К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Д. Д. Ивлев

(Москва)

В работе рассмотрены некоторые экстремальные свойства идеального пластического течения при условии пластичности Треска, выделяющие это условие пластичности из определяемого ниже класса возможных условий пластичности.

Пластическое состояние тела определяется его остаточными деформациями; такое определение подразумевает процесс разгрузки, и, поскольку сам факт появления пластического состояния связан с характерным отклонением диаграммы напряжение — деформация от линейной, в простейшем случае учет пластических свойств заключается именно в учете характерного изменения механических свойств материала при нагружении.

Пластическое течение возникает в точке жестко-пластического тела при достижении некоторой комбинацией напряжений в ней своего предельного значения.

Условие пластичности запишем в виде

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const} \tag{1}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения.

Наибольшая возможная простота условия пластичности в значительной мере достигается предположениями об однородных свойствах тела, об идеальном и изотропном характере пластического течения.

Первое предположение в простейшем случае предполагает независимость условия пластичности от ряда параметров, характеризующих изменение свойств материала в исходном состоянии.

Второе предполагает отсутствие упрочнения и, следовательно, независимость соотношения (1) от некоторых параметров, характеризующих изменение ряда свойств материала в процессе пластического течения.

Третье предположение следует разделить на два предположения: о первоначальной изотропии тела и об отсутствии приобретенной анизотропии. Эти предположения по существу являются независимыми; в самом деле, можно предположить, что первоначально изотропное тело в процессе пластического течения становится анизотропным, что собственно подтверждают все опытные данные, или же что первоначально анизотропное тело сохраняет эти свойства при пластическом течении (аналогично тому, как это имеет место, например, в теории анизотропного упругого тела). Очевидно, наиболее упрощающим предположением является предположение об отсутствии всяких свойств анизотропии, что и принимается в теории пластичности, ограничивающейся изучением влияния изменения механических свойств материала при нагружении.

Свойства идеального и изотропного характера пластического течения приводят к тому, что функция (1) сохраняет свой вид во время всего процесса пластического течения, причем свойства изотропии требуют, чтобы функция (1) обладала инвариантными свойствами относительно определенного класса преобразований аргументов, обеспечивающих их равноправие.

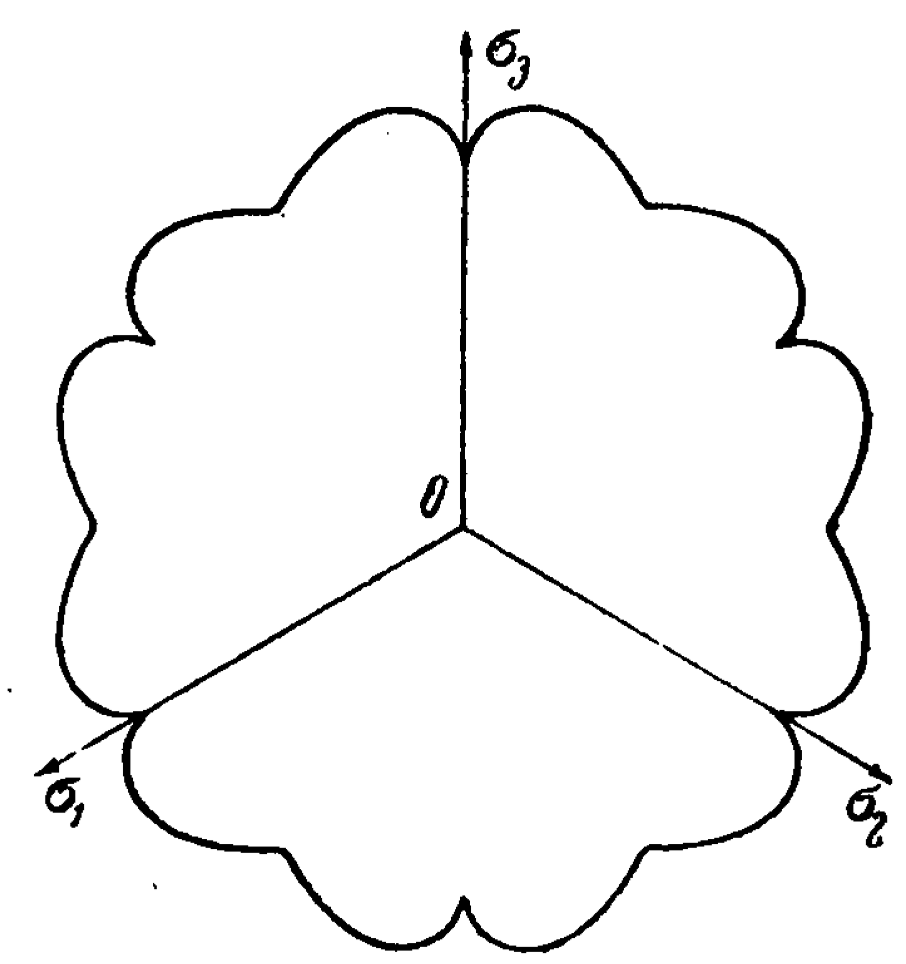
Предположения об идеальном и изотропном характере пластического течения металлов находятся в явном расхождении с данными экспериментальных исследований, указывающих на неизменное преобретение металлами анизотропных свойств, а также существенные отклонения от идеального характера деформирования при пластическом течении. Но при построении математической теории пластичности эти свойства реального материала учитываются в последующих обобщениях теории, не учитывающей эти явления.

Независимость пластических свойств материала от гидростатического давления приводит к тому, что в пространстве главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 условие пластичности (1) интерпретируется в виде цилиндра с образующими, параллельными прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, поэтому для уяснения свойств условия пластичности достаточно рассмотреть свойства кривой, лежащей в пересечении цилиндра, интерпретирующего условие пластичности, с плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Эта кривая, которую будем в дальнейшем называть кривой пластичности, представлена на фиг. 1.

Простейшие необходимые свойства кривой пластичности состоят в следующем [6a]: кривая пластичности не проходит через начало координат и любой радиус, проведенный из начала координат, пересекает ее один и только один раз. Необходимость выполнения этих свойств полностью очевидна и не нуждается в пояснениях.

Далее свойства изотропии материала обеспечивают симметрию кривой пластичности относительно осей σ_1, σ_2, σ_3 (фиг. 1).

Существенное упрощение достигается предположением о независимости условия пластичности (1) от перемены знака напряжений на обратный. Механически это означает допущение об одинаковости свойств материала при растягивающих и сжимающих напряжениях. Независимость условия пластичности от перемены знака приводит очевидным образом к тому, что кривая пластичности симметрична относительно осей, перпендикулярных к осям σ_1, σ_2, σ_3, и, следовательно, состоит из двенадцати одинаковых дуг (фиг. 1).



Фиг. 1

Итак, при построении теории пластичности, учитывающей характерное изменение механических свойств материала, делаются предположения об:

1) отсутствии в теле упругих деформаций (схема жестко-пластического тела);

2) однородности свойств тела;

3) отсутствии упрочнения (идеальный характер течения);

4) отсутствии явлений начальной и преобретенной анизотропии;

5) отсутствии влияния гидростатического давления на пластические свойства материала;

6) отсутствии различия между поведением металла при растягивающих или сжимающих напряжениях.

Здесь не приведены предположения об отсутствии влияния температуры, пренебрежимости инерционными и другими массовыми силами и т. д., словом, те предположения, которые хорошо известны из теории упругости и т. д.

Предположения 2)—6) позволили существенным образом упростить вид условия пластичности (1), причем смягчение любого из предположений 1)—6) приводит к обобщениям рассматриваемой теории пластичности.

Очевидно, что неопределенная форма кривой пластичности, а также неустановленный вид связи между напряжениями и пластическими деформациями открывают большие возможности для различных построений, однако при этом необходимо ясно представлять себе, что в определенном круге идеализированных свойств материала описываемые процессы должны обладать свойствами полной определенности и единственности, а также должны характеризоваться экстремальными свойствами по отношению ко всем возможным процессам.

Одним из существенных шагов по построению теории пластичности был сделан Мизесом, установившем экстремальные свойства пластического течения в случае, когда условие пластичности выступает в качестве пластического потенциала. Под пластическим потенциалом понимается функция напряжений $g(\sigma_{ij})$, определяющая отношение компонент пластической деформации. Именно при простейшей связи $g \equiv f$ удается установить определенные экстремальные свойства пластического течения

Теорема Мизеса устанавливает, что при зависимости

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda\,(\partial f(\sigma_{ij}) \,/\, \partial\sigma_{ij}) \qquad (2)$$

где ε_{ij} — компоненты пластической деформации, работа напряжений на соответствующих приращениях деформаций максимальна.

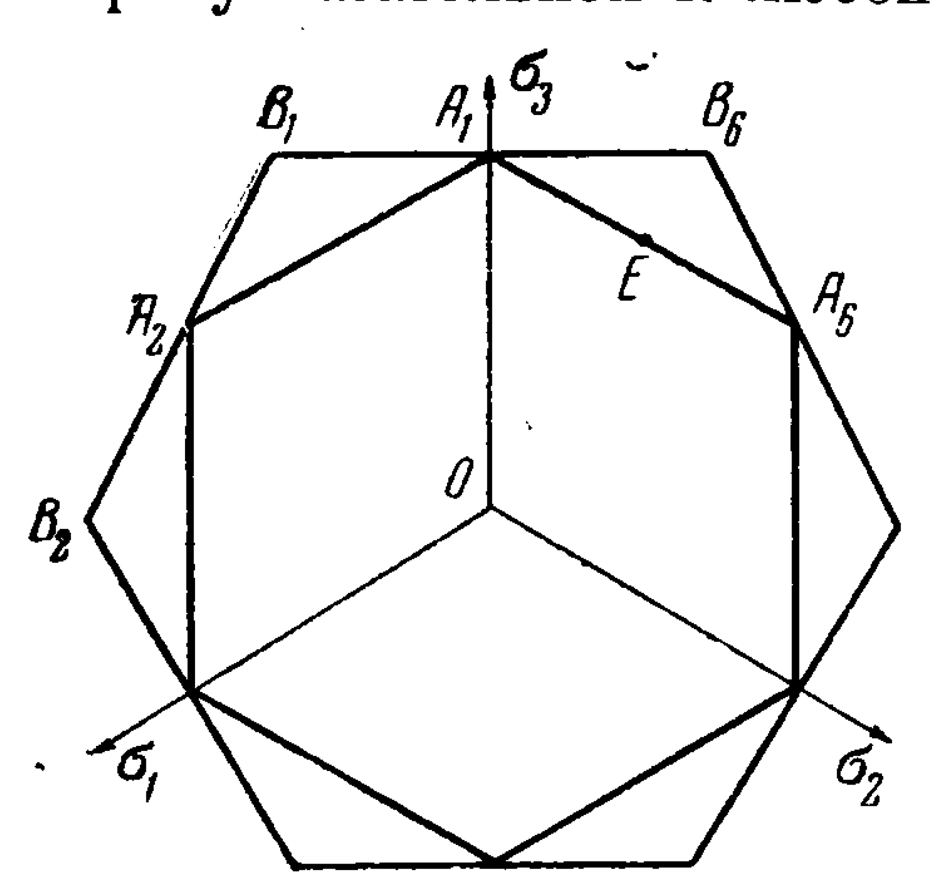
Если обратиться к векторному представлению, то зависимость (2) означает, что направление вектора приращений пластических деформаций совпадает с направлением нормали к поверхности, интерпретирующей условие пластичности. Закон течения, определяемый условием (2), называется ассоциированным законом течения.

Обобщением результатов Мизеса явилось построение так называемой теории обобщенного пластического потенциала, принадлежащее Койтеру. Согласно Койтеру угловые точки поверхности условия пластичности интерпретируются как предельные для соответствующих гладких поверхностей; поэтому в угловых точках направление вектора приращений пластических деформаций может принимать любое направление, ограниченное нормалями касательных плоскостей к точкам, лежащим как угодно близко к угловым.

Следует отметить локальный характер экстремальных свойств, устанавливаемых теоремой Мизеса.

Исследования Хилла, Прагера, Койтера, Друккера и др. показали, что теория пластического потенциала, в том числе и обобщенная, позволяет сформулировать определенные теоремы единственности, а также установить интегральные вариационные принципы. Эти исследования показали, что теория пластического потенциала является единственно приемлемой для установления отмеченных свойств единственности и экстремальности пластического течения и, следовательно, она является необходимым логическим звеном при построении простейшей теории пластичности, причем обнаружилось, что кривая пластичности необходимо должна обладать свойством невогнутости, ибо в противном случае теория приводит к неопределенности решений.

Кривая пластичности является невогнутой, если она всегда лежит по одну сторону касательной к любой ее точке, причем в угловых точках кривой пластичности касательная может принимать любое направление, ограниченное направлениями касательных справа и слева к угловой точке.



Фиг. 2

Аналитически условие невогнутости дифференцируемой функции (1) записывается в виде

$$f(\sigma_{ij}') - \sigma_{ij}' \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geqslant f(\sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) и их обобщения для кусочно-гладких поверхностей позволяют установить, что если на части поверхности идеального жестко-пластического тела заданы поверхностные силы, а на другой его части — приращения перемещений, то работа данных поверхностных сил на соответствующих приращениях перемещений достигает минимума для действительного поля приращений деформаций среди всех кинематически возможных полей приращений деформаций. Можно установить также, что работа поверхностных сил на заданных приращениях перемещений достигает максимума для действительного поля напряжений среди статически возможных полей напряжений.

Отметим, что кинематически возможное поле приращений деформаций определяется полем приращений перемещений, удовлетворяющим заданным граничным условиям, в котором возможны кинематичес и допустимые разрывы приращений перемещений.

Под статически возможным полем напряжений понимается поле напряжений, удовлетворяющее уравнениям равновесия, условию пластичности, и в котором возможны статически допустимые разрывы напряжений.

Согласно теоремам единственности граничные условия определяют единственное пластическое напряженное состояние и т. д.

Теоретические соображения позволяют построить многоугольники $A_1 \ldots A_6$ и $B_1 \ldots B_6$, очевидным образом ограничивающие возможные симметричные формы кривой пластичности (фиг. 2). Однако при этом все же существует бесконечное множество кривых пластичности, позволяющих развить теории идеального жестко-пластического тела, удовлетворяющие приведенным выше соображениям единственности определенности и экстремальности описываемых процессов.

Задачу определения условия пластичности будем рассматривать как вариационную проблему, определяющую процесс пластического течения, обладающий некоторыми экстремальными свойствами по отношению к процессам, определяемыми возможными условиями пластичности. Под возможными условиями пластичности будем понимать условия пластичности, кривые пластичности которых выпуклы, симметричны и лежат между шестиугольниками фиг. 2.

Нетрудно видеть, что соображения об определении истинного условия пластичности из числа возможных аналогичны по идее соображениям Мизеса об определении истинного закона пластического течения среди возможных его определений.

Обратимся к установлению локальной теоремы, позволяющей определить искомое условие пластичности. Примем, что истинное условие пластичности отличается от всех возможных тем, что оно сообщает работе напряжений на заданных приращениях деформаций минимальное значение.

Пусть заданы приращения деформации $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$. Работа напряжений в этом случае примет вид:

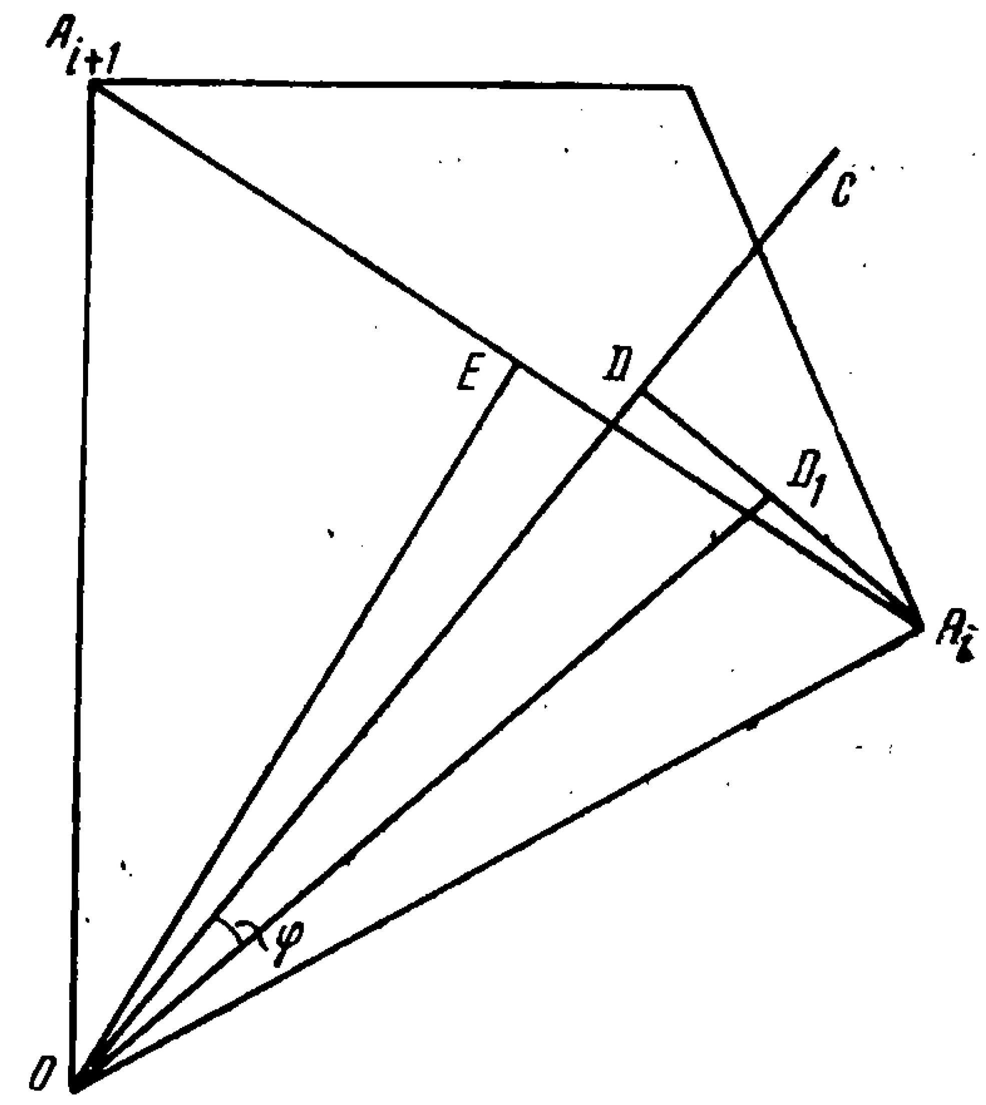
$$dW = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \quad (4)$$

или в векторном представлении

$$dW = |\,\mathbf{d\varepsilon}\,|\,|\,\boldsymbol{\sigma}\,| \cos\varphi$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{d\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$.

Величина $|\,\mathbf{d\varepsilon}\,|$ задана, поэтому обратимся к рассмотрению величины $|\,\sigma\,| \cos\varphi$.



Фиг. 3

Очевидно, что если вектор приращений деформаций имеет направление OC, не совпадающее с направлением OA_i (фиг. 3), то, опуская из точки A_i перпендикуляр OD на OC, получим, что среди возможных кривых пластичности при заданном векторе приращений пластических деформаций, направление которого совпадает с OC, минимальное значение работы определяется выражением

$$dW = |\,\mathbf{d\varepsilon}\,|\,|\,\sigma\,| \qquad (|\,\boldsymbol{\sigma}\,| = OD)$$

Очевидно, что $OD_1 \cos\varphi = OD$ (фиг. 3).

Исключая из рассмотрения точки A_i, получим, что наименьшее возможное значение работы напряжений на заданных приращениях деформации изображается отрезком OE. Следовательно, искомая кривая пластичности является шестиугольником $A_1A_2 \ldots A_6$, интерпретирующим хорошо известное условие пластичности Треска

$$\max\{\,|\,\sigma_1 - \sigma_2\,|,\ |\,\sigma_2 - \sigma_3,\ |\,\sigma_3 - \sigma_1\,|\} - 2k = 0 \qquad (k - \text{const})$$

Уравнение любой прямой A_iA_{i+1} можно записать в виде $\sigma_i - \sigma_j = 2k$. Отсюда следует, что

$$d\varepsilon_k = 0,\ d\varepsilon_i + d\varepsilon_j = 0$$

Тогда легко получить, что

$$dW = 2kd\varepsilon_i = -2kd\varepsilon_j.$$

Рассмотрим точку A_i; в ней

$$\sigma_i - 2k = \sigma_j = \sigma_k.$$

Отсюда следует, что $dW = 2kd\varepsilon_i$, причем это выражение не зависит от кривизны кривой пластичности в точке A_i.

Этим завершается доказательство локальной теоремы, определяющей экстремальные свойства условия пластичности Треска по отношению ко всем возможным условиям пластичности.

Рассмотрим теорему, устанавливающую интегральные экстремальные свойства условия пластичности Треска по отношению ко всем возможным условиям пластичности. Покажем, что в идеальном жестко-пластическом теле поверхностные силы X_i совершают на заданных приращениях перемещений du_i^* минимальную работу для условия пластичности Треска среди всех возможных условий пластичности.

Пусть напряжения, деформации и поверхностные силы σ_i', ε_i', X_i' отвечают некоторому возможному условию пластичности, а напряжения, деформации и поверхностные силы σ_i, ε_i, X_i — условию пластичности Треска. Необходимо показать, что

$$\int_s X_i' du_i^* ds - \int_s X_i du_i^* ds \geqslant 0 \tag{5}$$

Переходя к объемным интегралам, получим, что неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$\int_v \sigma_i' d\varepsilon_i' dv - \int_v \sigma_i d\varepsilon_i dv \geqslant 0 \tag{6}$$

Неравенство (6) преобразуем следующим образом:

$$\int_v \sigma_i' d\varepsilon_i' dv - \int_v \sigma_i d\varepsilon_i dv = \int_v |d\varepsilon'| |\boldsymbol{\sigma}'| \cos\varphi' dv - \int_v |d\varepsilon| |\boldsymbol{\sigma}| \cos\varphi dv =$$

$$= \int_v |d\varepsilon'| (|\boldsymbol{\sigma}'| \cos\varphi' - |\boldsymbol{\sigma}| \cos\varphi) dv + \int_v |d\varepsilon'| |\boldsymbol{\sigma}| \cos\varphi dv - \int_v |d\varepsilon| |\boldsymbol{\sigma}| \cos\varphi dv \geqslant 0 \tag{7}$$

Неравенство (7) имеет место, поскольку из локальной теоремы следует, что $|\sigma'| \cos\varphi' \geqslant |\sigma| \cos\varphi$, а неравенство

$$\int_v |d\varepsilon'| |\boldsymbol{\sigma}| \cos\varphi dv \geqslant \int_v |d\varepsilon| |\boldsymbol{\sigma}| \cos\varphi dv$$

справедливо, так как поле приращений деформаций $d\varepsilon_i'$ является кинематически возможным по отношению к напряженному состоянию σ_i, отвечающему условию пластичности Треска.

Аналогично может быть доказана теорема, утверждающая, что заданные поверхностные силы совершают максимальную работу для условия пластичности Треска среди всех возможных условий пластичности.

Указанные теоремы допускают различные обобщения, включающие рассмотрение жестких областей, упругих деформаций упрочнения и т. п.

В теории идеального жестко-пластического тела используются в основном условия пластичности Треска и Мизеса, причем многочисленные экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса лучше согласуется с экспериментальными данными, нежели условие пластичности Треска.

Не сомневаясь в правильности экспериментальных результатов, можно утверждать, что лучшее согласование условия пластичности Мизеса по сравнению с условием пластичности Треска объясняется влиянием факторов побочного характера, не имеющих отношений к теории идеального жестко-пластического тела, а именно анизотропией, упрочнением и т. п. Поэтому, если даже теория идеального жестко-пластического тела, построенная на использовании условия пластичности Мизеса, оказалась бы в общем случае лучше согласующейся с данными практики, то это было бы лишь за счет того, что условие пластичности Мизеса так видоизменяет условие пластичности Треска, что в какой-то мере позволяет учесть косвенным образом факторы неидеального поведения реальных материалов. Однако любое видоизменение условия пластичности Треска может претендовать в рамках идеального жестко-пластического тела лишь на практическую, но отнюдь не теоретическую ценность, что, кстати, имел в виду и сам Мизес, предлагая свое условие пластичности в качестве удобного математического приближения для пластичности Треска. Но в тех разделах пластичности, где оказалось возможным достичь определенных успехов, а именно в теории кручения и плоской деформации, условие пластичности Мизеса по существу совпадает с условием Треска.

Что же касается пространственных задач, то использование условия пластичности Мизеса привело к непреодолимым трудностям. С другой стороны, было показано [11], что использование условия пластичности Треска и ассоциированного закона течения приводит к статически определенным задачам, позволяющим применить с соответствующими обобщениями весь математический аппарат, развитый в теории пластического кручения и плоской задачи.

Выскажем несколько соображений о построении теории статики сыпучей среды. Свойства сыпучей среды в простейшем случае определяются зависимостью

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(\sigma_n) \tag{8}$$

где σ_n — нормальное давление. В предельном случае при $\varphi(\sigma_n) \equiv \text{const}$ будем иметь $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \tau_{\max}$, т. е. условие Треска. Теоретические соображения должны привести, очевидно, к жестко-сыпучей среде, движение которой определяется условием (8), рассматриваемым в качестве «сыпучего» потенциала, причем очевидно, что искомая зависимость (8) будет иметь вид:

$$\tau_{\max} = \varphi(\sigma_n) \tag{9}$$

Различные варианты теории будут определяться конкретными видами функции $\varphi(\sigma_n)$. Очевидно, что существенным обстоятельством является при этом доказательство статической определимости общей задачи для зависимости (9) в случае, когда имеет место полное предельное состояние, соответствующее наибольшей свободе движения сыпучего тела [11].

Наиболее важной проблемой дальнейшего развития теории пластичности является задача разумного определения упрочнения. Упрочнение, очевидно, связано с деформациями и в принципе может быть определено как инвариантная величина, непрерывно зависящая от деформаций (или их приращений и т. п.). Возможными определениями упрочнения является величина пластической работы, величина максимального или октаэдрического сдвига и т. п.

По-видимому, должны существовать экстремальные теоремы, определяющие свойства истинной меры упрочнения, выделяющие ее из класса возможных.

Возможно, что уже на этом этапе развития теория пластичности не сможет обойтись без привлечения термодинамических соотношений, без которых она обошлась в теории идеальной пластичности, подобно теории идеальной несжимаемой жидкости в гидромеханике.

На определенном этапе классическое построение теории пластичности, очевидно, окажется неспособным описать изучаемые процессы, что заставит перейти к изучению микроструктуры деформирования.

Поступила 3 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides. Mem. pr. d. s., t. 8, 1868; t. 20, 1872.
2. Saint-Venant B. Memoire sur l'etablissement des equations differentielles des mouvements interrieurs opers dans les solides ductiles an dela des limites ou l'elasticitè pourrait le ramener a leur premier etat. J. d. Math. pures et appl., s. 11. t. 16, 1871. Сб. пер. Теория пластичности. Изд-во иностранной литературы, 1948.
3. Prandtl L. Über die Eindringungfestigkeit (Harte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit im Schneiden. ZAMM, Bd. 1, H. 1, 1921. Сб. пер. Теория пластичности. Изд-во иностранной литературы, 1948.
4. Mises R. Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen. ZAMM, Bd. 8, 1928.
5. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. АН СССР, 1942.
6. Hill R. a) The Mathematical theory of Plasticity. Oxford, 1950. М., Гостехтеоретиздат, 1956; b) On the problem of uniqueness in the theory of a rigidplastic solid I—IV. J. Mech. Ph. Solids, № 4, 1956; № 1, 1956.
7. Prager W., Hodge Ph. J. Theory of perfectly Plastic Solids. New York — London, 1951. М., Изд-во иностранной литературы, 1956.
8. Prager W. a) On the use of singular yield conditions and associated flow rules. J. Appl. Mech., 20, 3, 1953; b) The theory of plasticity: a survey of recent achievements. London, 1955.
9. Coiter W. T. Stress-strain relations uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular jield surfage. Quart. Appl. Math., 11, 3, 1953.
10. Drucker D. C. a) A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. Proc. First US Nat. C. Appl. Mech. ASME, 1951; b) On uniqueness in the theory of plasticity. Quart. Appl. Math., 14, 1, 1956. Сб. пер. Механика, 4. Изд-во иностранной литературы, 1956.
11. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.