+k_2^2)},\; f_{11}^{11} = f_{12}^{20} = f_{12}^{02} = f_{21}^{20} = f_{21}^{02} = f_{22}^{11} = 0$$

Нетрудно вычислить

$$\det\left(\sum_{j_1+j_2=2} f_{ij}^{j_1j_2}\alpha_1^{j_1}\alpha_2^{j_2}\right)_{i,\,j=1,\,2} = \frac{[(A_2/A_1)k_2\alpha_1^2 + (A_1/A_2)k_1\alpha_2^2]^2}{2(k_1^2+k_2^2)}$$

Отсюда вытекает, что система (2.8) является системой эллиптического типа в области G, так как $k_1k_2>0$ в той же области.

Как известно (см., например, [3]), существует фундаментальная матрица

$$\omega(x,\,y) = \begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ \omega_{21} & \omega_{22}\end{pmatrix}$$

системы (2.8). Каждый столбец этой матрицы при $x\in G$ и $x\neq y$ удовлетворяет той же системе.

Рассмотрим следующую систему векторов:

$$\varphi_1 = \omega_{11}\mathbf{e}_1 + \omega_{21}\mathbf{e}_2 + \omega_{31}\mathbf{e}_3, \qquad \varphi_2 = \omega_{12}\mathbf{e}_1 + \omega_{22}\mathbf{e}_2 + \omega_{32}\mathbf{e}_3$$

где функции ω_{3j} $(j = 1, 2)$ определяются по формуле (2.7).

Легко заметить, что при $x \in G$ и $x \neq y$ векторы φ_j $(j = 1, 2)$ удовлетворяют системе (2.6).

Пусть точка $y\,(y_1, y_2)$ лежит внутри G. Вырежем эту точку кругом K_ε радиуса ε. Составим интеграл

$$\iint\limits_{G-K_\varepsilon} \sum_{i,\,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{ij}(\varphi_n)\,A_1A_2dx_1dx_2 \qquad (n = 1, 2)$$

Из этого интеграла, воспользовавшись равенством (2.5), системой (2.6), граничным условием (2.2) и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$v_n(y) = \iint\limits_{G} \sum_{i,\,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{ij}(\varphi_n)\,A_1A_2dx_1dx_2 \qquad (n = 1, 2) \tag{2.9}$$

Ядра интегралов имеют слабую особенность, и эти интегралы, как известно, ограниченные в $L_2(G)$,— операторы над $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$. Из ограниченности указанных операторов вытекает

$$\iint\limits_{G} \sum_{n=1}^{2} v_n^2 dx_1dx_2 \leqslant \gamma_1 \iint\limits_{G} \sum_{i,\,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{v})\,dx_1dx_2 \tag{2.10}$$

где $\gamma_1 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Применяя неравенство $2ab \geqslant -(a^2 + b^2)$, из (2.4) можно получить

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) + \frac{EA_0(1-\sigma)}{\sigma(1+\sigma)} \iint\limits_{G} \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}'')^2 dx_1dx_2 \geqslant \frac{EA_0(1-\sigma)}{(1+\sigma)} \iint\limits_{G} \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2 dx_1dx_2 \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_{11}' = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - k_1v_3, \qquad \varepsilon_{11}'' = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}v_2$$

$$\varepsilon_{22}' = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - k_2v_3, \qquad \varepsilon_{22}'' = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}v_1$$

$$\varepsilon_{12}' = \varepsilon_{21}' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\varepsilon_{12}'' = \varepsilon_{21}'' = -\frac{1}{2A_1A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}v_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}v_2\right)$$

Теперь из (2.4), применяя (2.10), можем вывести

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) \geqslant \gamma_2 \iint\limits_{G} \sum_{i,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}'')^2 dx_1dx_2 \tag{2.12}$$

где $\gamma_2 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от v.

Из (2.11), в силу (2.12), вытекает

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) \geqslant \gamma_3 \iint\limits_{G} \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2 dx_1dx_2 \tag{2.13}$$

где $\gamma_3 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Легко вывести, что

$$\iint_G \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2\, dx_1 dx_2 \geqslant \gamma_4 \iint_G [(k_2\varepsilon_{11}')^2 + (k_1\varepsilon_{22}')^2 + 2\,(\varepsilon_{12}')^2]\, dx_1 dx_2 \tag{2.14}$$

где $\gamma_4 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Из (2.14), применяя неравенство $a^2 + b^2 \geqslant {}^1/_2\,(a - b)^2$ и равенство

$$\iint_G \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0$$

можем вывести

$$\iint_G \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2\, dx_1 dx_2 \geqslant \gamma_5 \iint_G \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1 dx_2 \tag{2.15}$$

где $\gamma_5 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Теперь можем записать также следующее неравенство:

$$\iint_G \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2\, dx_1 dx_2 \geqslant \iint_G [(\varepsilon_{11}{}^{\circ} - k_1 v_3)^2 + (\varepsilon_{22}{}^{\circ} - k_2 v_3)^2]\, dx_1 dx_2 \tag{2.16}$$

где

$$\varepsilon_{11}{}^{\circ} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22}{}^{\circ} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

Из (2.16), в силу $2ab \leqslant a^2 + b^2$, получим

$$\iint_G \sum_{i,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2\, dx_1 dx_2 + \frac{1}{\sigma}(1 - \sigma)\,\gamma_6 \iint_G \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1 dx_2 \geqslant$$
$$\geqslant (1 - \sigma)\,\gamma_7 \iint_G v_3^2\, dx_1 dx_2 \tag{2.17}$$

где

$$\frac{1}{A_1^2} \leqslant \gamma_6, \qquad \frac{1}{A_2^2} \leqslant \gamma_6, \qquad k_1^2 + k_2^2 \geqslant \gamma_7 > 0 \qquad \text{в } G + L$$

Применяя (2.15), теперь из (2.17) можно вывести

$$\iint_G \sum_{i,\,j=1}^{2} (\varepsilon_{ij}')^2 dx_1 dx_2 \geqslant \gamma_8 \iint_G v_3^2\, dx_1 dx_2 \tag{2.18}$$

где $\gamma_8 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Из (2.13) в силу (2.18) вытекает

$$(\mathbf{Bv}, \mathbf{v}) \geqslant \gamma_9 \iint_G v_3^2\, dx_1 dx_2 \tag{2.19}$$

где $\gamma_9 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Теперь из (2.4), применяя (2.10), можно вывести также, что

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) \geqslant \frac{EA_0}{(1+\sigma)\,\gamma_1} \iint_G (v_1^2 + v_2^2)\, dx_1 dx_2 \tag{2.20}$$

Суммируя неравенства (2.19) и (2.20) получим

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) \geqslant \gamma_{10} \iint_G |\,\mathbf{v}\,|^2\, dx_1\, dx_2 \tag{2.21}$$

где $\gamma_{10} = \mathrm{const} > 0$ не зависит от $\mathbf{v}$.

Из уравнения (2.1) можно вывести следующее равенство:

$$(\mathbf{Bv},\mathbf{v}) + h^2(\mathbf{Nv},\ \mathbf{v}) = \mathbf{Qv} \tag{2.22}$$

Применяя граничное условие (2.2), легко получим

$$(\mathbf{Nv},\mathbf{v}) \geqslant \frac{E}{12(1+\sigma)} \sum_{i,\ j=1}^{2}{}' \varkappa_{ij}^2(\mathbf{v})\, A_1A_2dx_1dx_2 \tag{2.23}$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.23), из (2.22) можем получить

$$(\mathbf{Qv}) \geqslant (\mathbf{Bv},\mathbf{v})$$

Отсюда, применяя (2.21), вытекает

$$(\mathbf{Q},\mathbf{v}) \geqslant \gamma_{10} \iint_G |\mathbf{v}|^2\, dx_1dx_2 \tag{2.24}$$

Из (2.24), в силу $\mathbf{Qv} \leqslant {}^1/_2\,(|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{Q}|^2)$, можно вывести

$$\frac{1}{2\gamma_{10}} \iint_G |\mathbf{Q}|^2\, dx_1dx_2 + \frac{\gamma_{10}}{2} \iint_G |\mathbf{v}|^2\, dx_1dx_2 \geqslant \gamma_{10} \iint_G |\mathbf{v}|^2\, dx_1dx_2$$

Отсюда вытекает основное неравенство (2.3) и лемма доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы. Переходим теперь к доказательству основной теоремы, сформулированной в § 1.

Вектор $\mathbf{U}_2' = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = U_{12}\mathbf{e}_1 + U_{22}\mathbf{e}_2 + U_{32}\mathbf{e}_3$ в силу (1.6) и (1.8) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{BU}_2' + h^2\mathbf{NU}_2' = A_1A_2\mathbf{q}_1(x_1,\ x_2,\ h) - h^2\mathbf{NU}_0 \tag{3.1}$$

и в силу (1.7), (1.9) граничному условию

$$U_{12}' = U_{22}' = 0, \qquad U_{32}' = -U_{30}, \quad \frac{\partial U_{32}'}{\partial \nu} = -\frac{\partial U_{30}}{\partial \nu} \quad \text{на } L \tag{3.2}$$

Введем вектор $\mathbf{U}_1^* = U_{11}^*\mathbf{e}_1 + U_{21}^*\mathbf{e}_2 + U_{31}\mathbf{e}_3$, который удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{BU}_1^* + h^2\mathbf{NU}_1^* = 0 \tag{3.3}$$

и граничному условию (3.2).

Вектор $\mathbf{U}_1^*$ ищем в следующем виде:

$$\mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_1 + R \tag{3.4}$$

где вектор $\mathbf{U}_1$ определяется формулами (1.11).

Внеся (3.4) в уравнение (3.3), получим

$$B_1\mathbf{R} + h^2N_1\mathbf{R} = \frac{Eh^{-1/2}}{1-\sigma^2}\left\{\left[2\,\frac{A_2}{A_1}\,p_1^2 + (1-\sigma)\,\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]a_1 + \right.$$
$$\left. + (1+\sigma)\,p_1p_2a_2 + 2A_2(k_1+\sigma k_2)\,p_1a_3\right\}\exp(-gh^{-1/2})\sin(gh^{-1/2}) +$$
$$+ \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\left[2\,\frac{A_2}{A_1}p_1^2 + (1-\sigma)\,\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]c_1 + (1+\sigma)\,p_2p_2c_2 + f_1^{(1)}(a_1,\ a_2,\ a_3,\ g)\right\}\times$$
$$\times \exp(-gh^{-1/2})\sin(gh^{-1/2}) - \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\left[2\,\frac{A_2}{A_1}p_1^2 + (1-\sigma)\,\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]b_1 + \right.$$

$$+(1+\sigma)p_1p_2b_2+f_2^{(1)}(a_1,a_2,a_3,b_3,g)\Big\}\exp(-gh^{-1/2})\cos(gh^{-1/2})+\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\times$$
$$\times\left\{\left[2\frac{A_2}{A_1}p_1^2+(1-\sigma)\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]d_1+(1+\sigma)p_1p_2d_2+2A_2(k_1+\sigma k_2)p_1b_3\right\}\times$$
$$\times\exp(-gh^{-1/2})+\sum_{i=1}^{6}\{h^{1/2 i}[F_i^{(1)}\cos(g^{-1/2})+\Phi_i^{(1)}\sin(gh^{-1/2})+\chi_i^{(1)}]\}\times$$
$$\times\exp(-gh^{-1/2}) \tag{3.5}$$

$$B_2\mathbf{R}+h^2N_2\mathbf{R}=\frac{Eh^{-1/2}}{1-\sigma^2}\left\{(1+\sigma)p_1p_2a_1+\left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2+(1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]a_2+\right.$$
$$\left.+2A_1(\sigma k_1+k_2)p_2a_3\right\}\exp(-gh^{-1/2})\sin(gh^{-1/2})+\frac{E}{1-\sigma^2}\Big\{(1+\sigma)p_1p_2c_1+$$
$$+\left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2+(1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]c_2+f_1^{(2)}(a_1,a_2,a_3,g)\Big\}\exp(-gh^{-1/2})\sin(gh^{-1/2})-$$
$$-\frac{E}{1-\sigma^2}\left\{(1+\sigma)p_1p_2b_1+\left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2+(1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]b_2+f_2^{(2)}(a_1,a_2,a_3,b_3,g)\right\}\times$$
$$\times\exp(-gh^{1/2})\cos(gh^{-1/2})+\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\Big\{(1+\sigma)p_1p_2d_1+$$
$$+\left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2+(1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]d_2+2A_1(\sigma k_1+k_2)p_2b_3\Big\}\exp(-gh^{-1/2})+$$
$$+\sum_{i=1}^{6}\{h^{1/2 i}[F_i^{(2)}\cos(gh^{-1/2})+\Phi_i^{(2)}\sin(gh^{-1/2})+\chi_i^{(2)}]\}\exp(-gh^{-1/2}) \tag{3.6}$$

$$B_3\mathbf{R}+h^2N_3\mathbf{R}=\frac{E}{1-\sigma^2}\Big\{-A_2(k_1+\sigma k_2)p_1a_1-A_1(\sigma k_1+k_2)p_2a_2+$$
$$+\left[-A_1A_2(k_1^2+k_2^2+2\sigma k_1k_2)+\frac{1}{3A_1A_2}\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^2\right]a_3\Big\}\times$$
$$\times[\sin(gh^{-1/2})+\cos(gh^{-1/2})]\exp(-gh^{-1/2})+$$
$$+\sum_{i=1}^{6}\{h^{1/2 i}[F_i^{(3)}\cos(gh^{-1/2})+\Phi_i^{(3)}\sin(gh^{-1/2})+\chi_i^{(3)}]\}\exp(-gh^{-1/2}) \tag{3.7}$$

где

$$p_1=\frac{\partial g}{\partial x_1},\qquad p_2=\frac{\partial g}{\partial x_2}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\left[2\frac{A_2}{A_1}p_1^2+(1-\sigma)\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]a_1+(1+\sigma)p_1p_2a_2+2A_2(k_1+\sigma k_2)p_1a_3=0$$
$$(1+\sigma)p_1p_2a_1+\left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2+(1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]a_2+2A_1(\sigma k_1+k_2)p_2a_3=0 \tag{3.8}$$
$$-A_2(k_1+\sigma k_2)p_1a_1-A_1(\sigma k_1+k_2)p_2a_2+$$
$$+\left[-A_1A_2(k_1^2+k_2^2+2\sigma k_1k_2)+\frac{1}{3A_1A_2}\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^2\right]a_3=0$$

Приравнивая нулю детерминант этой системы, получим

$$\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^4-3(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)^2=0 \tag{3.9}$$

Определим функцию g так, чтобы она удовлетворяла уравнению (3.9), обращалась в нуль на L и была положительна в точках, принадлежащих области G. Для доказательства возможности построения такой функции применяем способ, изложенный в работе [4].

Дифференциальные уравнения характеристик (3.9) имеют следующий вид (см., например, [5], § 56):

$$\frac{dx_1}{dt}=8\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^3\frac{A_2}{A_1}p_1-12(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)A_2^2k_2p_1 \quad (3.10)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=8\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^3\frac{A_1}{A_2}p_2-12(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)A_1^2k_1p_2 \quad (3.11)$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-4\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^3\left[p_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)+p_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\right]+$$
$$+6(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)\left[p_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}(A_2^2k_2)+p_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1^2k_1)\right] \quad (3.12)$$

$$\frac{dp_2}{dt}=-4\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^3\left[p_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)+p_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\right]+$$
$$+6(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)\left[p_1^2\frac{2\partial}{\partial x_2}(A_2^2k_2)+p_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}(A_1^2k_1)\right] \quad (3.13)$$

$$\frac{dg}{dt}=8\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^4-12(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)^2 \quad (3.14)$$

Пусть граница L задается уравнениями $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$, где s — длина дуги кривой L.

Применяя (3.10) и (3.11), получим

$$x_1'(s)\frac{dx_2}{dt}-x_2'(s)\frac{dx_1}{dt}=8\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^3\left[\frac{A_1}{A_2}x_1'(s)p_2-\frac{A_2}{A_1}x_2'(s)p_1\right]-$$
$$-12(1-\sigma^2)(A_2^2k_2p_1^2+A_1^2k_1p_2^2)\left[A_1^2k_1x_1'(s)p_2-A_2^2k_2x_2'(s)p_1\right] \quad (3.15)$$

Так как $g=0$ на L, то

$$p_1x_1'(s)+p_2x_2'(s)=0$$

В силу последнего из уравнений (3.9) можно получить

$$p_1=-\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}\,\frac{[A_2^2k_2x_2'^2(s)+A_1^2k_1x_1'^2(s)]^{1/2}}{(A_2/A_1)x_2'^2(s)+(A_1/A_2)x_1'^2(s)}\,x_2'(s)$$
$$p_2=\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}\,\frac{[A_2^2k_2x_2'^2(s)+A_1^2k_1x_1'^2(s)]^{7/2}}{(A_2/A_1)x_1'^2(s)+(A_1/A_2)x_2'^2(s)}\,x_1'(s) \quad (3.16)$$

Внеся (3.16) в (3.15), получим

$$x_1'(s)\frac{dx_2}{dt}-x_2'(s)\frac{dx_1}{dt}=$$
$$=12(1-\sigma^2)\sqrt[4]{3^3(1-\sigma^2)^3}\,\frac{[A_2^2k_2x_2'^2(s)+A_1^2k_1x_1'^2(s)]^{7/2}}{[(A_2/A_1)x_2'^2(s)+(A_1/A_2)x_1'^2(s)]^3}\neq 0$$

Таким образом, в каждой точке границы L проекция на плоскости x_1+ix_2 характеристики не касается L.

Отсюда, как известно (см., например, [5], § 56), вытекает, что в некоторой окрестности границы L существует функция g, удовлетворяющая уравнению (3.9) и обращающаяся в нуль на L.

Удаляясь от границы L (где $g=0$) внутрь G вдоль характеристики, мы из (3.14) в силу (3.9) можем вывести

$$\frac{dg}{dt}=4\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^4 \tag{3.17}$$

В силу равенств (3.16) будем иметь

$$\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2>0 \qquad \text{на } L$$

Отсюда в силу соображения непрерывности можем заключить, что существует некоторая малая окрестность Ω границы L, в которой

$$\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2>0 \tag{3.18}$$

Из (3.17), применяя неравенство (3.18), можем вывести в область Ω $dg/dt>0$. Отсюда вытекает, что $g>0$ в точках области G, принадлежащих окрестности Ω границы L.

Заметим, что в случае сферического сегмента $0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_0$, функция g имеет вид:

$$g=r^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}\,(\vartheta_0-\vartheta)$$

где r — радиус сферы. В этом случае ширину пограничного слоя δ, измеряемую в радианах, можно вычислить по формуле

$$\delta=\frac{4}{\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}}\left(\frac{h}{r}\right)^{1/2}$$

На L в силу свойства функции g и граничного условия (3.2) выполняется

$$\begin{aligned} &a_1h^{1/2}+h(c_1+d_1)+R_1=0\\ &a_2h^{1/2}+h(c_2+d_2)+R_2=0\\ &a_3+R_3=-U_{30},\qquad \frac{\partial a_3}{\partial\nu}+b_3\frac{\partial g}{\partial\nu}+\frac{\partial R_3}{\partial\nu}=-\frac{\partial U_{30}}{\partial\nu}\end{aligned} \tag{3.19}$$

За функцией a_3, b_3 возьмем любое достаточное число раз непрерывно дифференцируемых функций, которые удовлетворяют граничному условию

$$a_3=-U_{30},\ b_3=-\left(\frac{\partial U_{30}}{\partial\nu}+\frac{\partial a_3}{\partial\nu}\right)\Big/\frac{\partial g}{\partial\nu} \qquad \text{на } L \tag{3.20}$$

и обращаются в нуль вне Ω. Нетрудно показать, что $\partial g/\partial\nu>0$ на L.

Функции a_1, a_2 определяем из следующей системы:

$$\begin{aligned}&\left[2\frac{A_2}{A_1}p_1^2+(1-\sigma)\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]a_1+(1+\sigma)p_1p_2a_2=-2A_2(k_1+\sigma k_2)p_1a_3\\ &(1+\sigma)p_1p_2a_1+\left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2+(1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]a_2=-2A_1(\sigma k_1+k_2)p_2a_3\end{aligned} \tag{3.21}$$

Детерминант этой системы имеет вид:

$$2(1-\sigma)\left(\frac{A_2}{A_1}p_1^2+\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right)^2$$

Отсюда видно, что он в силу (3.18) отличен от нуля, поэтому система (3.21) разрешима в Ω. Вне Ω функции a_1, a_2 приравниваем нулю.

Таким образом, функции a_1, a_2, a_3 удовлетворяют системе (3.8), так как детерминант этой однородной системы равен нулю.

Функции b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 определяем из следующих систем:

$$\left[2\frac{A_2}{A_1}p_1^2 + (1-\sigma)\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]c_1 + (1+\sigma)p_1p_2c_2 = -f_1^{(1)}(a_1, a_2, a_3, g) \tag{3.22}$$

$$(1+\sigma)p_1p_2c_1 + \left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2 + (1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]c_2 = -f_1^{(2)}(a_1, a_2, a_3, g)$$

$$\left[2\frac{A_2}{A_1}p_1^2 + (1-\sigma)\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]b_1 + (1+\sigma)p_1p_2b_2 = -f_2^{(1)}(a_1, a_2, a_3, b_3, g)$$
$$\tag{3.23}$$
$$(1+\sigma)p_1p_2b_1 + \left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2 + (1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]b_2 = -f_2^2(a_1, a_2, a_3, b_3, g)$$

$$\left[2\frac{A_2}{A_1}p_1^2 + (1-\sigma)\frac{A_1}{A_2}p_2^2\right]d_1 + (1+\sigma)p_1p_2d_2 = -2A_2(k_1+\sigma k_2)p_1b_3$$
$$\tag{3.24}$$
$$(1+\sigma)p_1p_2d_1 + \left[2\frac{A_1}{A_2}p_2^2 + (1-\sigma)\frac{A_2}{A_1}p_1^2\right]d_2 = -2A_1(\sigma k_1+k_2)p_2b_3$$

Заметим, что правые части этих систем обращаются в нуль вместе a_1, a_2, a_3, b_3, и поэтому функции c_1, c_2, b_1, b_2, d_1, d_2 можем приравнять нулю вне Ω.

Вектор $\mathbf{R}$ в силу (3.8), (3.22), (3.23), (3.24), (3.5), (3.6), (3.7) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{BR} + h^2\mathbf{NR} = \sum_{i=1}^{6}\{h^{1/2 i}[\mathbf{F}_i\cos(gh^{-1/2}) + \mathbf{\Phi}_i\sin(gh^{-1/2}) + \chi_i]\}\exp(-gh^{-1/2}) \tag{3.25}$$

и в силу (3.19), (3.20) граничному условию

$$a_1h^{1/2} + h(c_1+d_1) + R_1 = 0, \qquad a_2h^{1/2} + h(c_2+d_2) + R_2 = 0$$
$$R_3 = \frac{\partial R_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } L \tag{3.26}$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{R}' = h^{1/2}\mathbf{r}_1 + h\mathbf{r}_2 + \mathbf{R} = R_1'\mathbf{e}_1 + R_2'\mathbf{e}_2 + R_3'\mathbf{e}_3$, где

$$\mathbf{r}_1 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{r}_2 = (c_1+d_1)\mathbf{e}_1 + (c_2+d_2)\mathbf{e}_2$$

Этот вектор в силу (3.25) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{BR}' + h^2\mathbf{NR}' = \sum_{i=1}^{6}\{h^{1/2 i}[\mathbf{F}_i\cos(gh^{-1/2}) + \mathbf{\Phi}_i\sin(gh^{-1/2}) +$$
$$+ \chi_i]\}\exp(-gh^{-1/2}) + h^{1/2}\mathbf{Br}_1 + h\mathbf{Br}_2 + h^{5/2}\mathbf{Nr}_1 + h^3\mathbf{Nr}_2 \tag{3.27}$$

и в силу (3.26) граничному условию

$$R_1' = R_2' = R_3' = \frac{\partial R_3'}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } L \tag{3.28}$$

К вектору $\mathbf{R}$ можем применять основное неравенство (2.3), так как для него в силу (3.28) выполняются условия леммы, и поэтому, принимая во внимание правую часть уравнения (3.27), получим

$$\lim_{h\to 0}\iint_G |\mathbf{R}'|^2 dx_1 dx_2 = 0$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{h\to 0}\iint_G |\mathbf{R}|^2\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{3.29}$$

Рассмотрим теперь вектор

$$\mathbf{U}_2^* = \mathbf{U}_2' - \mathbf{U}_1^* = U_{12}^* \mathbf{e}_1 + U_{22}^* \mathbf{e}_2 + U_{32}^* \mathbf{e}_3$$

который в силу (3.1), (3.3) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_2^* + h^2 \mathbf{N}\mathbf{U}_2^* = A_1 A_2 \mathbf{q}_1 (x_1,\ x_2,\ h) - h^2 \mathbf{N}\mathbf{U}_0 \tag{3.30}$$

и в силу (3.2) граничному условию (3.28).

Применяя теперь к вектору $\mathbf{U}_2^*$ основное неравенство (2.3), так как для него выполняются условия леммы, принимая во внимание правую часть уравнения (3.30) и условие (1.5), получим

$$\lim_{h\to 0}\iint_G |\mathbf{U}_2^*|^2\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{3.31}$$

Нетрудно получить, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1^* + \mathbf{U}_2^*$$

Отсюда, применяя формулу (3.4), получим равенство (1.10), где

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{U}_2^* \tag{3.32}$$

Теперь, принимая во внимание (3.29), (3.31) и (3.32), получим условие (1.12). Таким образом, основная теорема доказана.

Нетрудно доказать, что, если выполняется условие

$$\iint_G |\mathbf{q}_1|^2\, dx_1\, dx_2 = 0\,(h)$$

тогда

$$\iint_G |\mathbf{U}_2|^2\, dx_1\, dx_2 = 0\,(h).$$

Из основной теоремы вытекает, что

$$\lim_{h\to 0}\iint_G |\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_1|^2\, dx_1\, dx_2 = 0$$

Поступила 15 III 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
2. Михлин С. Г. Оценка погрешности расчета упругой оболочки как плоской пластины. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1952.
3. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система линейных дифференциальных уравнений. Украинский математический журнал, т. III, № 1, 3, 1951.
4. Levinson N. The first boundary value problem for small. Annals of Mathematics, vol. 51, No. 2, March, 1950.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.