Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ВНЕШНЕЙ КРУГОВОЙ ЩЕЛЬЮ

Я. С. Уфлянд

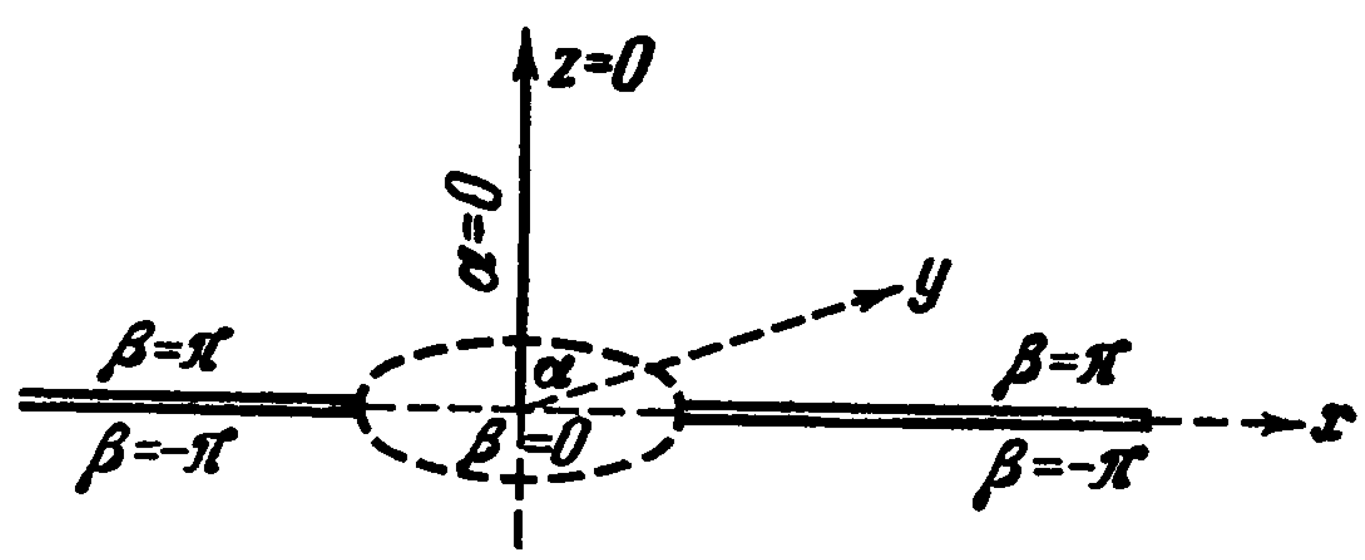
(Ленинград)

§ 1. Введение. В настоящей работе дано точное решение первой основной задачи теории упругости для неограниченного пространства, содержащего плоский разрез, занимающий внешность некоторого круга (фиг. 1).

При решении подобных задач удобно наряду с прямоугольными координатами (x, y, z) ввести тороидальные координаты $(0 \leqslant \alpha < \infty, -\pi \leqslant \beta \leqslant +\pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ соотношениями

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \qquad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \qquad z = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \tag{1.1}$$

При этом берега разреза будут координатными поверхностями $\beta = \pm \pi$, внутренность круга радиуса a — поверхностью $\beta = 0$, а разделяющая окружность $r = a$ — линией $\alpha = \infty$.



Фиг. 1

Для решения поставленной задачи воспользуемся представлением Папковича — Нейбера упругих перемещений (u, v, w) через четыре гармонические функции Φ_k $(k = 0, 1, 2, 3)$

$$2\mu u = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \qquad 2\mu v = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2$$
$$2\mu w = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3, \qquad F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \tag{1.2}$$

(μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона).

Приведем также выражения для тех напряжений $(\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{yz})$, которые на границах разреза являются заданными величинами:

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}[2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4] + 2\nu\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + z\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2}\right)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \qquad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \tag{1.3}$$

$$\Phi = (1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - \left(x\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right), \qquad \Phi_4 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$$

В дальнейшем задача разбивается на две — симметричную и антисимметричную (относительно плоскости $z=0$), причем в обоих случаях можно, очевидно, поставить некоторые условия на поверхности $\beta=0$ и рассматривать задачу только для верхнего полупространства.

§ 2. Симметричная задача[1]. В случае напряженного состояния, симметричного по координате z, можно рассматривать равновесие верхнего полупространства $(0 \leqslant \beta \leqslant \pi)$ при следующих граничных условиях:

$$w|_{\beta=0}=0, \qquad \tau_{zx}|_{\beta=0}=0, \qquad \tau_{yz}|_{\beta=0}=0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_z|_{\beta=\pi}=\sigma(\alpha,\varphi), \qquad \tau_{zx}|_{\beta=\pi}=\tau_x(\alpha,\varphi), \qquad \tau_{yz}|_{\beta=\pi}=\tau_y(\alpha,\varphi) \tag{2.2}$$

Пользуясь произвольностью одной из входящих в решение Папковича — Нейбера гармонических функций, присоединим к условиям (2.1)—(2.2) еще два дополнительных условия:

$$\Phi|_{\beta=0}=0, \qquad \Phi|_{\beta=\pi}=0 \tag{2.3}$$

При этом те из краевых условий (2.1)—(2.2), которые связаны с касательными напряжениями, сразу дают возможность сформулировать раздельные краевые условия для гармонических функций Φ_1 и Φ_2:

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{\beta=0}=\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{\beta=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{\beta=0}=\frac{\tau_x}{2(1-\nu)}, \quad \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{\beta=0}=\frac{\tau_y}{2(1-\nu)}. \tag{2.4}$$

Таким образом, функции Φ_1 и Φ_2 могут считаться найденными в результате решения задачи Неймана для полупространства.

После этого обращаемся к условиям (2.3) и определяем из них функцию

$$\psi=(1-2\nu)\Phi_3-\Phi_4 \tag{2.5}$$

решая задачу Дирихле для полупространства

$$\Delta\psi=0, \qquad \psi|_{\beta=0}=0, \qquad \psi|_{\beta=\pi}=\frac{1}{2(1-\nu)}(x\tau_{zx}+y\tau_{yz})_{\beta=\pi} \tag{2.6}$$

Наконец, оставшиеся условия $w|_{\beta=0}=0$, $\sigma_z|_{\beta=\pi}=\sigma(\alpha,\varphi)$ после подстановки в них значения $\Phi_4=(1-2\nu)\Phi_3-\psi$ приводят к смешанным краевым условиям для гармонической функции Φ_3:

$$\Phi_3|_{\beta=0}=0 \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right|_{\beta=\pi}=\sigma(\alpha,\varphi)+\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x\Phi_1+y\Phi_2)-2\nu\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{\beta=\pi}$$

Метод решения краевых задач со смешанными условиями (2.7) дается в следующем параграфе.

§ 3. Пример. В качестве примера исследуем тот случай, когда внешняя нагрузка представляет собой две противоположно направленные нормальные сосредоточенные силы P, приложенные в точках $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\pm\pi$, $\varphi=0$ (фиг. 2).

Так как внешние касательные усилия равны нулю, то согласно (2.4) и (2.6) $\Phi_1=\Phi_2=\psi=0$, $\Phi_4\equiv(1-2\nu)\Phi_3$ и задача сводится к нахождению одной гармони-

---

[1] Соответствующая задача для случая внутренней круговой щели, занимающей область $\beta=0$, решена М. Я. Леоновым [1, 2].

ческой в полупространстве функции $\Phi \equiv \Phi_3$ при следующих краевых условиях:

$$\Phi \big|_{\beta=0} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \bigg|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha, \varphi) \tag{3.1}$$

Эффективное решение подобных смешанных задач может быть получено при помощи интегрального преобразования Мелера — Фока [3].

В самом деле, если положить

$$\Phi = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \int_0^{\infty} A_m(\tau) \frac{\operatorname{sh}\beta\tau}{\tau \operatorname{ch}\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{3.2}$$

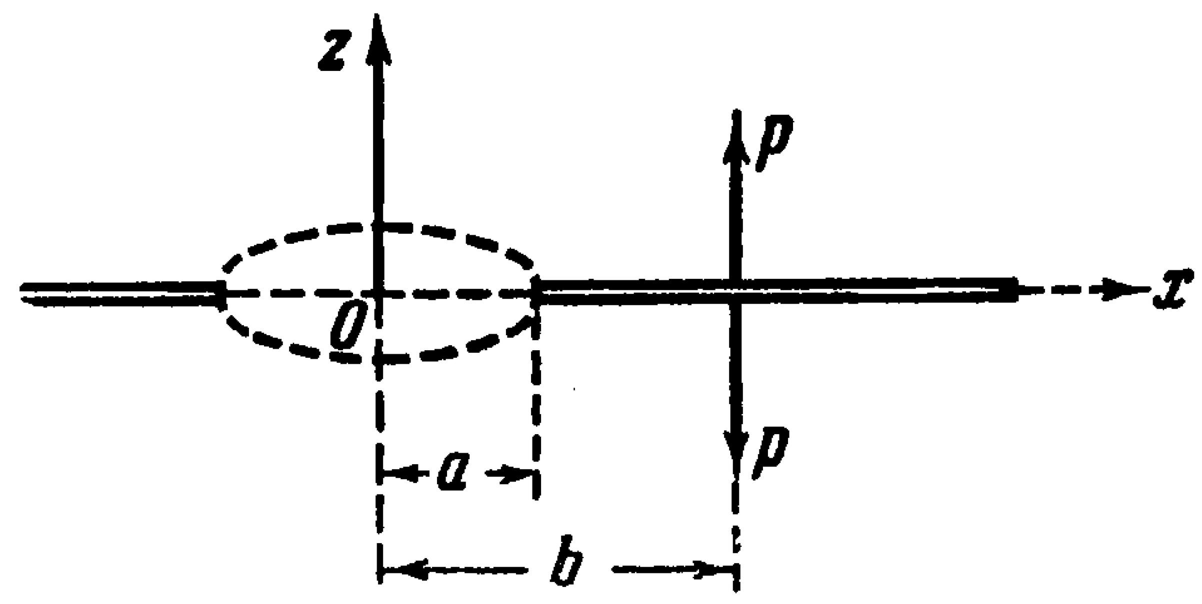
где $P_\nu^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра, то первое условие (3.1) будет удовлетворено, а второе приводит к равенству

$$\sigma(\alpha, \varphi) = -\frac{1}{a} (\operatorname{ch}\alpha - 1)^{3/2} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \int_0^{\infty} A_m(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{3.3}$$

По формуле обращения Мелера — Фока находим

$$A_m(\tau) = \frac{2a}{\pi} (-1)^{m+1} \tau \operatorname{th}\pi\tau \int_0^{\pi} \cos m\varphi\, d\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\sigma(\alpha, \varphi)}{(\operatorname{ch}\alpha - 1)^{3/2}} P_{-1/2+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha\, d\alpha \quad (m \geqslant 1) \tag{3.4}$$



Фиг. 2

При $m = 0$ последнее выражение приобретает множитель $1/2$.

Для рассматриваемого случая точечной нагрузки легко получаем

$$A_m(\tau) = (-1)^m \frac{P}{\pi b} \frac{\operatorname{sh}\alpha_0}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha_0 - 1}} \tau \operatorname{th}\pi\tau P_{-1/2+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch}\alpha_0) \tag{3.5}$$

Таким образом, функция Φ дается следующим выражением:

$$\Phi = \frac{P}{\pi a} \sqrt{(\operatorname{ch}\alpha_0 - 1)(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)} \sum_{m=0}^{\infty}{}' (-1)^m \cos m\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} \operatorname{sh}\beta\tau P_{-1/2+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch}\alpha_0) P_{-1/2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{3.6}$$

(значок $'$ у суммы означает, что нулевой член ряда имеет множитель $1/2$).

Пользуясь интегральным представлением [4]

$$(-1)^m P_{-1/2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha) P_{-1/2+i\tau}^{-m}(\operatorname{ch}\alpha_0) \sqrt{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha_0} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{ch}\pi\tau}{\pi^2} \int_0^{\infty} Q_{m-1/2}\left(\frac{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha_0}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha_0} \right) \cos\tau s\, ds \tag{3.7}$$

а также разложением [5]

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} u - \cos\varphi)}} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty}{}' Q_{m-1/2}(\operatorname{ch} u) \cos m\varphi \tag{3.8}$$

можно получить решение задачи в замкнутом виде

$$\Phi = \frac{P}{\pi^2\rho} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{a}{\rho}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}}\right]$$

$$\rho = \sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2} \tag{3.9}$$

Приведем еще формулу для напряжений в среднем сечении $z=0$, $r<a$:

$$\sigma_z\big|_{\beta=0} = \frac{P}{\pi^2 a^2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\,\frac{(\operatorname{ch}\alpha_0-1)\operatorname{ch}^3{}^1\!/_2\,\alpha}{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha_0+1-\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\alpha_0\cos\varphi} \tag{3.10}$$

§ 4. Антисимметричная задача[1]. В этом случае требуется исследовать упругое равновесие верхнего полупространства при краевых условиях

$$u\big|_{\beta=0} = v\big|_{\beta=0} = 0, \quad \tau_{zx}\big|_{\beta=\pi} = \tau_x(\alpha,\varphi), \quad \tau_{yz}\big|_{\beta=\pi} = \tau_y(\alpha,\varphi) \tag{4.1}$$

$$\sigma_z\big|_{\beta=0} = 0, \qquad \sigma_z\big|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha,\varphi) \tag{4.2}$$

Путем специального выбора двух дополнительных граничных условий рассматриваемую задачу также удается свести к раздельным краевым задачам (Дирихле, Неймана или смешанной) для четырех гармонических в полупространстве функций. Однако на этом пути встречаются некоторые дополнительные трудности. Дело в том, что при последовательном проведении методики, описанной в § 2—3, одно из граничных условий оказывается выполненным с точностью до плоского гармонического слагаемого. В связи с этим приходится с самого начала вводить в решение плоскую гармоническую функцию, содержащую неопределенные коэффициенты, которые впоследствии определяются так, чтобы были выполнены все условия задачи.

Наряду с этим при проведении выкладок некоторые из функций, входящих в правые части граничных условий, не стремятся к нулю при $\alpha\to\infty$ и не разлагаются поэтому в интеграл Мелера — Фока[2]. Это затруднение преодолевается нами путем введения «особых» решений уравнения Лапласа

$$f(\alpha,\beta,\varphi) = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\, e^{\pm i^1\!/_2\beta}\sum_{m=0}^{\infty} f_m \operatorname{th}^m \tfrac{1}{2}\alpha e^{im\varphi} \tag{4.3}$$

разрывных на линии раздела краевых условий ($\alpha=\infty$).

В соответствии со сказанным выбираем два дополнительных условия в следующей форме:

$$F\big|_{\beta=0} = \operatorname{Re}\sum_{m=0}^{\infty} F_m r^m e^{im\varphi}, \qquad \Phi\big|_{\beta=\pi} = 0 \tag{4.4}$$

где F_m — пока неопределенные коэффициенты.

[1] Аналогичная задача для внутренней щели решена В. И. Моссаковским [6], однако им рассмотрен частный тип внешней нагрузки, разложение которой в ряд по углу φ содержит конечное число членов.

[2] Аналогичное обстоятельство возникает и в более сложных смешанных задачах теории упругости, где также следует использовать решения типа (4.3) (см. работу [3], где рассмотрен случай $m=1$, соответствующий контактной задаче).

При этом из (4.1) сразу следуют раздельные краевые условия для гармонических функций Φ_1 и Φ_2:

$$\Phi_1|_{\beta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{\beta=0}, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\bigg|_{\beta=\pi} = \frac{\tau_x}{2(1-\nu)} \tag{4.5}$$

$$\Phi_2|_{\beta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{\beta=0}, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\bigg|_{\beta=\pi} = \frac{\tau_y}{2(1-\nu)} \tag{4.6}$$

Считая Φ_1 и Φ_2 найденными, получаем из (4.2) для гармонической функции

$$\omega = 2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4 \tag{4.7}$$

граничные условия

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}_{\beta=0} = 0$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}\bigg|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha,\varphi) + \left(x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\right)_{\beta=\pi} - 2\nu\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)_{\beta=\pi} \tag{4.8}$$

Таким образом, определение функции ω сводится к решению задачи Неймана для полупространства.

Из дополнительного условия (4.5) с учетом (4.7) находим для гармонической функции Φ_4

$$\Phi_4|_{\beta=\pi} = (1-2\nu)\,\omega|_{\beta=\pi} - (x\tau_{zx} + y\tau_{yz})_{\beta=\pi} \tag{4.9}$$

Второе краевое условие для этой функции может быть получено применением оператора $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ к соотношению (4.4), записанному в таком виде[1]:

$$\Phi_0|_{\beta=0} = \operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty} F_m\left[1 - \frac{m}{4(1-\nu)}\right] r^m e^{im\varphi} + \text{const} \tag{4.10}$$

Учитывая, что $\Phi_4 = \partial\Phi_0/\partial z$, получаем

$$\partial\Phi_4/\partial z|_{\beta=0} = 0 \tag{4.11}$$

после чего функция Φ_4 может быть найдена при помощи интегрального преобразования Мелера — Фока (§ 3).

Заметим теперь, что если определить функцию Φ_0 равенством[2]

$$\Phi_0 = \int_{\infty}^{z} \Phi_4\,dz \tag{4.12}$$

то при $\beta = 0$ ее значение будет, вообще говоря, отличаться от правой части (4.10) на некоторую гармоническую функцию переменных x и y. Покажем, что соответствующим выбором коэффициентов F_m можно удовлетворить условию (4.10). Положим

$$\Phi_k = \Phi_k^{(0)} + \Phi_k' \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{4.13}$$

и определим функции $\Phi_k^{(0)}$, содержащие коэффициенты F_m.

---

[1] Заметим, что функция Φ_0 вообще определена с точностью до постоянного слагаемого.

[2] Если интеграл (4.12) расходится, то функцию Φ_0 следует находить по значениям ее первых производных.

Для $\Phi_1^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$ имеем следующие краевые условия:

$$4(1-\nu)\,\Phi_1^{(0)}|_{\beta=0} = \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty} mF_m r^{m-1} e^{i(m-1)\varphi}, \qquad \left.\frac{\partial\Phi_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{\beta=\pi} = 0$$

$$4(1-\nu)\,\Phi_2^{(0)}|_{\beta=0} = \mathrm{Re}\, i\sum_{m=1}^{\infty} mF_m r^{m-1} e^{i(m-1)\varphi}, \qquad \left.\frac{\partial\Phi_2^{(0)}}{\partial z}\right|_{\beta=\pi} = 0 \qquad (4.14)$$

Применяя преобразование Мелера — Фока, можно получить следующее выражение для $\Phi_1^{(0)}$:

$$4(1-\nu)\,\Phi_1^{(0)} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda+\cos\beta}\;\mathrm{Re}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(m+1)F_{m+1}\times \qquad (4.15)$$

$$\times\frac{2^{2m}a^m m!}{(2m)!}(\lambda^2-1)^{1/2\, m} e^{im\varphi}\times$$

$$\times\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda+\cos\beta}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda+\cos\beta}{1-\cos\beta}}\right] \qquad (\lambda=\mathrm{ch}\,\alpha)$$

и аналогичное значение для функции $\Phi_2^{(0)}$.

Далее из (4.8) находим для $\omega^{(0)} = 2(1-\nu)\,\Phi_3^{(0)} - \Phi_4^{(0)}$

$$\left.\frac{\partial\omega^{(0)}}{\partial z}\right|_{\beta=0} = 0, \qquad -8\pi a^2(1-\nu)\left.\frac{\partial\omega^{(0)}}{\partial z}\right|_{\beta=\pi} =$$

$$= \mathrm{sh}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,(\mathrm{sh}^2\tfrac{1}{2}\alpha + 1 - 2\nu)\,\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m F_m\,\mathrm{th}^m\tfrac{1}{2}\alpha e^{im\varphi} \qquad (4.16)$$

Здесь

$$\gamma_m = \frac{a^m 2^{2m}(m-1)!^2}{(2m-2)!} \qquad (4.17)$$

Используя обычную методику, основанную на разложении Мелера — Фока, а также особые решения типа (4.3), находим

$$\omega^{(0)} = \omega^* + \bar{\omega} \qquad (4.18)$$

где

$$-8\pi a\sqrt{2}(1-\nu)\,\omega^* = \sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta}\,\cos\tfrac{1}{2}\beta\;\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty} mE_m\gamma_m\,\mathrm{th}^m\tfrac{1}{2}\alpha e^{im\varphi} \qquad (4.19)$$

$$8\pi a\sqrt{2\pi}(1-\nu)\,\bar{\omega} = (1-2\nu)\sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta}\;\frac{\cos^{1/2}\beta}{\mathrm{sh}^2\,{}^1/_2\,\alpha}\times$$

$$\times\,\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m!\gamma_m}{\Gamma(m+{}^1/_2)}F_m\,\mathrm{th}^m\tfrac{1}{2}\alpha e^{im\varphi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2m}\theta}{\cos^2{}^1/_2\beta/\mathrm{sh}^2{}^1/_2\alpha+\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (4.20)$$

причем входящие в (4.20) квадратуры могут быть выражены в явном виде.

Переходя к определению функции $\Phi_4^{(0)}$ из условий

$$\Phi_4^{(0)}|_{\beta=\pi} = (1-2\nu)\,\omega^{(0)}|_{\beta=\pi}, \qquad \left.\frac{\partial\Phi_4^{(0)}}{\partial z}\right|_{\beta=0} = 0 \qquad (4.21)$$

и замечая, что $\omega^*\Big|_{\beta=\pi} = 0,\ \dfrac{\partial\omega^*}{\partial z}\Big|_{\beta=0} = 0$, сразу находим

$$\Phi_4^{(0)} = (1-2\nu)\bar{\omega} + A^*\omega^* \tag{4.22}$$

где A^* — пока произвольная постоянная.

Исследование поведения перемещения w при $\alpha \to \infty$ показывает, что для непрерывности величины w при $\alpha \to \infty$ необходимо [1] положить $A^* = -1$. Остается теперь вычислить значение интеграла

$$\int\limits_\infty^z \Phi_4\,dz\,|_{\beta=0} = \int\limits_\infty^z [(1-2\nu)\bar{\omega} - \omega^*]\,dz\,|_{\beta=0} + \int\limits_\infty^z \Phi_4'\,dz\,\Bigg|_{\beta=0} \tag{4.23}$$

и приравнять его правой части соотношения (4.10).

Находим последовательно

$$\int\limits_\infty^z \bar{\omega}\,dz\,\Bigg|_{\beta=0} = -\frac{1-2\nu}{8(1-\nu)}\,\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty} F_m r^m e^{im\varphi} \tag{4.24}$$

$$\int\limits_\infty^z \omega^*\,dz\,\Bigg|_{\beta=0} = \frac{1}{4(1-\nu)}\,\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty} F_m\left(m-\frac{1}{2}\right) r^m e^{im\varphi} \tag{4.25}$$

$$\int\limits_\infty^z \Phi_4'\,dz\,\Bigg|_{\beta=0} = \mathrm{Re}\sum_{m=0}^{\infty} G_m r^m e^{im\varphi} \tag{4.26}$$

где G_m — известные числа.

Подставляя (4.24) — (4.26) в (4.10), получаем окончательно

$$F_m = \frac{2}{2-\nu}G_m \qquad (m \geqslant 1) \tag{4.27}$$

на чем и заканчивается общее решение поставленной задачи.

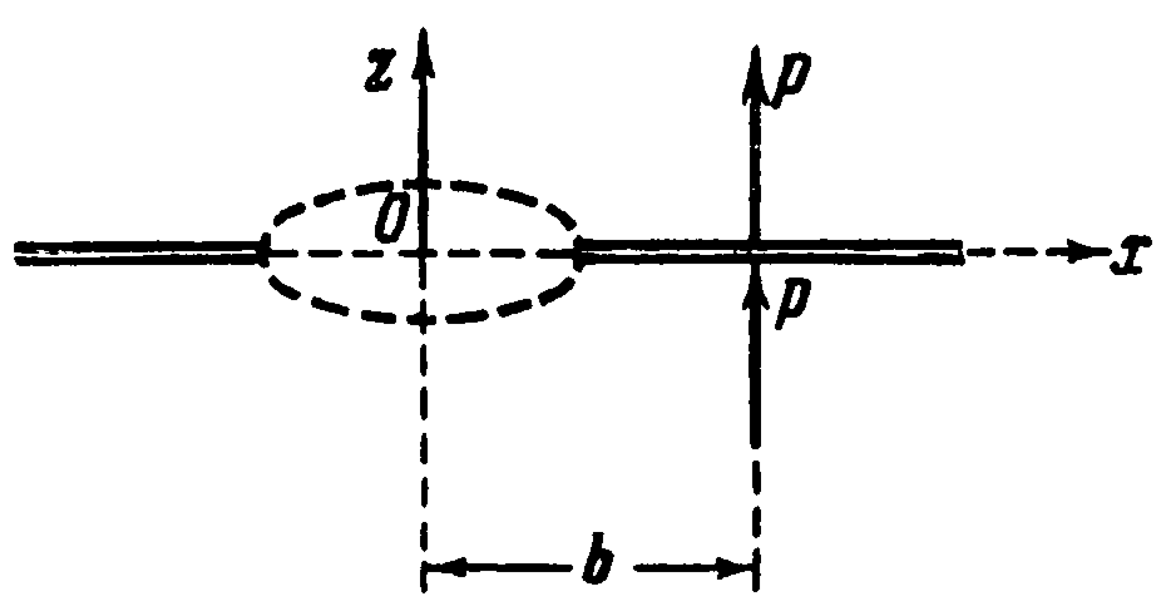
§ 5. **Пример**. Пусть в точках $\alpha = \alpha_0,\ \beta = \pm\pi,\ \varphi = 0$ приложены две одинаково направленные (по оси z) нормальные сосредоточенные силы P (фиг. 3)

Поскольку $\tau_x = \tau_y = 0$, то

$$\Phi_1' = \Phi_2' = 0, \qquad \Phi_4' = (1-2\nu)\,\omega'$$

а для функции ω' граничные условия таковы:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial z}\Big|_{\beta=0} = 0, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial z}\Big|_{\beta=\pi} = \sigma(\alpha, \varphi) \tag{5.1}$$



Фиг. 3

Легко видеть, что решением задачи Неймана для рассматриваемой точечной нагрузки является функция

$$\omega' = \frac{P}{2\pi\rho}, \qquad \rho = \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2} \qquad \left(b = a\,\mathrm{cth}\,\frac{1}{2}\alpha_0\right) \tag{5.2}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов G_m достаточно функцию

$$\int (dz\,/\,\rho)\,|_{\beta=0}$$

разложить в тригонометрический ряд по углу φ.

Пользуясь известным равенством

[1] Перемещения u и v при $\alpha \to \infty$ непрерывны при любом значении A^*.

$$\ln\sqrt{r^2-2br\cos\varphi+b^2}=-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^m\frac{\cos m\varphi}{m}+\text{const} \tag{5.3}$$

из (4.26) — (4.27) сразу получаем

$$F_m=-\frac{(1-2\nu)P}{\pi(2-\nu)mb^m}\qquad(m\geqslant 1) \tag{5.4}$$

Теперь функции $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\Phi_3^{(0)}$ и $\Phi_4^{(0)}$ могут считаться известными [см. формулы (4.15), (4.18) к (4.22)].

Приводим формулу для распределения напряжений в среднем сечении $z=0$, $r<a$:

$$(\tau_{zx}-i\tau_{yz})_{\beta=0}=\frac{1-2\nu}{\pi^2(2-\nu)}\frac{P}{b\sqrt{a^2-r^2}}\frac{1}{1-\zeta}\left[1+\sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}}\right] \tag{5.5}$$

$$\zeta=\frac{x+iy}{b}$$

В заключение заметим, что предложенный метод может быть применен и к решению соответствующих задач для неограниченного упругого тела, ослабленного внутренней круговой щелью, при наиболее общих предположениях относительно внешней нагрузки.

Поступила 26 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е о н о в М. Я. Некоторые задачи и приложения теории потенциала. ПММ, т. IV, вып. 5—6, 1940.
2. Л е о н о в М. Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1953.
3. У ф л я н д Я. С. Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. ПММ, т. XX, вып. 5, 1956.
4. Л е б е д е в Н. Н. Некоторые интегральные представления для произведений сферических функций. Докл. АН СССР, т. LXXIII, № 3, 1950.
5. Л е б е д е в Н. Н. Специальные функции и их приложения. ГТТИ, 1953.
6. М о с с а к о в с к и й В. И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.