Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЙ ВДОЛЬ КРАЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

Д. И. Шерман

(Москва)

§ 1. Предположим, что срединная поверхность изгибаемой пластинки заполняет в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ конечную многосвязную область S, ограниченную совокупностью достаточно гладких и не имеющих общих точек замкнутых кривых $L_j\ (j = 1, \ldots, m + 1)$; из них пусть L_{m+1} — внешний контур, охватывающий внутренние границы $L_j\ (j = 1, \ldots, m)$. Назовем L полный контур области S, образованный кривыми $L_j\ (j = 1, \ldots, m + 1)$; обход его условимся вести в положительном направлении относительно S. Далее обозначим через S_j (конечную при $j \neq m + 1$ и бесконечную при $j = m + 1$) односвязную область, ограниченную L_j $(j = 1, \ldots, m + 1)$. Наименование S_0 придадим конечной и односвязной области, ограниченной наружным контуром L_{m+1}. Пусть затем z_j — произвольно фиксированная точка, лежащая в области $S_j\ (j = 1, \ldots, m)$, и a_j — аффикс некоторой точки кривой $L_j\ (j = 1, \ldots, m+1)$, выбранной на ней за начало отсчета дуг. Для удобства за начало координат возьмем точку, принадлежащую S.

Искомый прогиб $w_1(x, y)$ срединной поверхности пластинки может быть записан в форме

$$w_1(x, y) = w(x, y) + w_0(x, y) \tag{1.1}$$

где $w_0(x, y)$ — какое-либо частное решение дифференциального уравнения прогиба, отвечающее действующей на пластинку нормальной нагрузке, распределенной по некоторому закону; новая неизвестная $w(x, y)$ является бигармонической функцией, представимой согласно формуле Гурса в виде

$$2\,w(x, y) = \bar{z}\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1(z)} + \chi_1(z) + \overline{\chi_1(z)}, \quad \psi_1(z) = \chi_1'(z) \tag{1.2}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — некоторые аналитические и, вообще говоря, неоднозначные функции в (многосвязной) области S. В интересующем нас случае опертого края пластинки будем иметь для определения функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ следующие предельные равенства на контуре L:

$$\operatorname{Re} \dot{t}\,[\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t)] = f_1(s) \tag{1.3}$$

$$\operatorname{Re}\{(1+\lambda_0)\,\varphi_1'(t) + \overline{\varphi_1'(t)} + \ddot{t}\,[\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t)]\} = f_2(s) \tag{1.4}$$

где под переменной t понимается комплексная координата текущей точки L и проставленная рядом с ней точка означает дифференцирование по дуге s, далее λ_0 — постоянная, известным образом зависящая от коэффициента Пуассона, и, наконец, $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — некие заданные функции; их свойства определяются характером нагрузки, изгибающей пластинку; будем считать, что они непрерывны на L.

Примечание 1. З. И. Халилов [1] привел задачу об изгибе опертой пластинки к интегральному уравнению Фредгольма в случае, когда срединная поверхность заполняет односвязную конечную область, ограниченную контуром с нигде не обращающейся в нуль кривизной. Для более общего случая многосвязной области и без упомянутого ограничения на кривизну ее границы, но в несколько видоизмененной, отличной от общепринятой постановке, задача об опертой пластинке, также сведением к уравнению Фредгольма, была рассмотрена иным методом М. М. Фридманом [2].

А. И. Каландия [3], изучая ту же задачу для многосвязной области и в обычной постановке, свел ее к сингулярному интегральному уравнению и установил его разрешимость, опираясь на разработанные в сравнительно недавнее время методы исследования таких уравнений [4].

Приведенные в двух первых статьях интегральные уравнения Фредгольма довольно сложны по своей структуре; ядра их даются в форме некоторых квадратур, как правило, не выражаемых через элементарные функции, что, естественно, препятствует более или менее широкому использованию уравнений в вопросах приложений. Уравнение Фредгольма, которое мы здесь имеем в виду предложить для названной задачи, свободно от указанного недостатка. Ядра его непосредственно выражаются через элементарные функции; кроме того, присущие этому уравнению прочие положительные качества в свою очередь облегчают его практическое использование. Располагая средствами современной вычислительной техники, не столь уже затруднительно на основе предлагаемого уравнения (и во всяком случае намного проще, нежели в иных случаях) провести качественную и количественную интерпретацию явления. При помощи этого же уравнения некоторые важные конкретные задачи могут быть изучены сведением к квазирегулярной бесконечной системе линейных уравнений. Как нам кажется, именно под углом зрения сказанного следует рассматривать настоящую работу. Отметим, что решение для конечной и односвязной области, выдержанное примерно в подобном же стиле, было дано в статье [5].

Вместо $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, содержащихся в (1.3) и (1.4), введем функции $\varphi(z) = i\varphi_1(z)$, $\psi(z) = i\psi_1(z)$ и положим [1]

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{m+1} \varphi_j(z), \qquad \psi(z) = \sum_{j=1}^{m=1} \psi_j(z) \tag{1.5}$$

где $\varphi_{m+1}(z)$ и $\psi_{m+1}(z)$ — однозначны и регулярны в области S_0; любые две $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ из остальных функций являются аналитическими вне L_k $(k = 1, \ldots, m)$. Прибавим к левой части краевого условия (1.3) оператор

$$\Gamma(\varphi, \psi; t) = \{(2S_0)^{-1} \operatorname{Re} it\bar{t}' \operatorname{Re} \varphi'_{m+1}(0),\ (w + w_0)_{t=a_{m+1}} - (w + w_0)_{t=a_j}\} \tag{1.6}$$

принимающий первое либо второе из проставленных в фигурных скобках значений, смотря по тому, лежит точка t на внешнем контуре L_{m+1} либо на одной из внутренних границ [2] L_j $(j \neq m+1)$; как видно из запи-

---

[1] Наличие справа в (1.5) в числе прочих функций с нижним единичным указателем не может ввести в заблуждение читателя в связи с таковым же обозначением, первоначально принятым для искомых функций в (1.2).

[2] При желании, если это будет сочтено более целесообразным, можно $(w + w_0)_{t=a_k}$ в (1.6) заменить интегралом, взятым от величины $(w + w_0)$ по дуге кривой L_k $(k = 1, \ldots, m+1)$.

си, на внутренней границе L_j оператору придается значение, равное разности величин $w(x, y)$ в точках $z = a_{m+1}$ и $z = a_j$. Оба краевых условия (1.3) и (1.4) объединим в одно предельное комплексное равенство

$$\lambda [\varphi'(t) - \overline{\varphi'(t)}] + \overline{t^{\cdot}\theta_1(t)}\, \gamma(t) - t^{\cdot}\theta_2(t)\, \overline{\gamma(t)} + \Gamma(\varphi, \psi; t) = f(t) \tag{1.7}$$

где введены обозначения

$$\gamma(t) = \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}, \qquad \theta_1(t) = i + \bar{t}^{\cdot} t^{\cdot\cdot}, \qquad \theta_2(t) = -i + \bar{t}^{\cdot} t^{\cdot\cdot}$$

$$\lambda = 2 + \lambda_0 \qquad f(t) = 2(f_1 + if_2) \tag{1.8}$$

Читатель убедится из последующего, что принятая модификация предельных условий (1.3) и (1.4) отнюдь не влечет за собой видоизменение постановки задачи, как можно было бы думать на первый взгляд; при этом не только остаются незыблемыми упомянутые условия в своей первоначальной форме, но и существенно упрощается процесс решения в целом.

§ 2. Для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ примем следующее представление (его правомерность будет установлена ниже в результате проведенного исследования):

$$\varphi(z) = \varphi^{(0)}(z) + \sum_{j=1}^{m} iA_j (z - z_j) \ln (z - z_j)$$

$$A_j = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \{\omega(t)\, \theta_1(t) + \overline{\omega(t)}\, \theta_2(t)\} \frac{dt}{t - z_j} \tag{2.1}$$

$$\psi(z) = \psi^{(0)}(z) - \sum_{j=1}^{m} \left\{ (iA_j\bar{z}_j + 2\bar{B}_j) \left[\ln (z - z_j) + \frac{z_j}{z - z_j} \right] + (1 + i) \frac{D_j}{z - z_j} \right\} \tag{2.2}$$

где аналитические в области S функции $\varphi^{(0)}(z)$ и $\psi^{(0)}(z)$ задаются формулами

$$\varphi^{(0)}(z) = \int_L \{\omega(t)\, \theta_1(t) + \overline{\omega(t)}\, \theta_2(t)\}\, G(t, z)\, dt \tag{2.3}$$

$$\psi^{(0)}(z) = \int_L \{\omega(t)\, H(t, z) + \overline{\omega(t)}\, T(t, z)\}\, dt \tag{2.4}$$

Здесь $\omega(t)$ — плотность, подлежащая отысканию, и входящие под знаком интегралов функции таковы

$$G(t, z) = \left\{ \frac{1}{4\pi\lambda} \left[-1 + \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) \right], \qquad \frac{1}{4\pi\lambda} \ln (z - t) \right\} \tag{2.5}$$

$$H(t, z) = \left\{ \overline{t^{\cdot 2}\theta_2(t)} \left[G(t, z) + \frac{1}{4\pi\lambda}\varepsilon_j \right] + P(t) \left(\frac{1}{t - z} - \varepsilon_j \frac{1}{t} \right) \right\}$$

$$T(t, z) = \left\{ \overline{t^{\cdot 2}\theta_1(t)} \left[G(t, z) + \frac{1}{4\pi\lambda}\varepsilon_j \right] + Q(t) \left(\frac{1}{t - z} - \varepsilon_j \frac{1}{t} \right) \right\} \tag{2.6}$$

$$P(t) = \frac{1}{4\pi\lambda} (\lambda\bar{t}^{\cdot} - \overline{t\theta_1(t)}), \qquad Q(t) = \frac{1}{4\pi\lambda} (\lambda\bar{t}^{\cdot} - \overline{t\theta_2(t)})$$

причем $\varepsilon_j = 0\, (j \neq m + 1)$ и $\varepsilon_{m+1} = 1$. Функция $G(t, z)$, подобно тому, как в (1.6), равна первому из значащихся в скобках (2.5) выражений, если t изменяется на L_{m+1}, и второму из них, если t изменяется на остальных $L_j\,(j=1,\ldots,m)$. Заключающиеся в формулах величины A_j, B_j и D_j — некоторые зависящие от $\omega(t)$ функционалы; первый, выписанный в (2.1), и третий из них вещественные; для функционалов B_j и D_j имеем

$$B_j=\frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{L_j}\{\omega(t)\,\theta_1(t)+\overline{\omega(t)}\,\theta_2(t)\}\,dt,\qquad D_j=\operatorname{Re}\int\limits_{L_j}\varepsilon[\omega(t),t]\,ds \tag{2.7}$$

при вновь введенном обозначении

$$\varepsilon[\omega(t),t]=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\lambda}[\bar{t}t'\overline{\theta_1(t)}-t\bar{t}'\overline{\theta_2(t)}]-1\right\}\omega(t) \tag{2.8}$$

Проведем в области S разрезы, соединяющие точку a_j внутренней границы L_j с какой-либо точкой наружной границы L_{m+1} и не проходящие через начало координат. При этом в (2.5) берется ветвь $\ln(1-z/t)$, обращающаяся в нуль при $z=0$; ветвь же $\ln(z-t)$ [для переменной t, принадлежащей $L_j\,(j=1,\ldots,m)$], определяется посредством фиксации аргумента $\ln(z-a_j)$ для аффикса z, находящегося на каком-либо берегу разреза, соединяющего a_j с кривой L_{m+1}.

Функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ можно в силу (2.5) и (2.6) придать несколько иной вид, используемый в дальнейшем:

$$\varphi(z)=\varphi^*(z)+\sum_{j=1}^{m}[iA_j(z-z_j)+B_j]\ln(z-z_j) \tag{2.9}$$

$$\psi(z)=\psi^*(z)-\sum_{j=1}^{m}\left\{(iA_j\bar{z}_j+\bar{B}_j)\left[\ln(z-z_j)+\frac{z_j}{z-z_j}\right]+i\,\frac{D_j}{z-z_j}\right. \tag{2.10}$$

В этих равенствах $\varphi^*(z)$ — функция, регулярная в области S; она определяется интегралом (2.3), в котором $G(t,z)$ следует заменить функцией $G^*(t,z)$, принимающей для аффикса t, изменяющегося вдоль L_{m+1}, значение, одинаковое с $G(t,z)$, и для t, принадлежащего $L_j\,(j=1,\ldots,m)$, значение, равное

$$G^*(t,z)=\frac{1}{4\pi\lambda}\ln\frac{z-t}{z-z_j}$$

Функция же $\psi^*(z)$ и интеграл от нее также являются регулярными в области S. При этом сама функция $\psi^*(z)$ может быть выражена при помощи того же равенства (2.4), если в нем вместо $H(t,z)$ и $T(t,z)$ соответственно ввести $H^*(t,z)$ и $T^*(t,z)$. Для последних можно в свою очередь принять формулы (2.6), положив в них $G(t,z)+(4\pi\lambda)^{-1}\varepsilon_j$ и двучлен $(t-z)^{-1}-\varepsilon_j t^{-1}$, стоящий в качестве множителя при функциях $P(t)$ и $Q(t)$, последовательно равными $W^*(t,z)$ и $\sigma^*(t,z)$ согласно формулам

$$\begin{aligned}W^*(t,z)&=\left\{G(t,z)+\frac{1}{4\pi\lambda};\ \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\ln\frac{z-t}{z-z_j}+\frac{t-z_j}{z-z_j}\right)\right\}\\ \sigma^*(t,z)&=\left\{\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t};\ \frac{1}{t-z}+\frac{1}{z-z_j}\right\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ясно, что функции $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ из (1.5) определяются той частью каждого из равенств (2.1) и (2.2) либо (2.9) и (2.10), которая содержит интегралы, распространенные по контуру L_k, и примыкающие к ним слагаемые из суммы с добавочными операторами для индекса $j=k$. Как видно из построения (2.5) и (2.6), необходимо выполняется соотношение

$$\psi_{m+1}(0)=0 \tag{2.12}$$

Подобно тому как в (1.5), целесообразно ввести еще функции $\varphi_k^{(0)}(z)$, $\psi_k^{(0)}(z)$ и $\varphi_k^*(z)$, $\psi_k^*(z)$ $(k=1,\ldots, m+1)$; каждая из них выражается надлежащим из интегралов (2.3), (2.4) и им аналогичных, взятых по кривой L_k. Нетрудно убедиться, что функция $\psi_k^*(z)$ имеет на бесконечности порядок $O[(z-z_k)^{-2}]$.

Назовем $\chi(z)$ и $\chi^*(z)$ распространенные по переменной z интегралы от функций $\psi(z)$ и $\psi^*(z)$, взятые по любому пути, соединяющему начало координат с точкой z, не пересекающему разрезы и не выходящему за пределы области S. Введя дополнительно к предыдущим обозначения

$$R^*(t,\ z)=\int_0^z W^*(t,\ z)\,dz, \qquad \Delta^*(t,\ z)=\int_0^z \sigma^*(t,\ z)\,dz$$

и проделав простые выкладки, будем иметь

$$R^*(t,\ z)=\left\{-\frac{1}{4\pi\lambda}\left[z+(t-z)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right],\ \frac{1}{4\pi\lambda}\left[(z-t)\ln\frac{z-t}{z-z_j}+t\ln\frac{t}{z_j}\right]\right\}$$

$$\Delta^*(t,\ z)=\left\{-\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+\frac{z}{t}\right],\ -\left[\ln\frac{z-t}{z-z_j}-\ln\frac{t}{z_j}\right]\right\} \tag{2.13}$$

Сказанное выше относительно выбора ветвей встречающихся логарифмических функций обязывает считать правые части в двух последних равенствах исчезающими при $z=0$. Функция $\chi^*(z)$ образуется по формуле, подобной определяющей $\psi^*(z)$, если вместо W^* и σ^* внести в нее R^* и Δ^*. Кроме того, нетрудно обнаружить, что

$$\chi(z)=\chi^*(z)-\sum_{j=1}^{m}\Omega_j[\omega(t);\ z,\ z_j] \tag{2.14}$$

причем заключающийся под знаком добавочной суммы оператор

$$\Omega_j=(iA_j\bar{z}_j+\bar{B}_j)\,z\,[\ln(z-z_j)-1]+iD_j[\ln(z-z_j)-\ln(-z_j)] \tag{2.15}$$

Принимая во внимание (1.2), (2.1), (2.2) и связанные с двумя последними остальные равенства, получим для $w(x,\ y)$ формулу

$$2w(x,\ y)=2w^*(x,y)-\sum_{j=1}^{m}\delta_j^*(x,\ y;\ z_j) \tag{2.16}$$

В ней $w^*(x,\ y)$ — бигармоническая функция, равная

$$2w^*(x,y)=-i\,\{\bar{z}\varphi^*(z)-z\overline{\varphi^*(z)}+\chi^*(z)-\overline{\chi^*(z)}\} \tag{2.17}$$

и значение вещественного оператора $\delta_j^*(x,\ y;\ z_j)$ дается соотношением

$$\delta_j^*=A_j\delta_{1j}^*(x,y;z_j)+[B_j\delta_{2j}^*(x,y;z_j)+\bar{B}_j\overline{\delta_{2j}^*(x,y;z_j)}]+D_j\delta_{3j}^*(x,y;z_j) \tag{2.18}$$

в котором в свою очередь величины

$$\begin{gathered}\delta_{1j}^*=-\{[|z-z_j|^2-|z_j|^2]\ln|z-z_j|^2+(z_j\bar{z}+\bar{z}_jz)\}\\ \delta_{2j}^*=i\bar{z}\,[\ln|z-z_j|^2-1],\qquad \delta_{3j}^*=\ln|z-z_j|^2-\ln|z_j|^2\end{gathered} \tag{2.19}$$

Интегральные равенства (2.3), (2.4), (2.9) и (2.10) и характер заключающихся в них функций позволяют представить каждую из величин $w(x, y)$ и $w^*(x, y)$ в одинаковой форме:

$$[w(x, y);\ w^*(x, y)] = \int\limits_L \{\omega(t)[Z(s;\ x, y);\ Z^*(s;\ x, y)] + \\ + \overline{\omega(t)}\,[\overline{Z(s;\ x, y)};\ \overline{Z^*(s; x, y)}]\}ds$$

где $Z(s;\ x, y)$ и $Z^*(s;\ x, y)$ (их нетрудно выписать) являются непрерывными функциями своих переменных. Отметим, что $w(x, y)$ и $w^*(x, y)$ составляются из слагаемых $w_j(x, y)$ и $w_j^*(x, y)$, определяемых подобно тому, как, например, $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$, входящие в (1.5).

На основании принятых в качестве исходных выражений для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ оператор (1.6) оказывается зависящим от той же плотности $\omega(t)$, что можно выразить записью $\Gamma[\omega(t), t_0]$, которой будем придерживаться в дальнейшем.

Примечание 1. Легко сообразить, что оператор $D_k / z - z_k$ присоединен ко второму слагаемому в правой части (2.2) для того, чтобы устранить многозначный член, появляющийся в ином случае в выражении для $w(x, y)$; это сразу усматривается из формулы (2.10). В то же время на первый взгляд, по-видимому, не вполне ясны причины, побудившие автора придать (2.2), помимо имеющихся, еще оператор $iD_k / z - z_k$, вносящий однозначное слагаемое в (2.15). Дело в том, что при отсутствии этого оператора нетрудно во многих случаях нарочито (и, пожалуй, в противовес надобности) добиться, чтобы разложение $\psi_k(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки не содержало слагаемого с первой отрицательной степенью двучлена $z - z_k$. Действительно, не исключено и даже весьма вероятно, что, фиксируя каким-либо образом значение плотности $\omega(t)$, можно найти такую точку z_k, расположенную внутри L_k, чтобы обратился в нуль коэффициент при первой отрицательной степени упомянутого двучлена в дополнительном слагаемом (2.10), отвечающем $j = k$. Наличие такого факта свидетельствовало бы, что изъятие оператора $iD_k / z - z_k$ из (2.2) налагает излишне суровое и ничем не оправданное ограничение на функцию $\psi_k(z)$, ведущее к потере принятым для нее выражением необходимой общности представления. Между тем привнесение в (2.2) названного оператора по крайней мере формально и, как увидим ниже, на самом деле устраняет этот дефект. Для читателя небезынтересны также соображения, позволяющие считать, что упомянутая недостаточность в представлении $\psi_k(z)$ может быть восполнена именно взятым оператором; на этом вопросе мы остановимся при исследовании приведенного ниже уравнения Фредгольма. Надо думать, что, помимо $iD_k / z - z_k$, существуют многие другие операторы, способные выполнить то же назначение и придающие нужную полноту выражению для $\psi_k(z)$. Выбранный нами оператор — сама его форма отчасти подсказывает характер приведших к нему логических предпосылок — является наиболее естественным и, как можно с уверенностью считать, одновременно простейшим из возможных.

Изложенные только что рассуждения носят преимущественно интуитивный характер и, разумеется, не обладают должной отчетливостью; однако они наводят на вполне правильную мысль, справедливость которой будет позже подкреплена вескими доводами, не вызывающими сомнения и имеющими прямое отношение к существу дела.

§ 3. В равенствах (2.1), (2.2) и продифференцированном первом из них перейдем к пределу, устремляя z к некоторой точке t_0 контура L. Найденные предельные значения $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ и $\psi(t_0)$ подставим в краевое условие (1.7). Тогда, проделав некоторые выкладки и выполнив ряд преобразований, получим для нахождения плотности $\omega(t)$ интегральное уравнение Фредгольма

$$\omega(t_0) + \int_L [\omega(t) M(t, t_0) + \overline{\omega(t)} N(t, t_0)]\, dt + O[\omega(t), t_0] = f(t_0) \quad (3.1)$$

где ядра $M(t, t_0)$ и $N(t, t_0)$ являются непрерывными функциями обеих переменных t и t_0 и соответственно равны

$$\begin{aligned} M(t, t_0) &= u(t, t_0) + h(t, t_0) \frac{d}{dt} \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{p(t, t_0)}{t - t_0} + q(t, t_0) \\ N(t, t_0) &= v(t, t_0) + l(t, t_0) \frac{d}{dt} \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{p(t, t_0)}{t - t_0} + r(t, t_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

причем заключающиеся в правых частях этих равенств величины находятся по формулам

$$u(t, t_0) = \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)}\, a(t, t_0) - t_0^{\cdot} \bar{t}^{\cdot 2} \theta_2(t_0) \overline{b(t, t_0)}$$

$$v(t, t_0) = \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)}\, b(t, t_0) - t_0^{\cdot} \bar{t}^{\cdot 2} \theta_2(t_0) \overline{a(t, t_0)}$$

$$\frac{4\pi\lambda}{\theta_1(t)} a(t, z) = \left\{ -1 + \ln \frac{1 - (z/t)}{1 - (\bar{z}/\bar{t})},\ \ln \frac{z - t}{\bar{z} - \bar{t}} + 2 \overline{\ln(z - z_j)} \right\}$$

$$b(t, z) = \frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} a(t, z)$$

$$h(t, t_0) = \frac{1}{4\pi} \{ -\overline{\theta_2(t)} + \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)} [t^{\cdot} - d(t, t_0)] - t_0^{\cdot} \theta_2(t_0) \overline{c(t, t_0)} \}$$

$$l(t, t_0) = \frac{1}{4\pi} \{ -\overline{\theta_1(t)} + \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)} [t^{\cdot} - c(t, t_0)] - t_0^{\cdot} \theta_2(t_0) \overline{d(t, t_0)} \}$$

$$p(t, t_0) = \frac{1}{4\pi} \{ t^{\cdot} [\bar{t}^{\cdot} \overline{\theta_1(t)} - \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)}] - \bar{t}^{\cdot} [t^{\cdot} \theta_2(t) - t_0^{\cdot} \theta_2(t_0)] \} \quad (3.3)$$

$$c(t, t_0) = \frac{1}{\lambda} (t - t_0) \theta_1(t), \qquad d(t, t_0) = \frac{1}{\lambda} (t - t_0) \theta_2(t)$$

$$q(t, t_0) = \frac{1}{4\pi\lambda} [\bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)}\, \theta_2(t) - t_0^{\cdot} \bar{t}^{\cdot 2} \theta_2(t_0) \overline{\theta_1(t)}]$$

$$r(t, t_0) = \frac{1}{4\pi\lambda} [\bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)}\, \theta_1(t) - t_0^{\cdot} \bar{t}^{\cdot 2} \theta_2(t_0) \overline{\theta_2(t)}]$$

Как явствует из (3.3), функция $p(t, t_0)$ обращается в нуль при $t = t_0$; поэтому третье слагаемое в равенствах (3.2) будет ограниченной функцией переменных t и t_0 при допущении, что контур L имеет дифференцируемую кривизну. Далее стоящий слева в уравнении (3.1) оператор (3.4)

$$O[\omega(t, t_0)] = \sum_{j=1}^{m} \{ iA_j \alpha_j(t_0) + [\overline{\theta_1(t_0)} R_j(t_0) - \theta_2(t_0) \overline{R_j(t_0)}] \} + K[\omega(t), t_0]$$

где используемые новые обозначения по своему смыслу таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_j(t_0) = \lambda [2 + \ln(t_0 - z_j) + \overline{\ln(t_0 - z_j)}] + \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)}\, \eta_j(t_0, z_j) + \\ + t_0^{\cdot} \theta_2(t_0) \overline{\eta_j(t_0, z_j)} \end{aligned}$$

$$K[\omega(t), t_0] = E \bar{t}_0^{\cdot} \overline{\theta_1(t_0)} - \bar{E} t_0^{\cdot} \theta_2(t_0) + \Gamma[\omega(t), t_0], \quad R_j(t_0) = F_j \frac{\bar{t}_0^{\cdot}}{\bar{t}_0 - \bar{z}_j}$$

$$\eta_j(z, z_j) = \left\{ (z - z_j) [\ln(z - z_j) + \overline{\ln(z - z_j)}] - \frac{z_j \bar{z}_j}{\bar{z} - \bar{z}_j} + z \right\} \quad (3.5)$$

$$F_j = 2B_j \bar{z}_j + (1 - i) D_j, \quad E = \frac{1}{4\pi\lambda} \int_L \{ \omega(t) [\lambda t^{\cdot} - t\theta_2(t)] + \overline{\omega(t)} [\lambda t^{\cdot} - t\theta_1(t)] \} \frac{\overline{dt}}{\bar{t}}$$

§ 4. Займемся теперь исследованием разрешимости интегрального уравнения (3.1). Сначала установим одно важное свойство, которым обладает уравнение (3.1). Предельное условие (1.3) с присоединенным к нему оператором $\Gamma[\omega(t), t_0]$ [совпадающее с вещественной частью условия (1.7)] проинтегрируем почленно по дуге кривой L_j $(j=1, 2, \ldots$ $\ldots, m+1)$. Поскольку левая часть формулы (1.3), за исключением этого оператора, является производной по дуге от однозначной в замкнутой области S функции $w(x, y)$, мы будем иметь

$$\operatorname{Re}\varphi'_{m+1}(0)=0 \quad \text{на } L_{m+1}, \qquad (w+w_0)_{t=a_{m+1}}-(w+w_0)_{t=a_j}=0 \quad \text{на } L_j\ (j=1, \ldots, m) \tag{4.1}$$

Таким образом, любое решение интегрального уравнения (3.1) необходимо удовлетворяет (4.1); иначе говоря, трансформированные благодаря привнесенному оператору условия (1.3) и (1.4) остаются эквивалентными своей исходной форме, непосредственно отвечающей формулировке задачи, при обязательно соблюдающемся соотношении (4.1).

Примечание 1. Существенное для последующего значение соотношения (4.1) нетрудно выяснить. Вместо задаваемых краевых значений функции $w(x, y)$ (как это обычно практикуется) берутся согласно (1.3) значения ее производной по дуге L. Подобная замена одного из условий задачи в конечном итоге приводит к решению, удовлетворяющему краевым значениям $w(x, y)$ с точностью до некоторой постоянной на каждой из кривых L_j $(j=1, \ldots, m+1)$; эти постоянные, вообще говоря, отличаются одна от другой на отдельных кривых L_j $(j=1, \ldots, m+1)$, что резко усложняет процесс доведения решения до завершающего этапа из-за наслоения не только громоздких, но и фактически трудно реализуемых операций, к которым в этом случае приходится прибегать. Само же решение, как правило, при этом далеко не всегда оказывается приемлемым для практического использования. В разбираемом же случае благодаря соотношениям (4.1), обеспечивающим, в частности, равенство между собой упомянутых постоянных, названные осложнения отпадают. Функция $w(x, y)$, которая (в предположении, что уравнение (3.1) разрешимо) может быть найдена по предлагаемому способу, будет отличаться от искомой на одну и ту же постоянную на различных L_j, входящих в состав полной границы L. Следовательно, на эту же постоянную они будут разниться всюду в области S. Тем самым отыскиваемое решение будет свободно от изъянов, наблюдаемых в других работах и чреватых подчас изрядными затруднениями. (Во избежание недоразумений считаем нужным оговориться, что мы имеем в виду, как это, впрочем, ясно из сказанного, если не преимущественно, то по крайней мере в основном, вычислительную сторону вопроса.)

Допустим теперь, что однородное (при $f(t)=0$) интегральное уравнение (3.1) имеет некоторое нетривиальное решение $\omega_0(t)$. Отвечающие этому значению плотности функции (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.9) и (2.10), равно как входящие в них функционалы A_j, B_j и D_j, снабдим снизу доплнительным нулевым указателем. Совершенно так же, как выше, введем $\varphi_{0j}(z)$, $\psi_{0j}(z)$, $\varphi_{0j}^{(0)}(z)$, $\psi_{0j}^{(0)}(z)$ и $\varphi_{0j}^{*}(z)$, $\psi_{0j}^{*}(z)$, образующие в сумме, подобной (1.5), соответствующие из функций $\varphi_0(z), \ldots$ и $\psi_0^{*}(z)$; каждая из двух последних пар определяется долей соответствующего из интегралов (2.3) и (2.4), распространенного по кривой L_k и присоединенного к нему члена из добавочного слагаемого для $j=k$. Наконец, припишем нулевой индекс вычисленным для той же плотности бигармоническим функциям (2.16) и (2.17).

Бигармоническая функция $w_0(x, y)$ в связи со сказанным ранее по поводу (4.1) принимает на всех кривых L_j $(j=1, \ldots, m+1)$ одно и то же постоянное значение и, помимо того, удовлетворяет однородному условию (1.7). На основании имеющейся для бигармонической функции интегральной формулы [1]

$$\int\limits_L \left[wH(w) - \frac{dw}{dn} G(w)\right] ds =$$

$$= -\iint\limits_S \{\nu (\Delta w)^2 + (1-\nu)[(w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2(w_{xy})^2]\} dxdy$$

где ν — коэффициент Пуассона, $G(w)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью (1.4) и

$$H(w) = \frac{d\Delta w}{dn} + (1-\nu)\frac{d}{ds}[w_{xy}\cos 2\vartheta + (w_{yy} - w_{xx})\cos\vartheta\sin\vartheta]$$

нетрудно установить, что $w_0(x, y) = \text{const}$ везде в области S. Отсюда приходим к выводу, что

$$\varphi_0(z) = kz + C, \qquad \psi_0(z) = -\bar{C} \tag{4.2}$$

где k — некоторая вещественная и C — комплексная постоянная. Из последних же равенств сразу вытекают соотношения $A_{0j} = B_{0j} = 0$ ($j = 1, \ldots, m$). Следовательно, функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ и одновременно с ними $\varphi_0^{(0)}(z)$, $\psi_0^{(0)}(z)$ и $\varphi_0^*(z)$, $\psi_0^*(z)$ являются регулярными в области S. Учитывая это и опираясь на принцип аналитического продолжения, получим

$$\varphi_{0,m+1}(z) = kz + C, \qquad \psi_{0,m+1}(z) = -\bar{C}, \qquad \varphi_{0j}(z) = \psi_{0j}(z) = 0$$
$$(j = 1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

причем первые два из выписанных равенств имеют место внутри L_{m+1}, а два остальных — вне L_j. Обращаясь теперь к (2.1) — (2.4), (2.12) и первому из (4.1), находим, что

$$k = C = 0, \quad \frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{L_{m+1}} \{\omega(t)\theta_1(t) + \overline{\omega(t)}\theta_2(t)\} dt = 0 \tag{4.4}$$

Устремляя $z \to \infty$ в формуле (2.10), связывающей $\psi_{0j}(z)$ и $\psi_{0j}^*(z)$, найдем, что $D_{0j} = 0$ ($j = 1, \ldots, m$). Итак, все значащиеся в предыдущих равенствах функционалы

$$A_{0j} = B_{0j} = D_{0j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{4.5}$$

Примечание 2. В силу этих соотношений $w_0(x, y)$ и $w_0^*(x, y)$ совпадают между собой и функции $w_{0j}(x, y) = w_{0j}^*(x, y)$ исчезают на бесконечности как R^{-1} ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$). Поэтому криволинейный интеграл по контуру L_j от нормальной производной гармонической функции Δw_{0j} обращается в нуль.

Введем далее на контуре L функции $\varkappa(t)$ и $\mu(t)$, принимающие на каждой из кривых L_j ($j = 1, \ldots, m+1$) значения

$$\varkappa(t) = \varkappa_j(t), \quad \varkappa_j(t) = \varkappa_j^*(t) - 2i\lambda\varepsilon_j(\bar{B} - E), \qquad \varkappa_j(a_j) = -2i\lambda\varepsilon_j(\bar{B} - E)$$

$$\varkappa_j^*(t) = \int\limits_{a_j}^{t} [\omega(t)\theta_1(t) + \overline{\omega(t)}\theta_2(t)] dt, \qquad \varkappa_j^*(a_j) = 0 \tag{4.6}$$

$$\mu(t) = \mu_j(t); \quad -\mu_j(t) = -\overline{\varkappa_j(t)} + \{[\lambda\bar{t}^{\cdot} - \bar{t}\,\overline{\theta_1(t)}]\,\omega_0(t) + [\lambda\bar{t}^{\cdot} - \bar{t}\,\overline{\theta_2(t)}]\,\overline{\omega_0(t)}\}$$

при функционалах (первый из них фигурирует ниже)

$$A = \frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{L_{m+1}} \frac{\overset{*}{\varkappa}_{m+1}(t)}{t} dt, \qquad B = \frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{L_{m+1}} \overline{\frac{\overset{*}{\varkappa}_{m+1}(t)}{t} dt}$$

Непосредственно очевидно, что вследствие последнего из равенств (4.4) или второго из (4.5) функция $\varkappa_j(t)$ является однозначной на своей кривой изменения L_j. Имея в виду эти же равенства и выполнив несложные преобразования, сводящиеся в основном к интегрированию по частям, придадим выражениям (2.1) и (2.2) форму (точка z принадлежит области S)

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\int_L \frac{\varkappa(t) + 2i\lambda\varepsilon_j(A + \overline{B} - E)}{t - z}\,dt, \quad \psi_0(z) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\int_L \frac{\mu(t)}{t - z}\,dt \tag{4.7}$$

На основании (4.3) и первых двух равенств (4.4) ясно, что каждая из функций $\varkappa_j(t)$ и $\mu_j(t)$ аналитически продолжима и регулярна в соответственной односвязной области S_j, ограниченной $L_j\,(j = 1, \ldots, m + 1)$; из них $\varkappa_{m+1}(z) + 2i\lambda(A + \overline{B} - E)$ и $\mu_{m+1}(z)$ исчезают в бесконечно удаленной части области S_{m+1}. Продифференцируем первое из соотношений (4.6) по переменной t и разрешим его относительно $\omega_0(t)$. Будем иметь

$$\omega_0(t) = \frac{1}{4it^{\cdot}\overline{t^{\cdot}}}\{\overline{\theta_1(t)}\varkappa_j'(t) - \theta_2(t)\overline{\varkappa_j'(t)}\} \qquad \text{на } L_j\,(j = 1, \ldots, m + 1) \tag{4.8}$$

Положим в этом равенстве $\omega_0(t) = \nu_1^{(0)}(s) + i\nu_2^{(0)}(s)$ и отделим в нем вещественные и мнимые части. Тогда получим

$$\nu_1^{(0)}(s) = \frac{1}{4\overline{t^{\cdot}}t^{\cdot}}[\varkappa_j'(t) - \overline{\varkappa_j'(t)}], \qquad \nu_2^{(0)}(s) = -\frac{1}{4}[\varkappa_j'(t) + \overline{\varkappa_j'(t)}] \tag{4.9}$$

Значение $\omega_0(t)$ из предшествующего равенства внесем во вторую формулу (4.6); после этого при помощи элементарных выкладок приведем ее к виду

$$\varkappa_j(t) - t\overline{\varkappa_j'(t)} - \overline{\mu_j(t)} = \frac{\lambda t^{\cdot}}{2\overline{t^{\cdot}}t^{\cdot}}[\varkappa_j'(t) - \overline{\varkappa_j'(t)}] \tag{4.10}$$

Поскольку функции $\varkappa_j(z)$ и $\mu_j(z)$ непрерывны на (достаточно гладкой) кривой L_j, таковой же должна быть и правая часть (4.10), несмотря на возможное обращение в нуль ее знаменателя в некоторых точках L_j. Умножим равенство (4.10) на величину $\overline{t^{\cdot}\theta_1(t)}$, а сопряженное с ним на $t^{\cdot}\theta_2(t)$ и вычтем почленно одно из другого. В результате получим

$$\lambda[\varkappa_j'(t) - \overline{\varkappa_j'(t)}] + \overline{t^{\cdot}\theta_1(t)}\gamma_j(t) - t^{\cdot}\theta_2(t)\overline{\gamma_j(t)} = 0 \tag{4.11}$$

где по аналогии с (1.8)

$$\gamma_j(t) = \varkappa_j(t) - t\overline{\varkappa_j'(t)} - \overline{\mu_j(t)}$$

Соблюдающаяся на кривой L_j формула (4.11) по существу совпадает с однородным краевым условием (1.7). Согласно формуле Гурса построим бигармоническую в области S_j функцию

$$2\sigma_j(x, y) = -i\{\bar{z}\varkappa_j(z) - \overline{z\varkappa_j(z)} + \tau_j(z) - \overline{\tau_j(z)}\}, \quad \tau_j(z) = \int^z \mu_j(z)\,dz \tag{4.12}$$

Очевидно, она удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial\sigma_j}{\partial s} = 0, \qquad G(\sigma_j) = 0 \qquad \text{на } L_j\,(j = 1, \ldots, m + 1) \tag{4.13}$$

Кроме того, легко сообразить, что в бесконечно удаленной части области S_{m+1} поведение $\sigma_{m+1}(x, y)$ характеризуется соотношением

$$\sigma_{m+1}(x, y) = \overline{E}_{m+1}z + E_{m+1}\bar{z} + D_{m+1}\ln R + \overset{*}{\sigma}_{m+1}(x, y) \tag{4.14}$$

где $\overset{*}{\sigma}_{m+1}(x, y)$ — ограниченная бигармоническая функция и D_{m+1} и E_{m+1} — некоторые вещественная и комплексная постоянные (функция $\tau_{m+1}(z)$ не содержит слагаемое вида $D_{m+1}\ln z$, ибо при наличии такового $\sigma_{m+1}(x, y)$, приобретая приращение при обходе контура L_{m+1}, не сохраняла бы на нем постоянное значение). Нетрудно установить, что при названных условиях $\sigma_{m+1}(x, y)$ должна быть тождественно равна постоянной везде вне L_{m+1}; это влечет за собой (если учесть, что $\overset{*}{\varkappa}_{m+1}(a_{m+1}) = 0$)равенства $\overset{*}{\varkappa}_{m+1}(z) = \mu_{m+1}(z) = 0$; между прочим из них вытекает, что и функционалы $A = B = 0$.

Рассуждая подобным же образом и держа в памяти условие $\varkappa_j(a_j) = 0$, найдем, что в области S_j имеют место равенства

$$\varkappa_j(z) = k_j(z - a_j), \qquad \mu_j(z) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{4.15}$$

где k_j — некоторые вещественные постоянные; принимая во внимание первые равенства (4.5), обнаружим, что эти постоянные равны нулю. Итак, все функции

$$\varkappa_j(z) = \mu_j(z) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m+1) \tag{4.16}$$

Рассматривая наряду с (4.9) еще соотношение [в него при наличии (4.16) переходит вторая из формул (4.6)]

$$(\lambda\overset{\cdot}{\bar{t}} - \bar{t}\overset{\cdot}{t}\overset{\cdot\cdot}{t})\,\nu_1^{(0)}(s) - \bar{t}\nu_2^{(0)}(s) = 0 \tag{4.17}$$

немедленно заключаем, что необходимо $\omega_0(t) = 0$.

Итак, неоднородное уравнение (3.1) всегда разрешимо единственным образом. Определив из него плотность $\omega(t)$, найдем по формулам (2.1) и (2.2) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Воспроизведенная посредством их $w(x, y)$, возможно будет отличаться от искомой бигармонической функции на некоторую постоянную величину. Подправив ее в последнем случае на эту постоянную, придем к требуемому решению задачи.

Примечание 3. Отметим, что к равенству (4.17) мы вынуждены прибегать, если какие-либо из кривых L_j содержат прямолинейные участки, надлежаще сопряженные (в смысле гладкости) со смежными дугами.

Примечание 4. Устранение $iD_{0j} / z - z_j$ из равенства (2.2) приводит к заключению, что в этом случае D_{0j} будет, вообще говоря, отличным от нуля вследствие самопогашения в $\psi_{0j}(z)$ слагаемых, содержащих названный функционал; очевидно, вместо $\overset{*}{\psi}_j(z) = 0$, при этом имеет место соотношение

$$\psi_{0j}^{(0)}(z) + D_{0j} / z - z_j = 0$$

и приведенные выше рассуждения и выводы в некоторой существенной своей части теряют силу. При видоизмененном таким образом равенстве (2.2) уравнение Фредгольма, как правило, уже не будет разрешимо. Привлечение же в (2.2) оператора $iD_j / z - z_j$, как мы видели, выправляет положение в желаемую сторону.

Примечание 5. Рассматриваемый здесь вопрос принадлежит к одному из трудных разделов теории упругости. Поэтому в работах, ему посвященных, закономерен наблюдаемый постепенный переход к наиболее общей его постановке наряду с улучшением и упрощением развиваемых методов исследования. В цитированных статьях [1,2] использованы достаточно общие различные методы, действующие почти безотказно, если не на всех, то по крайней мере на первостепенных по своей значимости этапах исследования для широкого класса задач теории потенциала и теории упругости. К сожалению, применение подобных методов далеко не всегда приводит к относительно простым результатам. В статье же [3] взяты весьма простые по форме выражения для искомых функций. Однако, не будучи специально приспособлены для целей рассматриваемой задачи (в том смысле, какой последним здесь придается), они привели автора к системе сингулярных интегральных уравнений, принадлежащей к классу, для которого пока еще не разработан удовлетворительный алгорифм решения. Несмотря на сказанное, представляется очевидным, что значение упомянутых основных работ отнюдь не исчерпывается их безусловной положительной ролью в недалеком прошлом. Все они не утратили своего интереса и по настоящее время, — каждая с определенной точки зрения; не вызывает сомнений, что их значимость, равно как значимость настоящей работы, будет неизменно возрастать с развитием эффективных методов решения интегральных уравнений.

Между прочим заслуживает быть отмеченным следующее небезынтересное обстоятельство. Исходя непосредственно из содержащихся в [1,2] интегро-дифференциальных уравнений с элементарными ядрами (до последующего преобразования их в уравнения Фредгольма), можно, отыскивая неизвестную плотность в форме соответствующего комплексного ряда Фурье, изучить (сведением к бесконечной системе линейных уравнений) некоторые важные частные задачи. По всей вероятности, это замечание остается справедливым и в применении к статье [3].

Мы далеки от мысли считать, что решение задачи, предложенное в настоящей статье, является наиболее простым из возможных (включая те, которые можно получить необязательно сведением к уравнению Фредгольма, а при помощи каких-либо иных методов). В то же время мы склонны думать, что вряд ли удастся построить для данной задачи другое уравнение Фредгольма с достоинствами, выделяющими его в каком-либо отношении со столь выгодной стороны, что оно заслуживало бы явного предпочтения при сопоставлении с (3.1).

§ 5 Остановимся вкратце на случае, когда область S — бесконечная, и ограничивающий ее контур L состоит из совокупности кривых L_j ($j = 1, \ldots, m$). При этом предпочтительнее, минуя (2.1) и (2.2), с самого начала взять за основу формулы (2.9) и (2.10). Допустим, что в бесконечно удаленной части области S бигармоническая функция

$$w(x, y) = Bz + \bar{B}\bar{z} + D \ln R + \ldots \tag{5.1}$$

где B — комплексная и D — вещественная постоянные и под многоточием подразумеваются слагаемые, остающиеся ограниченными, причем их n-я производная имеет порядок $O(R^{-n})$. Чтобы поведение $w(x, y)$, предписанное формулой (5.1), было реализовано в действительности, необходимо, обращаясь к (2.16), положить

$$A_k = -\sum_{j=1}^{m}{}' A_j, \qquad B_k = \sum_{j=1}^{m}{}' [iA_j(z_j - z_k) - B_j] \tag{5.2}$$

где k — некоторое произвольно фиксированное число из ряда $j = 1, \ldots, m$ и штрих над символом суммы указывает на пропуск слагаемого, отвечающего $j = k$. В связи с (5.2) формулам (2.9) и (2.10) можно придать иной вид, более выпукло оттеняющий их свойства. Кроме того, добавив к (2.9) в качестве аддитивного слагаемого функционал B_k (согласно же (2.7), но отнюдь не соотношения (5.2), принимаемого для выраженных в форме сумм вторых слагаемых в (2.9), (2.10) и (2.11)), будем иметь

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \sum_{j=1}^{m} [iA_j(z - z_j) + B_j] \ln \frac{z - z_j}{z - z_k} + B_k \tag{5.3}$$

$$\psi(z) = \psi^*(z) - \sum_{j=1}^{m} \left\{ (iA_j\bar{z}_j + B_j) \left[\ln \frac{z - z_j}{z - z_k} + \frac{z_j}{z - z_j} - \frac{z_k}{z - z_k} \right] + i\frac{D_j}{z - z_j} \right\} \tag{5.4}$$

В этих равенствах штрих над символами сумм опущен, так как при $j = k$ автоматически выпадают слагаемые, подлежащие устранению. Из (5.3) и (5.4) видно, что с удалением переменной z на бесконечность функция $\varphi(z)$ ограничена, а $\psi(z)$ убывает по модулю, имея порядок $O(|z|^{-1})$. В формуле (2.16) для функции $w(x, y)$ величины

δ_{1j}^* и δ_{2j}^* будут при этом зависеть также от индекса k и соответственно равны

$$-[|z-z_j|^2-|z_j|^2]\ln\left|\frac{z-z_j}{z-z_k}\right|^2, \qquad i\bar{z}\ln\left|\frac{z-z_j}{\bar{z}-\bar{z}_k}\right|^2$$

Оператор $\Gamma[\omega(t), t_0]$ нужно положить теперь в отличие от (1.6) равным

$$\Gamma[\omega(t), t_0]=\{[w+w_0]_{t=a_j}-[w+w_0]_{t=a_k} \text{ на } L_j (j\neq k); \qquad A_k \text{ на } L_k\} \quad (5.5)$$

где функционал A_k берется по той же формуле (2.1). Легко удостовериться, что при условиях (5.2) интегральная формула, предшествующая (4.2), остается справедливой и для бесконечной области S. Интегральное уравнение для плотности $\omega(t)$ в данном случае несколько отличается от (3.1). Его нетрудно выписать, исходя из (5.3) и (5.4). Однако, так же как и (3.1), оно всегда имеет единственное решение. Определив из него $\omega(t)$, найдем $w_1(x, y)$, принимающую постоянное значение на всех L_j $(j=1, \ldots, m)$. Вычтя из нее эту постоянную, получим требуемое решение задачи.

Примечание 1. Задача об определении бигармонической функции $w(x, y)$, вообще говоря, не имеет решения при более суженных, нежели (5.1), условиях на бесконечности. В самом деле, пусть наряду с упомянутым решением, где обе постоянные $Б$ и D для любой заданной $f(t)$, как правило, одновременно не равны нулю, имеется [при той же $f(t)$] другое решение задачи, например ограниченное на бесконечности. Бигармоническая функция, составленная из разности этих двух решений, удовлетворяет однородным условиям (1.3) и (1.4) и имеет при больших $|z|$ тот же порядок (5.1). Отсюда заключаем, что эта функция тождественно равна постоянной и, значит, величины $Б$ и D должны обращаться в нуль, что невозможно.

Если отыскиваемая $w(x, y)$ по условию обладает на бесконечности особенностью более высокого порядка, нежели (5.1), то дополнительные слагаемые с особенностью, превосходящей (5.1), должны неизменно задаваться.

Примечание 2. Предположим, что действующая на изгибаемую пластинку нормальная нагрузка $q(x, y)$ распределена по некоторой площади Ω, занимающей конечную часть области S. В этом случае за частное решение дифференциального уравнения прогиба, исчезающее на бесконечности, можно взять (D — цилиндрическая жесткость)

$$w_0(x,y)=\frac{1}{16\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)\, r^2\ln r\,d\Omega+\Delta_1^{(0)}r_0^2\ln r_0+(2\ln r_0+1)\,[\Delta_2^{(0)}+\Delta_1^{(1)}(x-x_0)+$$

$$+\Delta_2^{(1)}(y-y_0)]+\Delta_{1,1}^{(2)}\left(\frac{x-x_0}{r_0}\right)^2+\Delta_{1,2}^{(2)}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r_0^2}+\Delta_{2,2}^{(2)}\left(\frac{y-y_0}{r_0}\right)^2$$

Здесь точка $M(x_0, y_0)$ лежит вне области S и

$$\Delta_1^{(0)}=-\frac{1}{16\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)\,d\Omega, \qquad \Delta_2^{(0)}=-\frac{1}{32\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)\,\rho_0^2(\xi, \eta)\,d\Omega$$

$$\Delta_1^{(1)}=\frac{1}{16\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)(\xi-x_0)\,d\Omega, \qquad \Delta_2^{(1)}=\frac{1}{16\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)(\eta-y_0)\,d\Omega$$

$$\Delta_{1,1}^{(2)}=-\frac{1}{16\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)(\xi-x_0)^2\,d\Omega,$$

$$r_0=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$\Delta_{1,2}^{(2)}=-\frac{1}{8\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)(\xi-x_0)(\eta-y_0)\,d\Omega,$$

$$\rho_0=\sqrt{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2}$$

$$\Delta_{2,2}^{(2)}=-\frac{1}{16\pi D}\int\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)(\eta-y_0)^2\,d\Omega$$

Примечание 3. Для некоторого вида областей S может, в частности, оказаться пригодным способ, хорошо оправдавший себя в применении к достаточно широкому классу задач плоской теории упругости [6]. Пусть, например, область S является эксцентрическим кольцом, ограниченным окружностями L_j радиусов R_j и с аффиксами центров z_j $(j=1, 2)$. В этом случае краевое условие (1.7) для функций $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$, введенных по формулам (2.9) и (2.10), запишется так:

$$\lambda[\varphi^{*\prime}(t)-\overline{\varphi^{*\prime}(t)}]-(1+R_j^{-1})\frac{R_j}{t-z_j}\gamma^*(t)-(1-R_j^{-1})\frac{t-z_j}{R_j}\overline{\gamma^*(t)}=f^*(t) \quad (5.6)$$

где смысл $\gamma^*(t)$ очевиден; к функции $f^*(t)$ отнесены также величины, содержащие в качестве множителей параметры A_1, B_1 и D_1, являющиеся неизвестными задачи.

Поступая, как в статье [6], введем, например, на внутренней окружности L_1 новую вспомогательную функцию $\omega^*(t)$ из условия

$$\lambda\left[\varphi^{*\prime}(t)+\overline{\varphi^{*\prime}(t)}\right]-(1+R_1^{-1})\frac{R_1}{t-z_1}\eta^*(t)+(1-R_1^{-1})\frac{t-z_1}{R_1}\overline{\eta^*(t)}=2\omega^*(t) \tag{5.7}$$

в котором положено

$$\eta^*(t)=\varphi^*(t)+t\overline{\varphi^{*\prime}(t)}+\overline{\psi^*(t)}$$

Последовательно сложив и вычтя почленно одно из другого равенства (5.6) и (5.7), получим два следующих соотношения:

$$\mp(1\pm R_1^{-1})\frac{R_1}{t-z_1}\varphi^*(t)+\left\{\lambda\pm(1\mp R_1^{-1})\left[R_1+\bar z_1\frac{t-z_1}{R_1}\right]\right\}\varphi^{*\prime}(t)$$
$$\pm(1\mp R_1^{-1})\frac{t-z_1}{R_1}\psi^*(t)=\omega^*(t)\pm\frac{1}{2}f^*(t)$$

отвечающие одновременно учитываемым верхним либо нижним знакам.

Исключив из них сначала функцию $\varphi^*(t)$, а затем $\psi^*(t)$, придем к формулам

$$-\frac{2}{t-z_1}\varphi^*(t)+\lambda\varphi^{*\prime}(t)=F^*(t)$$
$$\left[-2\frac{\bar z_1}{R_1}+(\lambda-2)\frac{R_1}{t-z_1}\right]\varphi^{*\prime}(t)-\frac{2}{R_1}\psi^*(t)=G^*(t)$$

в которых правые части таковы:

$$\left[F^*(t);\ \frac{t-z_1}{R_1}G^*(t)\right]=\frac{1}{2}\left\{(1\pm R_1^{-1})\left[\omega^*(t)+\frac{1}{2}f^*(t)\right]+(1\mp R_1^{-1})\left[\overline{\omega^*(t)}-\frac{1}{2}\overline{f^*(t)}\right]\right\}$$

Здесь верхние и нижние знаки, проставленные в выражении справа, относятся соответственно к первой и второй из функций, значащихся слева. Каждую из функций $\omega^*(t)$ и $f^*(t)$ целесообразно задавать в форме комплексного ряда Фурье по степеням двучлена $t-a_1$. Далее введем регулярные в области S функции

$$\delta^*(z)=-\frac{2}{z-z_1}\varphi^*(z)+\lambda\varphi^{*\prime}(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{F^*(t)}{t-z}dt$$
$$\chi^*(z)=\left[-2\frac{\bar z_1}{R_1}+(\lambda-2)\frac{R_1}{z-z_1}\right]\varphi^{*\prime}(z)-\frac{2}{R_1}\psi^*(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{G^*(t)}{t-z}dt.$$

На самом деле они будут аналитически продолжимы и регулярны в области, внутренней к окружности L_2. Считая $\omega^*(t)$ условно заданной, найдем из предельного равенства на внешней окружности L_2 функции $\delta^*(z)$ и $\chi^*(z)$. Перейдя после этого к условию (5.7) на L_1, получим для неизвестных коэффициентов разложения $\omega^*(t)$ бесконечную систему линейных уравнений; нетрудно установить, что она будет квазирегулярна для любых относительных размеров области. Разрешив эту систему и, следовательно, определив $\omega^*(t)$, выпишем затем выражения для искомых функций.

Примечание 4. М. М. Фридманом было обращено внимание на аналогию между задачей, изученной выше, и плоской задачей теории упругости при заданных граничных значениях нормальной составляющей вектора смещения и касательной составляющей вектора напряжения. Для случая конечной и односвязной области эта задача рассматривалась в статье [7]. Предельные равенства, приведенные в ней, могут быть преобразованы к форме

$$(\varkappa-1)\left[\varphi'(t)-\overline{\varphi'(t)}\right]-t'\theta_2(t)\overline{\gamma(t)}+\bar t'\overline{\theta_1(t)}\gamma(t)=f(t) \tag{5.8}$$

Здесь μ и $\varkappa$ — упругие постоянные и

$$\gamma(t)=\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)},\qquad f(t)=-4\mu\left[v_n+i\left(\frac{dv_n}{ds}+T/2\mu\right)\right] \tag{5.9}$$

причем v_n — нормальная и T — касательная составляющие соответственно векторов смещения и напряжения. Сопоставление этих условий с (1.7) сразу подтверждает справедливость замечания, высказанного М. М. Фридманом.

Для конечной многосвязной области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ можно, следуя упомянутой аналогии, взять в виде (чтобы не вдаваться в усложняющие изложение подробности, будем считать, что ни одна из кривых L_j не является окружностью)

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_L \{\omega(t)\,\theta_1(t) + \overline{\omega(t)}\theta_2(t)\}\, G(t, z)\, dt \\ \psi(z) &= \int_L \{\omega(t)\, H(t, z) + \overline{\omega(t)}\, T(t, z)\} dt\end{aligned} \tag{5.10}$$

В данном случае по своему построению $G(t, z)$, $H(t, z)$ и $T(t, z)$ имеют много общего с (2.5) и (2.6); они задаются формулами

$$G(t, z) = \left\{-\frac{1}{4\pi(\varkappa-1)}\left[-1 + \ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right], \ -\frac{1}{4\pi(\varkappa-1)}\ln(z-t)\right\}$$

$$H(t, z) = \varkappa \bar{t}^{\cdot 2}\overline{\theta_2(t)}\left[-G(t, z) + \varepsilon_j \frac{1}{4\pi(\varkappa-1)}\right] + P(t)\left[\frac{1}{t-z} - \varepsilon_j \frac{1}{t}\right]$$

$$T(t, z) = \varkappa \bar{t}^{\cdot 2}\,\overline{\theta_1(t)}\left[-G(t, z) + \varepsilon_j \frac{1}{4\pi(\varkappa-1)}\right] + Q(t)\left[\frac{1}{t-z} - \varepsilon_j \frac{1}{t}\right]$$

$$P(t) = \frac{1}{4\pi(\varkappa-1)}\left[(\varkappa-1)\bar{t}^{\cdot} + \bar{t}\,\overline{\theta_1(t)}\right], \qquad Q(t) = \frac{1}{4\pi(\varkappa-1)}\left[(\varkappa-1)\bar{t}^{\cdot} + \bar{t}\,\overline{\theta_2(t)}\right]$$

в которых значения ε_j те же, что и прежде. Внеся (5.10) в краевое условие (5.8), получим для плотности $\omega(t)$ интегральное уравнение Фредгольма, разрешимое единственным образом.

В том случае, когда многосвязная область S — бесконечная, естественно считать известным главный вектор внешних сил, действующих на совокупности ограничивающих область кривых L_j $(j = 1, \ldots, m)$. Положим

$$\varphi(z) = B\ln(z - z_k) + \varphi_0(z), \qquad \psi(z) = -\varkappa\bar{B}\ln(z - z_k) + \psi_0(z) \tag{5.11}$$

где однозначные в области S функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ равны:

$$\varphi_0(z) = \int_L \{\omega(t)\,\theta_1(t) + \overline{\omega(t)}\,\theta_2(t)\}\, G(t, z)\, dt - \left(\sum_{j=1}^m B_j\right)\ln(z - z_k) + B_k \tag{5.12}$$

$$\psi_0(z) = \int_L \{\omega(t) H(t, z) + \overline{\omega(t)}\, T(t, z)\}\, dt + \varkappa\left(\sum_{j=1}^m \bar{B}_j\right)\ln(z - z_k)$$

В этих формулах индекс k — некоторое число из ряда $j = 1, \ldots, m$ и постоянная

$$B = \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}(X + iY)$$

причем $X + iY$ — главный вектор напряжений, распределенных в бесконечно удаленной части плоскости. Рассматривая однородную систему интегральных уравнений (разумеется, величина, содержащая в качестве множителя постоянную B, включается в свободный член), удостоверимся, что $\varphi_0(z) = B_k$ и $\psi_0(z) = 0$. Из условия обращения в нуль на контуре L нормальной компоненты смещения находим, что $B_k = 0$, значит, и $\varphi_0(z) = 0$. В остальном доказательство разрешимости протекает, как выше.

Поступила 17 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Х а л и л о в З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
2. Ф р и д м а н М. М. Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
3. К а л а н д и я А. И. О задаче равновесия упругой пластинки с опертыми краями Труды Тбилисского матем. ин-та, т. XIX, 1953.
4. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.— Л., 1946.
5. Ш е р м а н Д. И. Об упругом равновесии пластинки, опертой на краю. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 3, 1957.
6. Ш е р м а н Д. И. О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
7. Ш е р м а н Д. И. Об одной задаче теории упругости со смешанными однородными условиями. Докл. АН СССР, т. CXIV, № 4, 1957.