

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ПРОНИКАНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ГРУНТ

В. С. Анциферов

(Москва)

Задачи о проникании твердого тела в грунт (или о раздвижении грунта изнутри) решаются при определенных предположениях о свойствах исследуемой среды. В настоящей работе такой схематической средой является идеальный (невязкий) и баротропный газ, причем изучается движение тела, имеющего форму круглого конуса и с постоянной скоростью проникающего в этот газ (при нулевом угле атаки).

§ 1. Постановка задачи следующая: в бесконечной плоскости находится однородный газ, покоящийся до начального момента времени, когда он начинает раздвигаться цилиндром, радиус которого растет от нуля пропорционально времени. Скорость движения цилиндра, т. е. скорость роста его радиуса, пусть равна U . Пусть t — время, r — расстояние точки от оси цилиндра (эйлерова координата), $p(r, t)$, $\rho(r, t)$, $u(r, t)$ — соответственно давление, плотность и скорость газа; индексом 0 будем обозначать начальные значения этих величин. В силу цилиндрической симметрии уравнения движения и неразрывности запишутся в виде [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\rho u}{r} = 0 \quad (1.1)$$

Третье уравнение (баротропности), заменяющее в нашем случае уравнение энергии, пусть имеет вид:

$$p - p_0 = nk^2 (\rho^n - \rho_0^n) \quad (1.2)$$

где n — безразмерное постоянное число, которое будем считать не равным нулю и единице. Первое из уравнений (1.1) приводится теперь к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + n^2 k^2 \rho^{n-2} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad (1.3)$$

Определяющими размерными параметрами являются r, t, U, ρ_0, p_0, k . Так как между их размерностями существуют соотношения $[U^2] = [p_0] [\rho_0^{-1}]$, $[k^2] = [p_0] [\rho_0^{-n}]$, то движение автомодельное. Примем за определяющие параметры с независимыми размерностями $\alpha = \rho_0^{1-n} U^2$, $\beta = U$. В рассматриваемом случае единственной безразмерной переменной комбинацией будет

$$\lambda = Utr^{-1} \quad (1.4)$$

а для плотности, скорости и размерной константы в (1.3) имеем [1]

$$\rho = \alpha^{\frac{1}{1-n}} r^{-\frac{2}{1-n}} t^{\frac{2}{1-n}} y, \quad u = rt^{-1} x, \quad n^2 k^2 = \alpha a^2 \quad (1.5)$$

где x, y — отвлеченные величины и, следовательно, функции лишь одного переменного λ . Величина a — безразмерная постоянная. Подставляя (1.5) в (1.3) и второе из уравнений (1.1), получим

$$\begin{aligned} \lambda \left[(x-1) \frac{dx}{d\lambda} + a^2 y^{n-2} \frac{dy}{d\lambda} \right] &= x^2 - x + \frac{2a^2}{n-1} y^{n-1} \\ \lambda \left[y \frac{dx}{d\lambda} + (x-1) \frac{dy}{d\lambda} \right] &= \frac{2n}{n-1} xy - \frac{2}{n-1} y \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поделив одно из этих уравнений на другое, получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \frac{z + (n+1)x(1-x)/2a^2 - (1-x)/a^2}{z - (1-x)^2/2a^2} \quad (1.7)$$

где подставлено $z = y^{n-1}$. Из (1.6) находим

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{2x} \frac{z - (1-x)^2/a^2}{z - (1-x)^2/2a^2} \quad (1.8)$$

Если удастся проинтегрировать (1.7), то $x(\lambda)$ и $z(\lambda)$ находятся в квадратурах. Но прежде чем исследовать (1.7), нужно в новых переменных написать начальные

граничные условия. Состоянию покоя ($u = 0$) соответствует в переменных x, z прямая $x = 0$, т. е. ось z . Для частиц, примыкающих к поршню, $r = Ut$, $u = U$; следовательно, $x = 1$. Таким образом, $0 \leq x \leq 1$.

Теперь нужно рассмотреть соотношения для сильного (и слабого) разрыва, учитывая, что волны распространяются по покоящемуся газу. Обозначая индексом 1 величины за скачком, можем написать

$$\begin{aligned} \rho_0(u_0 - c) &= \rho_1(u_1 - c), & p_0 + \rho_0(u_0 - c)^2 &= p_1 + \rho_1(u_1 - c)^2 \\ p_1 - p_0 &= nk^2(\rho_1^n - \rho_0^n) \end{aligned} \quad (1.9)$$

считая, что и на ударном фронте справедливо (1.2), где c — скорость распространения ударной (или звуковой) волны. В автомодельном движении $c = r/t = \text{const}$. Подставляя $c = r/t$, а также соотношения (1.5) в (1.9) и учитывая, что $u_0 = 0$, найдем

$$z_1 = \frac{n}{a^2} \frac{x_1(1-x_1)}{1-(1-x_1)^n}$$

При $x_1 = 0$ имеем $z_1 = a^{-2}$. Эта точка соответствует, что легко видеть, слабому разрыву. Таким образом, сильные и слабые разрывы в переменных x, z описываются одной кривой

$$z_1 = \frac{n}{a^2} \frac{x(1-x)}{1-(1-x)^n} \quad (1.10)$$

которая является аналогом ударной адиабаты. При переходе частицы через ударную волну изображающая точка в плоскости xz скачком переходит с прямой $x = 0$ на кривую (1.10) (см. [1]).

Обращаясь к (1.8), установим, что кривые $z_2 = (1-x)^2/a^2$, $z_3 = (1-x)^2/2a^2$ являются границами, разделяющими области с ростом (убыванием) параметра λ в зависимости от роста x ; выше $z_2(x)$ и ниже $z_3(x)$ величины x и λ растут одновременно; в области между ними λ убывает с ростом x . Нетрудно установить, что кривые $z_1(x)$ и $z_2(x)$ имеют всего две общие точки (при $x = 0$ и $x = 1$), за исключением случая $n = -1$, когда они тождественно совпадают. При этом z_1 идет выше z_2 для $n > -1$ и z_1 расположена ниже z_2 для $n < -1$.

Теперь можно перейти к изучению поведения интегральных кривых уравнения (1.7) в плоскости xz для $0 \leq x \leq 1$ и $z > 0$ (для $z \leq 0$ задача не имеет смысла). В точках прямой $z = 0$ и параболы $z_4 = (n+1)x(x-1)/2a^2 + (1-x)/a^2$ интегральные кривые имеют касательные, параллельные оси x ; в точках прямой $x = 0$ и параболы $z_3(x)$ — касательные, параллельные оси z . Точки

$$O(0,0), A\left(0, \frac{1}{a^2}\right), B(1,0), C\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1-n}{n}\right)^2\right), D(\infty, \infty)$$

являются особыми точками уравнения. В точках O, A, B имеется узел, в точках C и D — седло. Интегральные кривые имеют вид, показанный на фиг. 1 и 2. Стрелками указано направление возрастания параметра λ вдоль интегральной кривой, которое соответствует движению к центру симметрии.

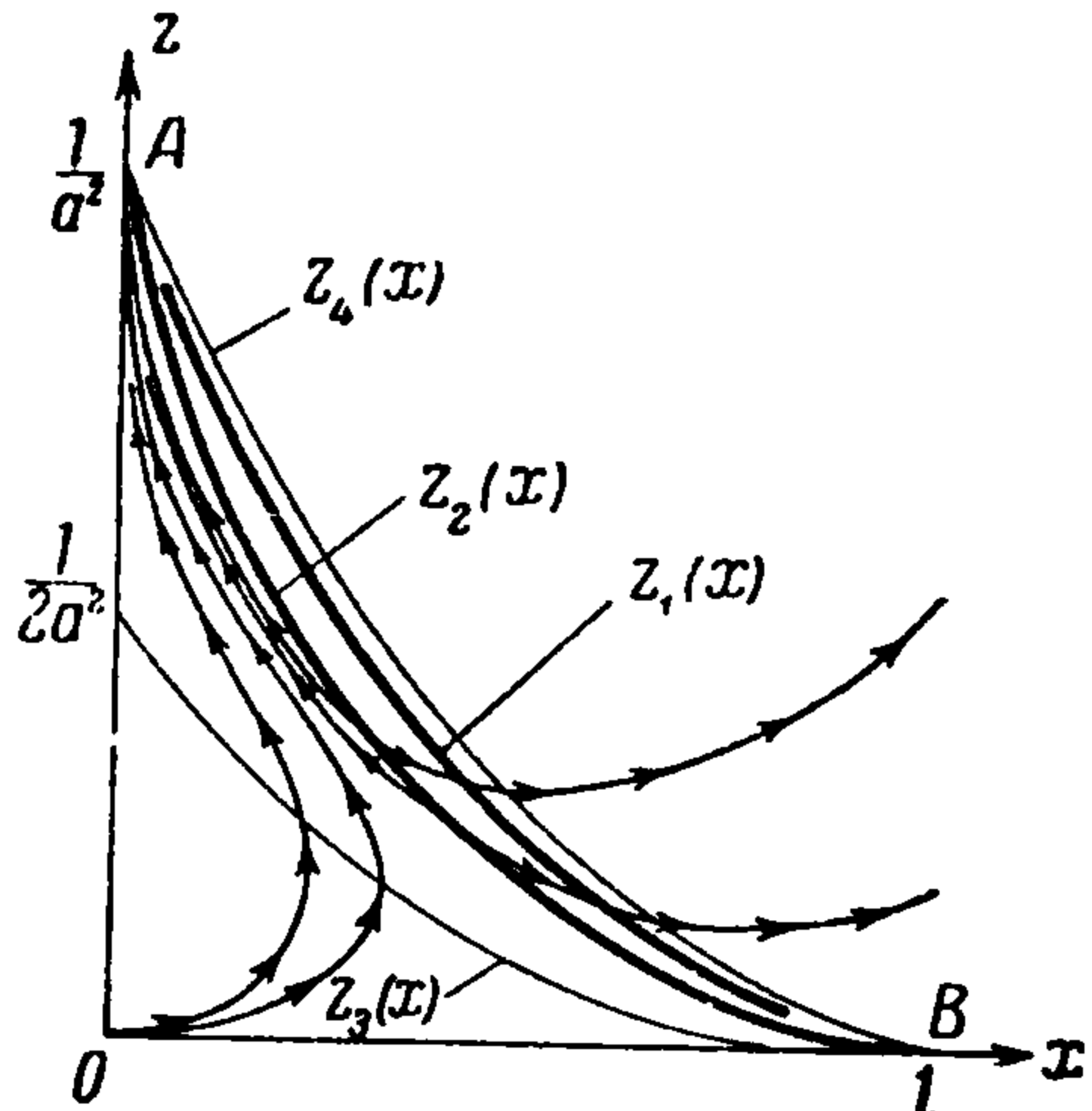
Состоянию покоя, как уже указывалось, соответствуют точки интегральной кривой $x = 0$. Бесконечно удаленной точке потока ($r = \infty$) соответствует точка O ($\lambda = 0$). Для частиц, примыкающих к поршню, имеем $x = 1$, $r = Ut$, $\lambda = 1$ по (1.4). Итак, при движении в физической плоскости от поршня к бесконечности λ должно непрерывно убывать от 1 до 0. Однако, как видно из фиг. 1, для $n > -1$ интересующие нас интегральные кривые (пересекающие прямую $x = 1$) проходят через параболу $z_2(x)$, на которой λ достигает минимума и через которую вследствие этого непрерывный переход недопустим. Следовательно, в этих случаях движение от прямой $x = 1$ до точки O возможно только, если где-то между $x = 1$ и $z = z_2(x)$ произойдет скачок, в результате которого изображающая точка попадет на прямую $x = 0$. С другой стороны, было показано, что точки оси z скачками переходят на кривую (1.10), которую как раз при $n > -1$ пересекают интегральные кривые. Получается следующая картина. При движении в физической плоскости от поршня к бесконечности изображающая точка движется по интегральной кривой от прямой $x = 1$ до пересечения с кривой $z_1(x)$ в некоторой точке $x = x_1$, $z = z_1$, после чего скачком переходит

на прямую $x = 0$. По газу распространяется ударная волна. Задача, таким образом, для $n > -1$ сводится к интегрированию системы уравнений (1.7) и (1.8) при граничных условиях

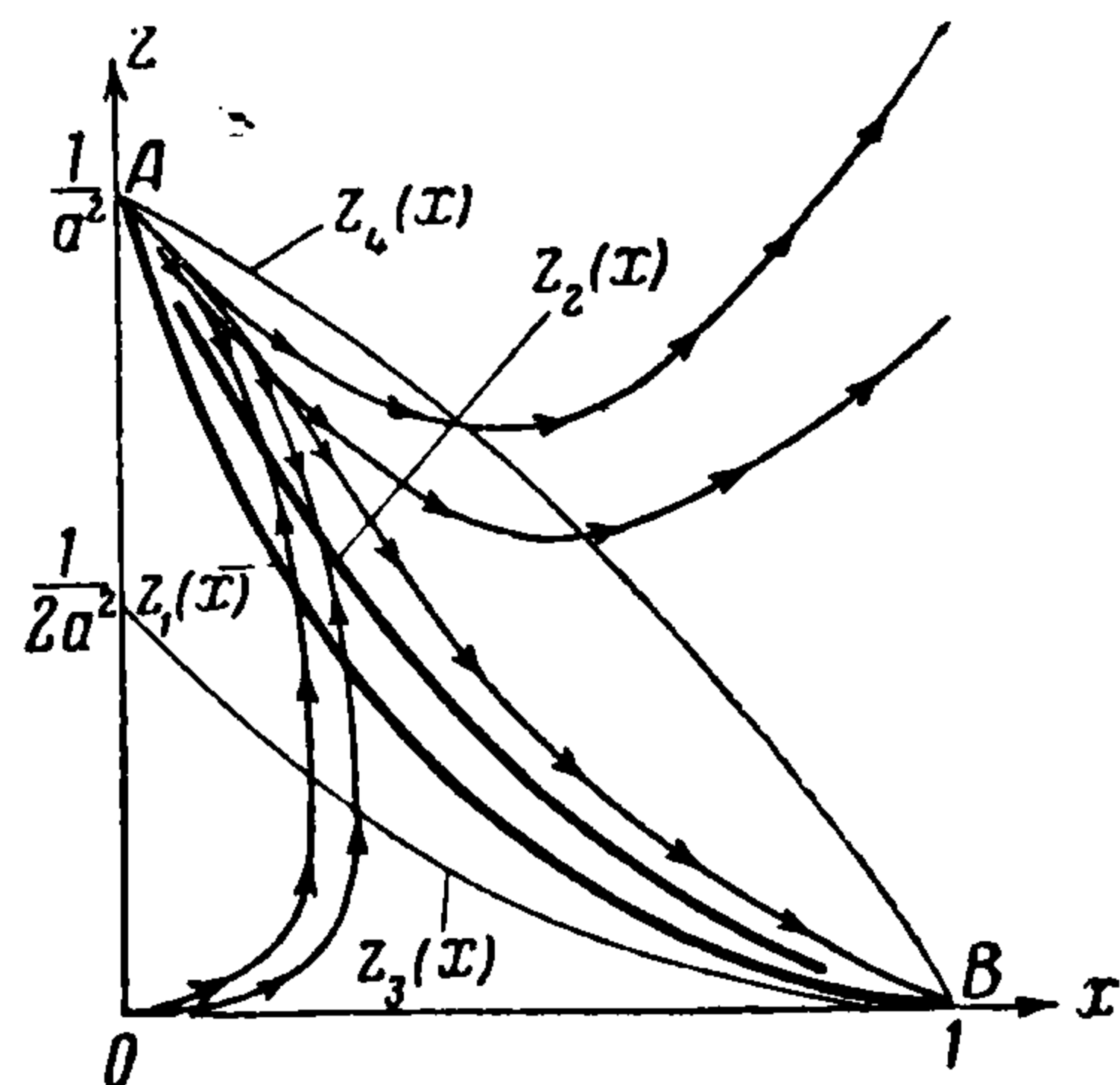
$$z = \frac{n}{a^2} \frac{x_1(1-x_1)}{1-(1-x_1)^n} \quad \text{при } x = x_1, \quad \lambda = 1 \quad \text{при } x = 1$$

$$\lambda = U/c \quad \text{при } x = x_1 \quad (1.11)$$

где c — скорость ударной волны; ее можно выразить через x_1 . Имеются три условия для определения двух произвольных постоянных от интегрирования двух уравнений первого порядка и неизвестной постоянной x_1 , т. е. задача однозначна. Ввиду того что $\lambda(x_1) < \lambda(1) = 1$, то $U < c$, т. е. скорость ударной волны получается больше скорости поршня.



Фиг. 1



Фиг. 2

Теперь обратимся к случаям $n < -1$. Фиг. 2 показывает, что интегральные кривые, пересекающие прямую $x = 1$, не проходят ни через кривую $z_1(x)$, изображающую скачок, ни через кривые $z_2(x)$, $z_3(x)$, на которых λ достигает экстремума. Все интегральные кривые проходят через точку $A(0, a^{-2})$, которая, как было показано, изображает в плоскости xz звуковую волну. Итак, при движении в физической плоскости от поршня к бесконечности изображающая точка движется по интегральной кривой от прямой $x = 1$ до оси z , а дальше по оси z до точки O . По газу распространяется звуковая волна. Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1.7) и (1.8) при условиях

$$\lambda = 1 \quad \text{при } x = 1, \quad \lambda = U/c_0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.12)$$

где c_0 — скорость звука в невозмущенном газе — величина, постоянная для всех интегральных кривых (при фиксированном n).

Однако при этом на U накладывается существенное ограничение: так как $\lambda(0) < \lambda(1) = 1$, то $U < c_0$. Это условие станет понятным, если вспомнить, что случаи $n < -1$ характерны следующим: кривая зависимости $\sigma = -p$ от $1/\rho$, а значит, p от деформации $\epsilon = 1 - \rho_0/\rho$ имеет выпуклость кверху и не может быть продолжена в область больших деформаций, ибо эта кривая должна $\epsilon = 1$ иметь вертикальной асимптотой. Поэтому если при выборе n и k (т. е. при аппроксимации реальной кривой) и заданной скорости U получится $U > c_0$ (или $U < c_0$, но того же порядка), то это будет означать, что уплотнения слишком велики, и (1.2) не имеет места. Общий вывод настоящего параграфа согласуется с известным положением: если кривая $p(\epsilon)$ имеет выпуклость кверху, то разрывные начальные данные не могут привести к разрывному решению, если же $p''(\epsilon) > 0$, то разрывные начальные данные при течении сжатия вызывают ударную волну.

Далее, рассмотрим функцию

$$W = (\rho/\rho_0)^{\frac{1-n}{2}} = \lambda/\sqrt{z}$$

Учитывая (1.7) и (1.8), можно получить

$$\frac{d \ln W}{dx} = \frac{1-n}{4a^2} \frac{1-x}{z - (1-x)^2/2a^2}$$

Теперь ясно, что для нашей задачи $W_x' > 0$ при $n < 1$ и $W_x' < 0$ для $n > 1$. А так как $\lambda'(x) > 0$, то при движении от волны к поршню плотность от частицы к частице повышается. Аналогично можно показать, что $u_\lambda' > 0$. Следовательно, с течением времени скорость и плотность частицы газа непрерывно повышаются.

§ 2. Теперь исследуем случай $n = -1$, практически важный, так как большинство реальных сред (глина, суглинок, песок, а также металлы) обладает тем свойством, что для него зависимость $p(\epsilon)$ является линейной на больших диапазонах изменения ϵ .

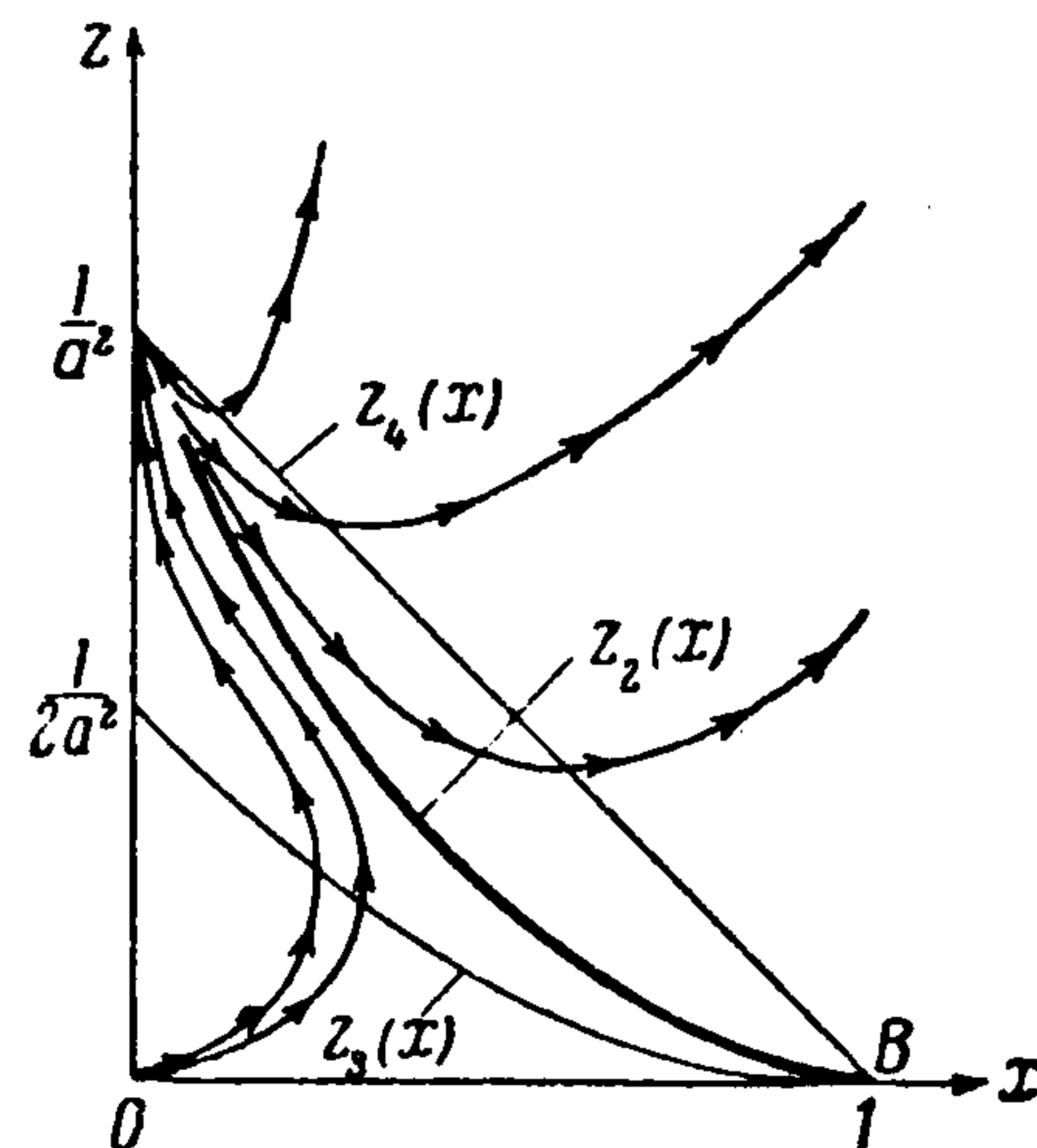
Для $n = -1$ семейство интегральных кривых уравнения (1.7), проходящих через прямую $x = 1$ и удовлетворяющих условию $z > 0$, дается соотношением (b — произвольная постоянная интегрирования)

$$z = \frac{(1-x)^2 + \sqrt{(1-x)^4 + b^2x^2}}{2a^2} \quad (2.1)$$

Для $n = -1$ кривая $z_1(x)$ (кривая скачков) имеет вид $z_1 = (1-x)^2 / 2a^2$ и совпадает с кривой $z_2(x)$, и обе они совпадают с интегральной кривой (2.1), для которой $b = 0$. Итак, все интегральные кривые, проходящие через прямую $x = 1$, идут выше $z_1(x)$ и $z_2(x)$, что соответствует распространению в физической плоскости звуковой волны. Ход интегральных кривых имеет характер, изображенный на фиг. 3 (стрелками указано направление роста λ). С качественной стороны этот случай идентичен случаям $n < -1$ предыдущего параграфа, и здесь имеют силу все сделанные там замечания. Однако то, что в этом случае не может возникнуть ударная волна, здесь уже не является наперед ожидаемым результатом, так как при $p''(\epsilon) = 0$ разрывные начальные данные могут и привести к ударной волне, и нет. В самом деле, рассмотрим задачу не только в цилиндрической, но и в плоской (удар по стержню) и сферической (сферический взрыв) постановке. Системе уравнений (1.7) и (1.8) будет соответствовать система

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{\nu + 1} \frac{z}{x} \frac{z - [1 - (2 - \nu)x + (1 - \nu)x^2] / a^2}{z - (1-x)^2 / (1 + \nu)a^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{x}{\lambda} \frac{z - (1-x)^2 / (1 + \nu)a^2}{z - (1-x)^2 / a^2} \quad (2.3)$$



Фиг. 3

где $\nu = 0$ для плоского, $\nu = 2$ для сферического случая [1]. Для $\nu = 0$ получаем из (2.2) и (2.3) $z = b^2x^2$ и $x = b_1^2\lambda$. Легко показать, что в этом случае возникает ударная волна, между волной и поршнем лежит зона постоянного течения. Задача решается при условиях (1.11). Напротив, при $\nu = 2$ ударная волна возникнуть не может, а идет звуковая волна, что легко доказать, изучая общее решение уравнения (2.2) при $\nu = 2$:

$$\sqrt{z} [z - (1-x)^2 / a^2] = b^2x$$

Задача решается при условиях (1.12).

Теперь возвратимся к рассматриваемой задаче. Подставляя (2.1) в (1.8), получаем

$$\ln \lambda = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{(1-x)^4 + b^2x^2} - (1-x)^2}{x\sqrt{(1-x)^4 + b^2x^2}} dx \quad (2.4)$$

и оба условия (1.12) сводятся к одному (обозначим $\lambda_0 = U\rho_0/k$):

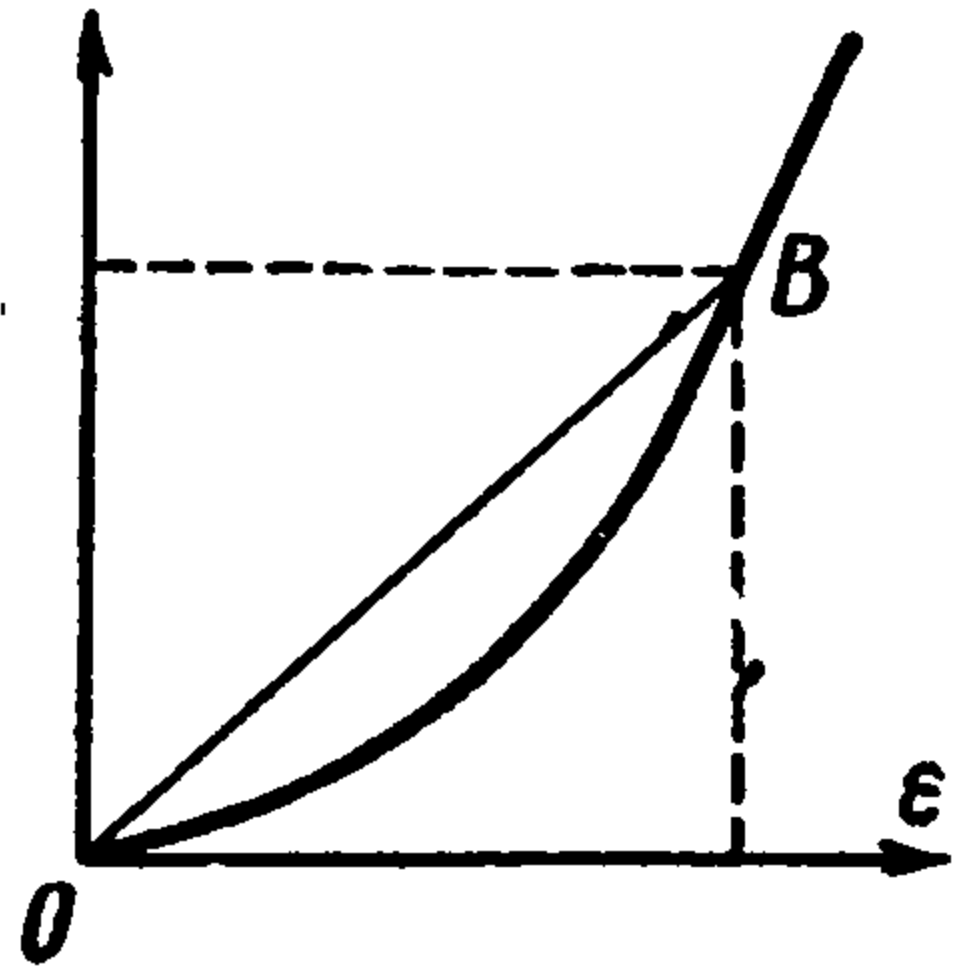
$$\ln \lambda_0 = \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{\sqrt{(1-x)^4 + b^2x^2} - (1-x)^2}{x\sqrt{(1-x)^4 + b^2x^2}} dx \quad (2.5)$$

Отсюда находим b . Для практически встречающихся U ($\lambda_0 \ll 0,5$) из (2.5) можно получить приближенную формулу $b = 2\sqrt{1 - 2\lambda_0^2} / \lambda_0^2$. Далее, легко получить соотношение из (1.4), (1.5), (2.1)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{(1-x)^4 + b^2x^2}}}$$

и, следовательно, для частиц у поршня ($x = 1, \lambda = 1$) имеем $\rho_0 / \rho = \lambda_0 V \bar{b} / V \bar{2}$. Подставляя сюда приближенную формулу для b и пренебрегая в разложении по степеням λ_0 членами порядка выше третьего, получаем, что у поршня $\varepsilon = 1 - \rho_0 / \rho = 0.5\lambda_0^2$.

§ 3. Если кривая $p(\varepsilon)$ всюду обращена выпуклостью вниз, т. е. $p''(\varepsilon) > 0$, то возникает ударная волна, и можно предложить следующую схему решения. Принимается (фиг. 4), что зависимость $p(\varepsilon)$ является линейной, начиная с некоторых, достаточно больших значений ε , причем возникает такая ударная волна, что изображающая точка на фиг. 4 попадает из нуля на прямолинейную часть диаграммы. Очевидно, между волной и поршнем будут справедливы (2.1) и (2.4), изменяются лишь граничные условия.



Фиг. 4

Пусть (фиг. 4) непосредственно за ударной волной $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $p = p_1$. Пусть также

$$p_1 - p_0 = E_1 \varepsilon_1 \quad \text{или} \quad p_1 - p_0 = k_1^2 (\rho_0^{-1} - \rho_1^{-1})$$

Очевидно, $E_1 = k_1^2 \rho_0$. Далее, пусть для линейной части $p(\varepsilon)$ имеем

$$p - p_0 = E\varepsilon + \text{const}, \quad p - p_0 = k^2 (\rho_0^{-1} - \rho^{-1}) + \text{const}, \quad E = k^2 \rho_0$$

(ясно, что $E > E_1$). Тогда аналогично выводу кривой (1.10) можно вывести уравнение луча OB на фиг. 4; это будет

$$z_1 = (1 - x_1)^2 / a_1^2 \quad (a_1 = k_1 / \rho_0 U)$$

С качественной стороны этот случай идентичен случаям $n > -1$ (§ 1), но здесь неизвестна постоянная k_1 (или E_1, a_1).

Добавляя к двум первым соотношениям (1.9) зависимость $p_1 - p_0 = E_1 \varepsilon_1$ и учитывая, что $ut = rx$, можно получить два равенства (где c — скорость ударной волны):

$$x_1 = \varepsilon_1, \quad c = \sqrt{E_1 \rho_0^{-1}} = k_1 \rho_0^{-1}$$

Теперь легко выписать граничные условия:

$$\begin{aligned} \lambda = 1 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad \lambda = a_1^{-1} \quad \text{при} \quad x = x_1 \\ z = (1 - x_1)^2 / a_1^2 \quad \text{при} \quad x = x_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из фиг. 4 ясно, что $E_1 / E = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_1 = a^2 / a_1^2$. Теперь можно вывести зависимость $a_1 = \sqrt{(x_1 - \varepsilon_0) x_1^{-1} / \lambda_0}$. Используя ее, первые два условия (3.1) можно свести к одному:

$$\ln \lambda_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_1 - \varepsilon_0} = \frac{1}{2} \int_1^{x_1} \frac{\sqrt{(1-x)^4 + b^2 x^2} - (1-x)^2}{x \sqrt{(1-x)^4 + b^2 x^2}} dx \quad (3.2)$$

а третье условие переписывается в виде

$$b = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{x_1 - \varepsilon_0} \frac{(1 - x_1)^2}{\sqrt{x_1}} \quad (3.3)$$

Итак, при заданных λ_0 и ε_0 нужно совместно решить (3.2) и (3.3) и найденное значение b подставить в (2.1) и (2.4). Легко видеть, что постоянная b и в этой задаче (при фиксированном ε_0), и в задаче § 2 зависит только от λ_0 , а не от ρ_0, U, k в отдельности. Полезно заметить, что для практически встречающихся величин U ($\lambda_0 \ll 0,5$) условие (3.2) может быть приблизительно заменено соотношением

$$\lambda_0^2 \frac{x_1}{x_1 - \varepsilon_0} \frac{2 + \sqrt{4 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2 x_1^2}} = 1$$

Поступила 15 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4, М., 1957.