

## ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. А. Кильчевский

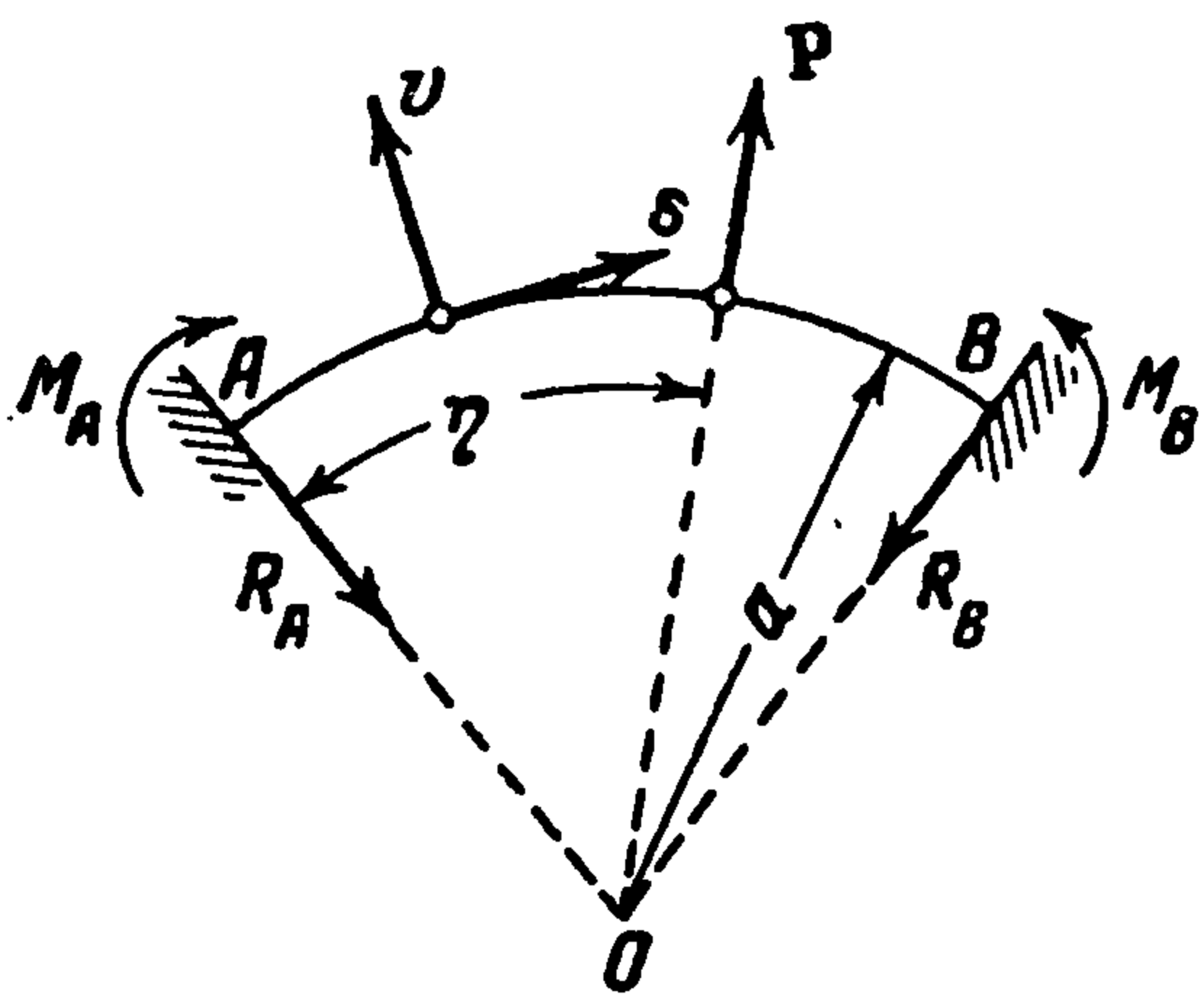
(Киев)

Ниже излагается метод составления интегро-дифференциальных и интегральных уравнений равновесия тонких упругих оболочек в перемещениях, основанный на применении теоремы о взаимности работ. Этот метод является видоизменением известного метода Сомильяна [5], отличаясь от метода Сомильяна специальным выбором системы «вспомогательных» перемещений, позволяющим представить перемещение точки срединной поверхности оболочки суммой перемещения соответствующей точки срединной плоскости пластинки — «карты» срединной поверхности оболочки — и дополнительного перемещения, зависящего, в частности, от кривизны срединной поверхности оболочки. К цилиндрическим оболочкам этот метод был применен автором свыше десяти лет назад [4с].

В настоящей работе указывается распространение этого метода на оболочки с произвольной формой срединной поверхности.

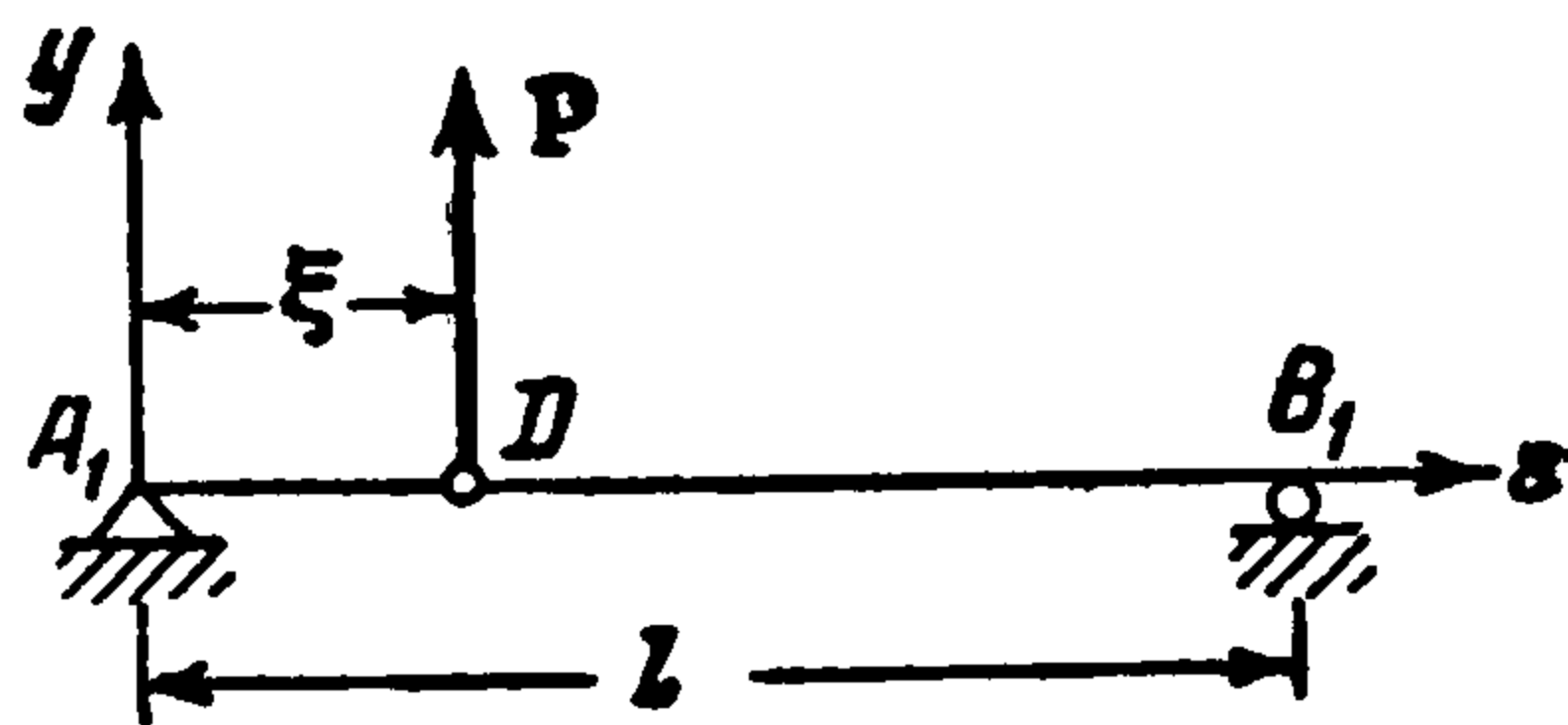
**§ 1. Интегральное уравнение равновесия круговой арки.** Рассмотрим простейший пример применения предлагаемого метода к решению одномерной задачи. Этот пример позволит выяснить некоторые особенности метода, распространяемого далее на двумерные задачи о равновесии упругих оболочек.

Рассмотрим равновесие круговой арки, находящейся под действием единичной сосредоточенной силы  $P$ , направленной по нормали к ее оси



Фиг. 1

(фиг. 1). Арку будем рассматривать как тонкий стержень, жестко закрепленный на концах. Длину недеформированной оси стержня  $AB$



Фиг. 2

обозначим  $l$ . Положение точек на оси стержня будем обозначать дуговой координатой  $s$ , отсчитываемой от точки  $A$ . Дуговую координату точки приложения силы обозначим  $\eta$ . Поставим в соответствие точкам оси арки точки оси балки  $A_1B_1$  длины  $l$  — «карты» оси арки (фиг. 2). Положение точки на недеформированной оси балки определим координатой  $s$ , отсчитываемой от точки  $A_1$ . Масштабы дуговых координат на кривой  $AB$  и прямой  $A_1B_1$  одинаковы.

Будем предполагать, что на балку действует единичная сосредоточенная сила  $P$ , приложенная в точке с дуговой координатой  $\xi$  и направленная по нормали к недеформированной оси  $A_1B_1$  балки. Концы балки свободно оперты. Установим при помощи теоремы о взаимности работ взаимосвязь между радиальными перемещениями  $u(s, \eta)$  оси арки и прогибами  $y(s, \xi)$  оси балки, предполагая, что постоянная по длине жесткость  $EI$  арки равна жесткости балки. Перемещениями, касательными к оси арки, пренебрегаем.

На основании элементарной теории изгиба стержнем найдем

$$y(s, \xi) = \frac{s(l-\xi)}{6EI} (2\xi l - \xi^2 - s^2) \quad (s < \xi) \quad (1.1.1)$$

$$y(s, \xi) = \frac{\xi(l-s)}{6EI} (2sl - \xi^2 - s^2) \quad (s > \xi) \quad (1.1.2)$$

Углы поворота концов балки определяются так:

$$\varphi(0, \xi) = \frac{\xi(l-\xi)(2l-\xi)}{6EI}, \quad \varphi(l, \xi) = -\frac{\xi(l-\xi)(l+\xi)}{6EI} \quad (1.2)$$

Будем рассматривать  $y(s, \xi)$  как радиальное смещение точки оси арки.

Соответственно этому углы поворота  $\theta(0, \xi)$  и  $\theta(l, \xi)$  концов  $A$  и  $B$  арки также определяются равенствами (1.2). В арке смещение  $y(s, \xi)$  вызывается действием единичной сосредоточенной силы и некоторой дополнительной радиальной распределенной нагрузки, зависящей от кривизны арки. Эту дополнительную нагрузку можно определить на основании теории тонких стержней из уравнения равновесия [5]

$$EI \left( \frac{d^4 y}{ds^4} + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) = q \quad (1.3)$$

Здесь  $q$  — радиальная нагрузка, распределенная по оси арки.

На основании (1.1.1) — (1.1.2) найдем

$$q(s, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{a^2 l} s(l-\xi) & (s < \xi) \\ -\frac{1}{a^2 l} \xi(l-s) & (s > \xi) \end{cases} \quad q(s, \xi) = q(\xi, s) \quad (1.4)$$

Применяя теорему о взаимности работ, примем первой системой нагрузок, действующих на арку, единичную сосредоточенную силу  $P$ , приложенную в точке  $C(\eta)$ , вызванные ею реакции  $R(0, \eta)$ ,  $R(l, \eta)$  и реактивные моменты  $M(0, \eta)$ ,  $M(l, \eta)$  (фиг. 1). Радиальные перемещения первой системы будут  $u(s, \eta)$ . Вторая, вспомогательная система нагрузок состоит из единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $D(\xi)$  арки, соответствующей точке  $D(\xi)$  балки, из радиальной распределенной нагрузки  $q(s, \xi)$ , определенной равенством (1.3), реакций  $Q(0, \xi)$ ,  $Q(l, \xi)$  и реактивных моментов  $L(0, \xi)$ ,  $L(l, \xi)$ . Радиальные перемещения вспомогательной системы будут  $y(s, \xi)$ .

Применяя теорему о взаимности работ к этим системам нагрузок и перемещений, найдем

$$u(\xi, \eta) = y(\eta, \xi) - \int_0^l q(s, \xi) u(s, \eta) ds + M(0, \eta) \theta(0, \xi) + M(l, \eta) \theta(l, \xi) \quad (1.5)$$

Так как  $M(0, \eta)$  и  $M(l, \eta)$  выражаются через производные от смещений  $u(s, \eta)$  в точках  $s=0$  и  $s=l$ , соотношение (1.5) является интегро-дифференциальным уравнением равновесия арки. Смысл этого уравнения очевиден. Второй член в правой части равенства (1.5) согласно (1.3) зависит от кривизны недеформированной оси арки, третий и четвертый — от различия в краевых условиях на зацементированных концах арки и на свободно опертых концах балки. Если условия закрепления концов арки и балки будут одинаковы, то, как легко заметить, члены, зависящие от различия в краевых условиях, исчезнут и равенство (1.5) превратится в интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с регулярным ядром.

Чтобы привести уравнение (1.5) к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, можно воспользоваться также тем, что к смещениям  $y(s, \xi)$ , имеющим особенность в точке  $D(\xi)$ , соответствующую действию единичной сосредоточенной силы  $P$ , можно присоединить произвольные перемещения  $y_1(s, \xi)$ , непрерывные по  $s$  и имеющие непрерывные по  $s$  производные до четвертого порядка включительно. Эти дополнительные смещения соответствуют действию некоторых дополнительных нагрузок на концах арки и дополнительной нагрузки, непрерывно распределенной по длине арки. Пусть дополнительные вспомогательные смещения удовлетворяют условиям

$$y(0, \xi) + y_1(0, \xi) = 0, \quad y(l, \xi) + y_1(l, \xi) = 0 \quad (1.6.1)$$

$$\frac{\partial y(0, \xi)}{\partial s} + \frac{\partial y_1(0, \xi)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial y(l, \xi)}{\partial s} + \frac{\partial y_1(l, \xi)}{\partial s} = 0 \quad (1.6.2)$$

т. е. новые вспомогательные перемещения и соответствующие им углы поворота на концах арки равны нулю.

Чтобы удовлетворить этим условиям, достаточно положить

$$y_1(s, \xi) = y_1(\xi, s) = -\frac{s\xi(l-s)(l-\xi)}{6EI l^3} [l(s+\xi) - 2(l^2 + s\xi)] \quad (1.7)$$

Дополнительная радиальная вспомогательная нагрузка  $q_1(s, \xi)$ , распределенная вдоль арки, соответствующая смещениям  $y_1(s, \xi)$ , согласно (1.3) будет иметь следующее выражение:

$$q_1(s, \xi) = \frac{\xi(l-\xi)}{a^2 l^3} [2s\xi - l(s+\xi) + l^2] \quad (1.8)$$

Очевидно,  $q_1(s, \xi) \neq q_1(\xi, s)$ .

Несимметричность функции  $q_1(s, \xi)$  отображает свойства изгибающих моментов в арке с жестко закрепленными концами. Изгибающие моменты стремятся к нулю при  $\xi \rightarrow 0$ , но не стремятся к нулю, если  $s \rightarrow 0$ , так как в точках  $A$  и  $B$  арки действуют реактивные моменты (фиг. 1).

Полное радиальное вспомогательное смещение точки арки обозначим  $v(s, \xi)$ :

$$v(s, \xi) = y(s, \xi) + y_1(s, \xi) \quad (1.9)$$

Полную дополнительную вспомогательную нагрузку обозначим  $K(s, \xi)$ :

$$K(s, \xi) = q(s, \xi) + q_1(s, \xi) \quad (1.10)$$

Применяя, как и выше, теорему о взаимности работ, придем к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с несимметричным ядром:

$$u(\xi, \eta) = v(\eta, \xi) - \int_0^l K(s, \xi) u(s, \eta) ds \quad (1.11)$$

Из свойств функции  $v(\eta, \xi)$  и ядра  $K(s, \xi)$  можно непосредственно установить, что функция  $u(\xi, \eta)$ , удовлетворяющая уравнению (1.11), удовлетворяет также крайевым условиям задачи, т. е. условиям на жестко закрепленных концах арки. Решение уравнения (1.11) не сопряжено с трудностями [7] и принципиального интереса не представляет. Обратим лишь внимание на одну особенность интегральных уравнений, вытекающих из теоремы о взаимности работ.

Как уже было отмечено, дополнительные вспомогательные перемещения  $y_1(s, \xi)$  должны быть непрерывны по  $s$  и иметь непрерывные по  $s$  производные до четвертого порядка включительно. В остальном этими перемещениями можно распоряжаться произвольно. Выбирая  $y_1(s, \xi)$  в форме полинома от  $s$  не ниже седьмой степени, всегда можно добиться выполнения восьми условий:

$$\begin{aligned} v(0, \xi) = v(l, \xi) = 0, & \quad \frac{\partial v(0, \xi)}{\partial s} = \frac{\partial v(l, \xi)}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial^2 v(0, \xi)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 v(l, \xi)}{\partial s^2} = 0, & \quad \frac{\partial^3 v(0, \xi)}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 v(l, \xi)}{\partial s^3} = 0 \end{aligned}$$

При этих условиях теорема о взаимности работ приводит к уравнению вида (1.11), одинакового по форме для всех случаев закрепления концов арки. Это уравнение уже не имеет единственного решения, так как ему должны удовлетворять все формы прогибов арки, соответствующие различным крайевым условиям. Здесь, очевидно, должны выполняться условия третьей теоремы Фредгольма, относящиеся к случаям отсутствия единственности решений неоднородных интегральных уравнений [7]. Поэтому, превращая интегро-дифференциальные уравнения, вытекающие из теоремы о взаимности работ, в интегральные, следует проверять, удовлетворяет ли найденное решение крайевым условиям задачи, и в случае необходимости строить общее решение согласно теории Фредгольма.

**§ 2. Интегродифференциальные уравнения равновесия тонких упругих оболочек.** Рассмотренный в § 1 пример в основном отражает сущность предлагаемого нами метода составления интегродифференциальных и интегральных уравнений равновесия тонких упругих оболочек. Аналогом оси арки в теории оболочек является ее срединная поверхность, аналогом оси балки — срединная плоскость пластинки — «карты» срединной поверхности оболочки. Допустим, что внутренними координатами срединной поверхности оболочки являются изотермические координаты [3].

В этом случае линейный элемент срединной поверхности определяется равенством

$$ds^2 = F^2(x^1, x^2) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2] \quad (2.1)$$

Здесь  $x^1$  и  $x^2$  — внутренние координаты точек срединной поверхности оболочки,  $F(x^1, x^2) = F(M)$  — скалярная функция точки  $M(x^1, x^2)$  срединной поверхности оболочки. Примем, что координаты  $x^i$  являются также декартовыми координатами точек срединной поверхности пластинки.

Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие точек срединной поверхности оболочки и срединной плоскости пластинки. При этом равенство (2.1) установит связь между линейным элементом  $ds$  срединной поверхности оболочки и линейным элементом  $ds_0$  срединной плоскости пластинки. Эта связь инвариантна. В произвольной системе ортогональных координат на срединной плоскости пластинки получим<sup>1</sup>

$$ds^2 = F^2(M) ds_0^2 = F^2(M) G_{ii}(M) (dx^i)^2 \quad (2.2.1)$$

Здесь  $G_{ii}$  — компоненты метрического тензора на срединной плоскости пластинки. На срединной поверхности оболочки компоненты  $g_{ik}$  ( $i, k = \overline{1, 2}$ ) метрического тензора выражаются так:

$$g_{ii} = F^2(M) G_{ii}(M), \quad g_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad (2.22)$$

Пусть система координатных линий  $x^3 = z$  в пластинке и оболочке совпадает с нормальными к их недеформированным срединным поверхностям. Векторы координатного базиса обозначим  $e_i$ . Модуль  $|e_3| = 1$ . Компоненты метрического тензора  $g_{i3} = 0$  ( $i \neq 3$ ),  $g_{33} = 1$ . Координаты ( $i = 1, 2, 3$ ) арифметизируют пространства внутри оболочки и пластинки.

Пусть толщина  $2h$  оболочки будет равна толщине пластинки. Мы будем для упрощения предполагать, что  $h$  постоянно, хотя указанный ниже метод без затруднений распространяется на оболочки переменной толщины. Будем также предполагать, что упругие постоянные веществ оболочки и пластинки одинаковы. В дальнейшем мы пользуемся гипотезой Кирхгоффа — Лява о «прямых неизменяемых нормальных» к срединной поверхности.

Переходим к составлению интегродифференциальных уравнений равновесия оболочек. Обозначим  $v_{(\alpha)i}(N, M)$  — смещение точки  $N$  срединной плоскости пластинки в направлении координатной линии  $i$ , вызванное действием единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $M$  срединной плоскости и направленной вдоль координатной линии  $\alpha$ . Как известно,

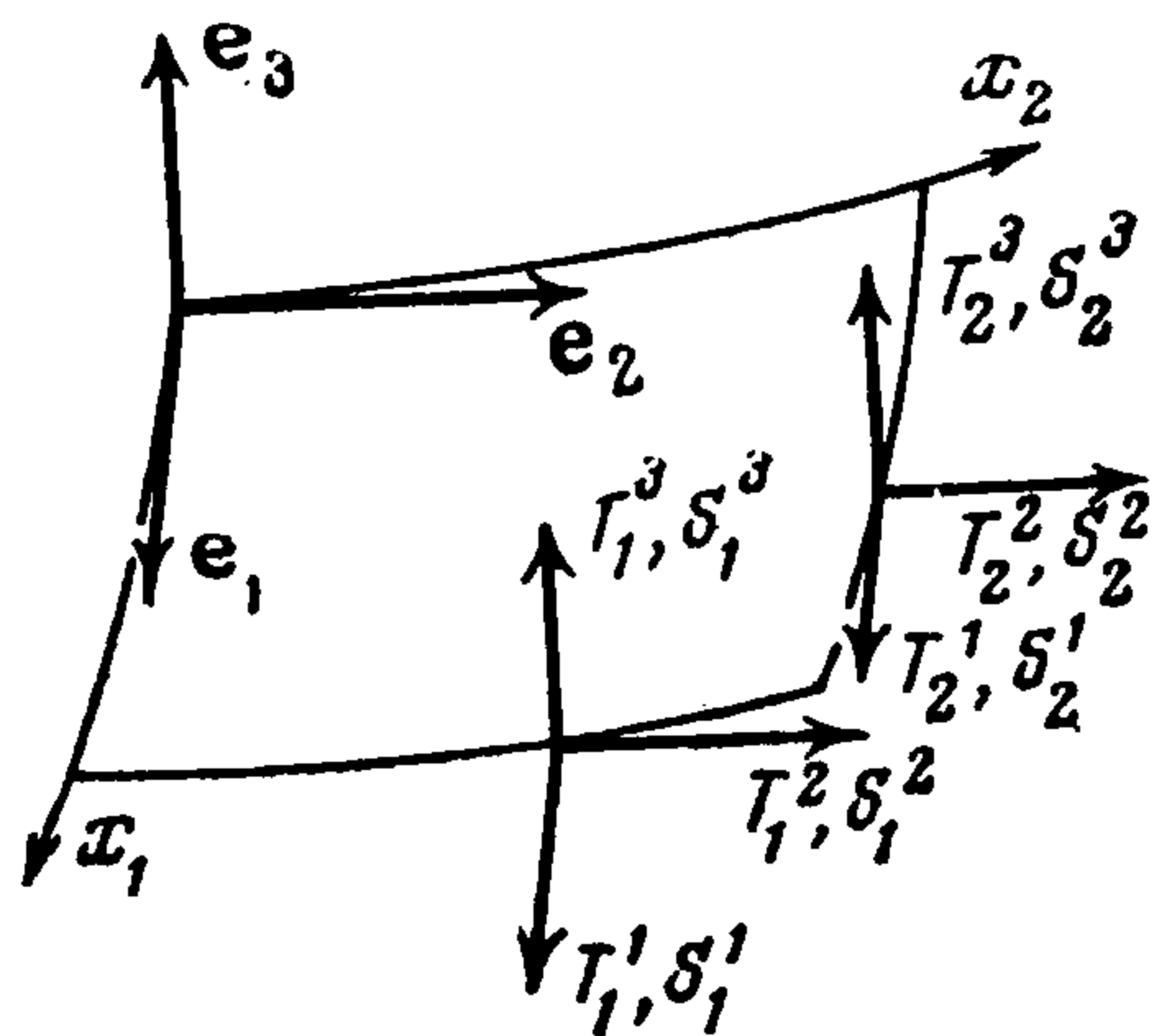
$$v_{(\alpha)i}(N, M) = v_{(i)\alpha}(M, N) \quad (2.3)$$

Будем рассматривать функции  $v_{(\alpha)i}(N, M)$  как ковариантные компоненты вектора смещения точек срединной поверхности оболочки. Система сил, вызывающая смещения  $v_{(\alpha)i}(N, M)$  в оболочке, состоит из неко-

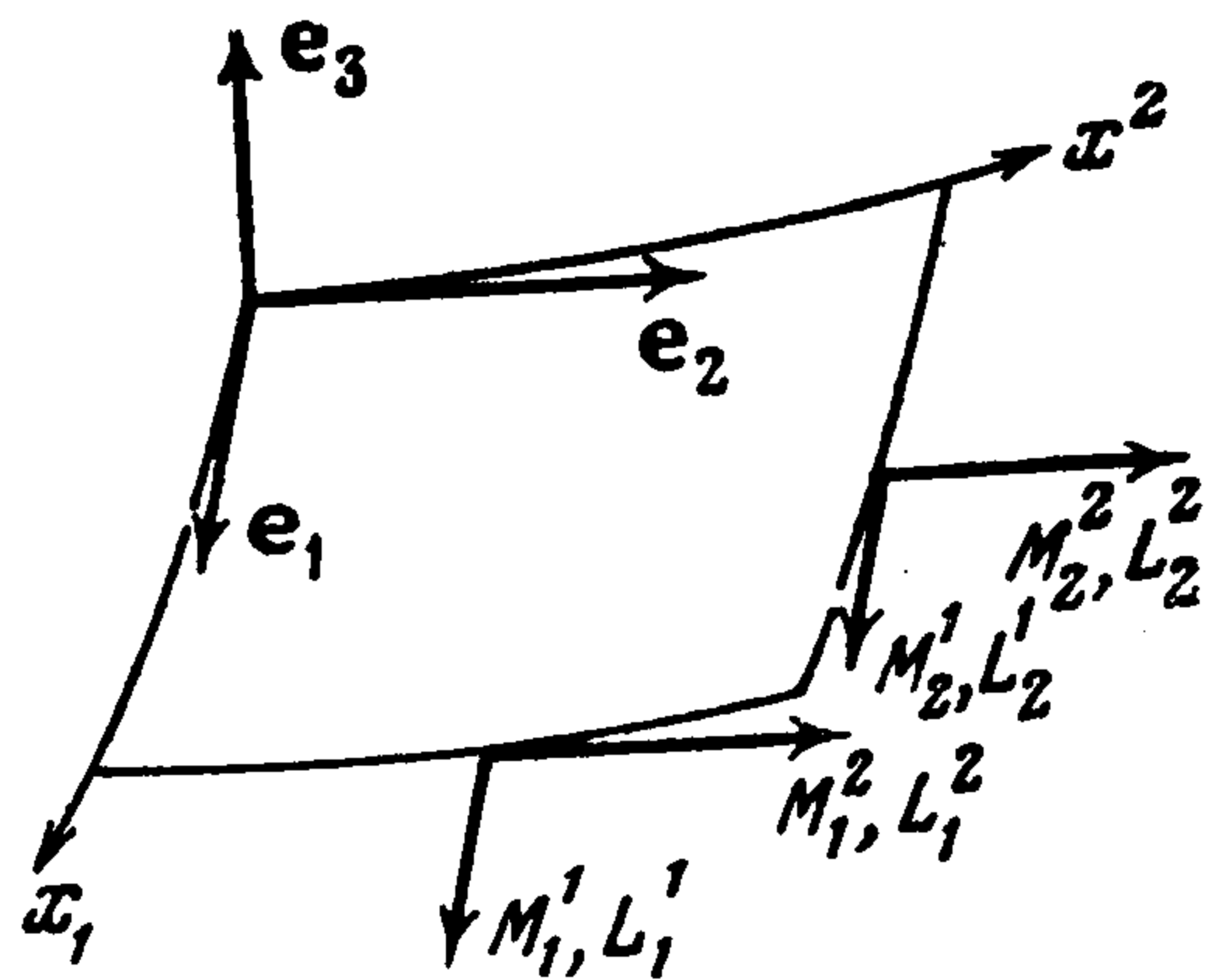
<sup>1</sup> Здесь и дальше мы пользуемся обозначением суммирования, известным из тензорного исчисления.

торой активной сосредоточенной силы, приложенной в точке  $M$ , распределенной по срединной поверхности оболочки активной нагрузки и реакций связей.

Сосредоточенную силу, соответствующую смещениям  $v_{(\alpha)i}(N, M)$  в оболочке, при  $\alpha = 1, 2$  определяем, применяя закон Гука, а при  $\alpha = 3$  определяем, пользуясь уравнениями равновесия оболочки в пере-



Фиг. 3



Фиг. 4

мещениях. Таким образом, можно прийти к следующему заключению: единичная сосредоточенная сила, приложенная к срединной плоскости пластинки, преобразуется в сосредоточенную силу, действующую на срединную поверхность оболочки. Вектор преобразованной силы приближенно определяется контравариантными компонентами<sup>1</sup>

$$Y_{(k)}^i = \begin{cases} F^{-2} (G_{ii})^{-1/2} & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \quad g_{33} = G_{33} = 1 \quad (2.4)$$

Перемещения  $v_{(\alpha)i}$  в оболочке вызываются найденными нами сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой, действующей на поверхности, ограничивающие оболочку. Нагрузка, действующая на поверхности оболочки на основании гипотезы о недеформируемых нормалях к срединной поверхности, может быть заменена статически эквивалентной системой сил и моментов, действующих на срединную поверхность оболочки. Обозначим  $K_{(\alpha)}^j$  и  $H_{(\alpha)}^j$  контравариантные компоненты интенсивностей активной силовой и моментной нагрузок, соответствующих смещениям  $v_{(\alpha)i}$ , приведенных к срединной поверхности оболочки. Обозначим далее  $S_{(\alpha)k}^j$  и  $L_{(\alpha)k}^j$  контравариантные компоненты усилий и моментов, действующих на контур элемента срединной поверхности оболочки. Направление этих усилий и моментов и смысл применяемых обозначений видны из фиг. 3 и 4.

Индекс в скобках, не указанный на фиг. 3 и 4, как и всюду, характеризует направление активной сосредоточенной силы, порождающей вспомогательное перемещение. Если контур срединной поверхности не ограничен координатными линиями, усилия и моменты, приложенные к контуру, будем обозначать  $S_{(\alpha)}^j$  и  $L_{(\alpha)}^j$ .

<sup>1</sup> Точное выражение компонент преобразованной силы содержит сверх указанных в (2.4) члены порядка  $h^2 k_i^2$ , где  $k_i$  — главная кривизна оболочки. Этими членами, как известно, можно пренебречь по сравнению с единицей [1].

Нагрузка, соответствующая перемещениям  $v_{(\alpha)i}$ , определяется двумя способами.

1. Если  $\alpha = 1, 2$ , нагрузка определяется посредством закона Гука, позволяющего найти напряжения на граничных поверхностях оболочки, а затем привести их к срединной поверхности. Таким образом, можно избежать появления несобственных расходящихся интегралов в интегрированных дифференциальных уравнениях равновесия оболочек [4с]. Значительные упрощения здесь вносит гипотеза Кирхгоффа — Лява [8].

2. При  $\alpha = 3$  применяется эластостатическая система уравнений теории оболочек [4а—4с], заменяющая уравнение (1.3). Систему перемещений  $v_{(\alpha)i}(N, M)$  и соответствующую им нагрузку срединной поверхности будем при применении теоремы о взаимности работ рассматривать как систему вспомогательных перемещений и сил.

Обозначим  $u_{(i)\alpha}(M, N)$  ковариантную компоненту вектора смещения точки  $M$  срединной поверхности оболочки, вызванного действием активной единичной силы, приложенной в точке  $N$  и направленной вдоль координатной линии  $i$ . Контравариантные компоненты этой единичной силы выражаются равенствами

$$X_{(i)}^k = \begin{cases} F^{-1} (G_{ii})^{-1/2} & (k = i = 1, 2), \\ 0 & (k \neq i), \end{cases} \quad X_{(3)}^k = \begin{cases} 1 & (k = 3) \\ 0 & (k \neq 3) \end{cases} \quad (2.5)$$

Усилия и моменты, соответствующие смещениям  $u_{(i)\alpha}$ , действующие на контур элемента срединной поверхности, обозначим  $T_{(i)j}^k$  и  $M_{(i)j}^k$ . Взаимное расположение векторов этих усилий и моментов и смысл обозначений видны из фиг. 3 и 4. Индекс в скобках, не указанный на фиг. 3 и 4, всюду характеризует направление сосредоточенной силы, порождающей основные перемещения. Аналогично сказанному выше усилия и моменты, действующие на части контура срединной поверхности оболочки, не совпадающие с координатными линиями, будем обозначать  $T_{(i)}^k$  и  $M_{(i)}^k$ . Усилия и моменты, приложенные к контуру срединной поверхности, являются реакциями опор оболочки. Систему перемещений  $u_{(i)\alpha}$  и соответствующих этим перемещениям сил будем при применении теоремы о взаимности работ рассматривать как основную систему. Принимая во внимание все сказанное и применяя теорему о взаимности работ к основной и вспомогательной системам перемещений и сил, получим

$$\begin{aligned} u_{(i)\alpha}(M, N) = & F^2(M) \sqrt{G_{\alpha\alpha}(M)} X_{(i)}^k(N) v_{(\alpha)k}(N, M) - \\ & - \iint_{(S)} F^2(M) + \sqrt{G_{\alpha\alpha}(M)} [K_{(\alpha)}^j(Q, M) u_{(i)j}(Q, N) + \\ & + H_{(\alpha)}^j(Q, M) \omega_{(i)j}(Q, N)] dS_Q + \\ & + \oint F^2(M) \sqrt{G_{\alpha\alpha}(M)} [T_{(i)}^j(Q, N) v_{(\alpha)j}(Q, M) + M_{(i)}^j(Q, N) \phi_{(\alpha)j}(Q, M) - \\ & - S_{(\alpha)}^j(Q, M) u_{(i)j}(Q, N) - L_{(\alpha)}^j(Q, M) \omega_{(i)j}(Q, N)] ds_Q \quad (2.6) \end{aligned}$$

где интеграл по площади распространяется на срединную поверхность оболочки, а интеграл по контуру — на контур ее срединной

поверхности. Здесь основные и вспомогательные изгибающие моменты, действующие на контур срединной поверхности, обозначены  $M_{(i)j}$  и  $L_{(\alpha)j}$  соответственно. Члены, зависящие от крутящих моментов, включены в состав основных  $T_{(i)j}$  и вспомогательных  $S_{(\alpha)j}$  усилий [5].

Углы поворота оснований нормалей к срединной поверхности, соответствующие основной и вспомогательной системам перемещений, обозначены  $\omega_{(i)j}$  и  $\psi_{(\alpha)j}$ .

Если принять, что координатные линии  $x^i$  на срединной поверхности совпадают с линиями кривизны, и воспользоваться гипотезой недеформируемых нормалей, найдем

$$\omega_{(i)1} = \frac{1}{2F^2} (\partial_2 u_{(i)3} - \partial_3 u_{(i)2}) = \frac{1}{F^2} (\partial_2 u_{(i)3} + k_2 u_{(i)2}) \quad (2.7.1)$$

$$\omega_{(i)2} = \frac{1}{2F^2} (\partial_3 u_{(i)1} - \partial_1 u_{(i)3}) = -\frac{1}{F^2} (\partial_1 u_{(i)3} + k_2 u_{(i)1}) \quad (2.7.2)$$

Здесь и далее введены обозначения  $\partial/\partial x^i = \partial_i$ ,  $k_i$  — главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Так как  $H_{(\alpha)}^3 \approx 0$ ,  $\omega_{(i)3}$  в равенство (2.6) не входит. Аналогично (2.7.1) — (2.7.2) определяются углы поворота  $\psi_{(\alpha)j}$ .

Уравнения (2.6) составляют систему интегро-дифференциальных уравнений равновесия линейной теории оболочек, позволяющую определить компоненты  $u_{(i)\alpha}$  тензора Грина (функции влияния). Эти уравнения аналогичны уравнению (1.5). Интегрированием по частям можно устранить из подынтегрального выражения в двойном интеграле производные от перемещений  $u_{(i)j}$ . Воспользовавшись произволом в выборе регулярной части вспомогательных смещений  $v_{(\alpha)i}$ , можно также упростить криволинейный интеграл, а в некоторых случаях его исключить [4a, c]. Такое преобразование уравнений (2.6) аналогично приведению уравнения (1.5) к виду (1.11). Функции влияния, определенные из уравнений (2.6), позволяют найти перемещения, вызванные произвольной силовой нагрузкой срединной поверхности оболочки.

Дальнейшее развитие указанного метода произведем на конкретном частном примере.

§ 3. Пример. Сферический купол. Уравнения, аналогичные (2.6), были применены к случаям, которым соответствует условие

$$F(M) \equiv 1 \quad (3.1)$$

Были рассмотрены уравнения равновесия цилиндрических [4-8] и пологих оболочек [9]. Для пологих оболочек условие (3.1) выполняется приближенно [1]. Как простейший пример рассмотрим уравнения равновесия сферического купола радиуса  $R$ . Этот пример случая  $F(M) \neq 1$  позволит также выяснить некоторые общие особенности метода.

Пусть начало декартовой системы координат находится в одном из полюсов сферы, ось  $Oz$  совпадает с диаметром сферы. Рассмотрим плоскость  $Q$ , касательную к поверхности сферы в точке  $N(0, 0, 2R)$ . Стереографическая проекция поверхности сферы на эту плоскость может быть задана параметрически введением сферических координат  $(\theta, \varphi)$  на поверхности сферы:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R + R \cos \theta = 2R \cos^2 \frac{1}{2} \theta \quad (3.2)$$

$$x^* = 2R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \cos \varphi, \quad y^* = 2R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \sin \varphi, \quad z^* = 2R \quad (3.3)$$

Здесь  $M(x, y, z)$  — точка на поверхности сферы,  $M^*(x^*, y^*, z^*)$  — стереографическая проекция точки  $M$  на плоскость  $Q$ . Из равенств (3.2) — (3.3) видно, что часть сферы  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  отображается на круг радиуса  $2R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0$  в плоскости  $Q$ . Вспомогательной системой перемещений будут перемещения круглой пластинки. Для линейных элементов  $ds$  и  $ds_0$  на поверхности сферы и на ее стереографической проекции имеем

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad ds_0^2 = \frac{R^2}{\cos^4 \frac{1}{2} \theta} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.4)$$

Отсюда следует

$$ds^2 = \cos^4 \frac{1}{2} \theta ds_0^2 \quad (3.5)$$

Таким образом,  $x^*$  и  $y^*$  являются изотермическими координатами. Мы не будем пользоваться координатами  $x^*$  и  $y^*$ , а сохраним координаты  $x^1 = \theta$  и  $x^2 = \varphi$ . Из (2.2.1) и (3.5) найдем

$$F(M) = \cos^2 \frac{1}{2} \theta, \quad G_{11} = G_{\theta\theta} = R^2 \left( \cos \frac{1}{2} \theta \right)^{-4}, \quad G_{22} = G_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta \left( \cos \frac{1}{2} \theta \right)^{-4} \quad (3.6)$$

Чтобы построить систему вспомогательных перемещений  $v_{(\alpha)j}$ , воспользуемся известными решениями задачи о равновесии круглой пластинки, находящейся под действием сосредоточенной силы [5,6]. Эти решения удовлетворяют условиям

$$v_{(\alpha)3}(P, M) = v_{(3)\alpha}(P, M) = 0 \quad (\alpha=1,2) \quad (3.7.1)$$

Здесь  $P$  — произвольная точка на срединной поверхности пластинки. На круговом контуре  $C$  срединной поверхности пластинки выполняются условия [5]

$$v_{(3)3}(Q, M) = 0, \quad \frac{\partial v_{(3)3}(Q, M)}{\partial n} = 0 \quad (3.7.2)$$

Здесь  $Q$  — точка на контуре пластинки,  $n$  — нормаль к контуру  $C$ .

Воспользуемся указаниями в § 2 об определении нагрузки срединной поверхности оболочки, соответствующей смещениям  $v_{(\alpha)j}$ . Чтобы упростить уравнения (2.6) при  $\alpha = 1, 2$ , воспользуемся тем вариантом гипотезы Кирхгоффа — Лява, согласно которому призматический элемент оболочки с образующими, нормальными к срединной поверхности, находится в плоском напряженном состоянии [1] <sup>1</sup>. Тогда

$$K_{(\alpha)}^j = 0, \quad H_{(\alpha)}^j = 0 \quad (\alpha = 1, 2; j=1,2,3) \quad (3.8)$$

Ядра  $K_{(3)}^j$  найдем из эластостатической системы уравнений теории оболочек аналогично ядру уравнения (1.5). Ядра  $H_{(3)}^j$  положим равными нулю, воспользовавшись гипотезой Кирхгоффа — Лява. Примем, что сферический купол опирается на круг широты  $\theta = \theta_0$  и что край купола жестко заделан, так что выполняются условия

$$u_{(i)\alpha}(Q, N) = 0, \quad \omega_{(i)2}(Q, N) = 0 \quad (i, \alpha = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Точки  $M(\theta, \varphi)$ ,  $N(\theta_1, \varphi_1)$  и  $P(\theta', \varphi')$  лежат на срединной поверхности оболочки. Точка  $Q(\theta_0', \varphi_0')$  лежит на контуре срединной поверхности. Уравнения (1.6) преобразуются следующий вид:

$$u_{(i)\alpha}(M, N) = R \sin^{\alpha-1} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta \left\{ v_{(\alpha)[i]}(N, M) + R \sin \theta_0 \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} [T_{(i)}^j(Q, N) v_{(\alpha)j}(Q, M) + M_{(i)}^j(Q, N) \psi_{(\alpha)j}(Q, M)] d\varphi' \right\} \quad (3.10.1)$$

<sup>1</sup> Ранее применялся иной вариант гипотезы Кирхгоффа — Лява [8,9]. Применяя гипотезу Кирхгоффа — Лява, мы пользуемся произволом в распределении вспомогательных смещений по толщине оболочки [4a] и строим систему смещений  $v_{(\alpha)j}$ , точно удовлетворяющую условиям гипотезы. В выражении компонент преобразованной сосредоточенной силы при этом членами порядка  $h^2 k_i^2$  пренебрегаем.

$$u_{(i)3}(M, N) = \cos^4 \frac{1}{2} \theta \left\{ v_{(3)i}(M, N) - \iint_{(S)} K_{(3)}^j(P, M) u_{(i)j}(P, N) dS_p \right\} \quad (3.10.2)$$

$$(i, j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2)$$

Здесь  $v_{(\alpha)[i]}$  — проекция смещения  $v_{(\alpha)}$  на направление координатной линии  $i$ . Уравнения (3.10.1) — (3.10.2) составляют систему интегродифференциальных уравнений равновесия сферического купола. Эта система аналогична уравнению (1.5). Решение системы (3.10.1) — (3.10.2) можно привести к решению одного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Для этого достаточно воспользоваться произволом в выборе регулярной части перемещений  $v_{(\alpha)j}$ . Заметив, что функции  $v_{(\alpha)j}(Q, M)$  регулярны для всех значений  $\varphi'$ , введем в уравнения (3.10.1) вместо перемещений  $v_{(\alpha)j}$  перемещения

$$V_{(\alpha)j}(P, M) = v_{(\alpha)j}(P, M) - v_{(\alpha)j}(Q, M) \quad (\alpha=1, 2) \quad (3.11)$$

Тогда из (3.10.1) найдем

$$u_{(i)\alpha}(M, N) = R \sin^{\alpha-1} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta V_{(\alpha)[i]}(N, M) \quad (3.12)$$

Непосредственно видно, что функции (3.12) удовлетворяют краевым условиям (3.9). На основании равенств (3.12) уравнение (3.10.2) приобретает вид:

$$u_{(i)3}(M, N) = \Phi_{(i)3}(M, N) - \iint_{(S)} K_{(3)}^3(P, M) u_{(i)3}(P, M) dS_p \quad (3.13)$$

Здесь  $\Phi_{(i)3}$  — известная функция. Решение задачи о равновесии сферического купола сведено к решению интегрального уравнения (3.12). Это решение может быть найдено известными методами и здесь рассмотрено не будет.

**§ 4. Вопросы эквивалентности и единственности.** Применимость теоремы о взаимности работ в теории оболочек и ее непротиворечивость гипотезе Кирхгоффа — Лява строго доказаны [2]. Поэтому точность полученных выше результатов лежит в общих пределах точности теории равновесия тонких оболочек. В этом смысле уравнения (2.6) и следствия из них эквивалентны дифференциальным уравнениям равновесия оболочек, основанным на гипотезе Кирхгоффа—Лява.

Интегродифференциальные уравнения (2.6) не имеют единственного решения. Интегральные уравнения, вытекающие из уравнений (2.6), например уравнение (3.13), могут иметь единственное решение, которое и будет в этом случае искомым. Однако, как уже было отмечено в § 1, интегральные уравнения равновесия, вытекающие из интегродифференциальных, могут и не иметь единственного решения в соответствии с третьей теоремой Фредгольма. Поэтому интегральные уравнения, полученные указанным методом, следует подвергать дополнительному исследованию или применять метод решения, заведомо обеспечивающий удовлетворение краевых условий.

В заключение заметим, что рассмотренный метод позволяет развить эффективные численные приемы решения краевых задач теории оболочек.

Поступила 10 VI 1958

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек, Гостехиздат, 1948.
2. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. К а г а н В. Ф. Основы теории поверхностей, ч. 1. Гостехиздат, 1947.
4. К и л ь ч е в с к и й Н. А. (Кильчевський М. О.), а) Основні рівняння теорії оболонок і деякі методи їх інтегрування. Збірник праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 4, 5, 6, 1940; б) Некоторые методы интегрирования уравнений равновесия упругих оболочек. ПММ, т. IV, вып. 2, 1940; в) Наближені методи визначення переміщень в циліндричних оболонках. Збірник праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 8, 1946.
5. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
6. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. АН СССР, 1949.
7. П р и в а л о в И. И. Интегральные уравнения. ОНТИ, 1937.
8. Р е м и з о в а Н. И. Визначення переміщень в циліндричних оболонках методом інтегральних рівнянь, Допов. АН УРСР, № 3, 1958.
9. Ф р а д л и н Б. Н., Ш а х н о в с к и й С. М. Про складання інтегро-дифференціальних рівнянь рівноваги пологих оболонок. Допов. АН УРСР, № 4, 1958.