В заключение следует сделать два замечания.

1. В последнее время Л. Г. Лойцянский высказал предположение, что вблизи точки отрыва $C = (R^*)\mathrm{const}$, так как здесь $\tau_0 = 0$ и влияние вязкости, а вместе с ним рейнольдсова числа $R^*$, исчезает. Такое предположение незначительно сказывается на коэффициентах уравнений (1.10), (2.6) и, следовательно, почти не влияет на $f$ или $\varphi$. При этом, однако, толщина вытеснения $\delta^*$ вблизи точки отрыва уже будет определяться не по формуле (2.8), а несколько иным путем, изложенным в монографии [2].

2. Как в случае ламинарного [3], так и турбулентного движения, в первом приближении для упрощения расчета пограничного слоя было принято $h = \delta^{**} / \delta^* = \mathrm{const}$. Обращаясь к интегральному соотношению импульсов (1.1), нетрудно прийти к выводу, что допущение оправдывается тем больше, чем меньшую роль играют слагаемые с $h$ в уравнении (1.1). Это в свою очередь будет иметь место при сильно выраженной нестационарности, когда величины, характеризующие пограничный слой, меняются во времени быстрее, чем с изменением $x$, и $\partial U / \partial x$ мало по сравнению с $(\partial U/\partial t)/U$. Для более точных расчетов, как ламинарного, так и турбулентного пограничных слоев, можно отказаться от допущения о постоянстве отношения $\delta^{**}/\delta^*$ и аппроксимировать $h(f)$ линейной функцией; при этом дифференциальное уравнение относительно $\varphi$ станет нелинейным.

Приношу глубокую благодарность Л. Г. Лойцянскому за помощь в работе и постоянное внимание.

Поступила 6 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. ГТТИ, 1957.
3. Розин Л. А. Приближенный метод интегрирования уравнений нестационарного ламинарного слоя в несжимаемой жидкости. ПММ, т. XXI, вып. 5, 1957.

---

# К ЗАДАЧЕ О ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УДАРЕ СФЕРЫ

**В. И. Моссаковский, В. Л. Рвачев**

(Днепропетровск — Бердянск)

Решение задачи о горизонтальном гидродинамическом ударе сферы при наличии свободной поверхности жидкости было найдено Э. Л. Блохом [1] в виде ряда, содержащего сферические функции. В настоящей заметке излагается метод, при помощи которого находится решение этой задачи в замкнутом виде.

§ 1. Пусть в жидкость, заполняющую полупространство $z \geqslant 0$, погружена сферическая оболочка так, что ее смоченная поверхность имеет уравнение $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Предположение, что радиус сферы равен единице, очевидно, не нарушает общности рассуждений.)

Пусть затем сфера приходит во внезапное поступательное движение вдоль оси $Ox$ со скоростью $U_0$. Тогда, имея в виду, что потенциал скоростей $\varphi(x, y, z)$ возмущенного движения жидкости есть гармоническая внутри жидкости функция, связанная с импульсивным давлением $p_t$ равенством $p_t = -\rho\varphi$, где $\rho$ — плотность жидкости, приходим к следующим условиям:

$$\varphi(x, y, 0) = 0 \qquad \text{при} \qquad x^2 + y^2 > 1 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = U_0 x \qquad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0) \tag{1.2}$$

$$\operatorname{grad}\varphi \to 0 \qquad \text{при} \qquad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty \tag{1.3}$$

Легко убедиться, что функция

$$\psi(x, y, z) = r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.4}$$

гармоническая вместе с функцией $\varphi(x, y, z)$. Из условий (1.1) и (1.2) находим

$$\psi(x, y, 0) = 0 \qquad \text{при } x^2 + y^2 > 1 \tag{1.5}$$

$$\psi(x, y, z) = U_0 x \qquad \text{при } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (z > 0) \tag{1.6}$$

Пусть

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) - U_0\frac{x}{r^3}. \tag{1.7}$$

Тогда $\Psi(x, y, z) = 0$ при $r = 1$. На основании теоремы Кельвина функция

$$\Psi^*(x, y, z) = -\frac{1}{r}\Psi\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{z^2}\right)$$

будет гармонической в области $r < 1$. Очевидно, что $\Psi = \Psi^* = 0$ при $r = 1$. Кроме того,

$$\left.\frac{\partial\Psi^*}{\partial r}\right|_{r=1} = \left.\left(\frac{1}{r^2}\Psi + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\right|_{r=1} = \left.\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right|_{r=1} \tag{1.8}$$

Таким образом, функция $\Psi^*(x, y, z)$ является аналитическим продолжением функции $\Psi(x, y, z)$ через сферу $r = 1$. Пусть $F(x, y, z)$ есть функция, равная $\Psi(x, y, z)$ при $r > 1$ и $\Psi^*(x, y, z)$ при $r < 1$. Тогда $F(x, y, z)$ будет гармонической в полупространстве $z > 0$ функцией, удовлетворяющей при $z = 0$ следующим граничным условиям:

$$F(x, y, 0) = \begin{cases} U_0 x & \text{при } x^2 + y^2 < 1 \\ -\dfrac{U_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \text{при } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

§ 2. Пусть $F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)$, где $F_1$, $F_2$ — гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$F_1(x, y, 0) = \begin{cases} U_0 x & \text{при } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$F_2(x, y, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^2 + y^2 < 1 \\ -\dfrac{U_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \text{при } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Легко убедиться, что

$$F_2(x, y, z) = -\frac{1}{r}F_1\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

Поэтому

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) - \frac{1}{r}F_1\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \tag{2.3}$$

Функцию $F_1(x, y, z)$ находим, решая задачу Дирихле для полупространства:

$$F_1(x, y, z) = -\frac{U_0 z}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\frac{\xi\, d\xi\, d\eta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}\right)^3} \tag{2.4}$$

Учитывая формулы (1.4), (1.7), (2.3) и переходя к сферическим координатам

$$x = r\sin\theta\cos\omega,\ y = r\sin\theta\sin\omega,\ z = r\cos\theta$$

получим

$$\varphi(r, \theta, \omega) = -\frac{U_0 \sin\theta\cos\omega}{2r^2} - \frac{U_0}{2\pi}\cos\theta\int_0^{2\pi}\cos\alpha\, d\alpha\left\{\int_r^\infty dr\int_0^{1/r}\frac{t^2\,dt}{[1-2t\sin\theta\cos(\omega-\alpha)+t^2]^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \int_r^\infty \frac{dr}{r^3}\int_0^r \frac{t^2\,dt}{[1-2t\sin\theta\cos(\omega-\alpha)+t^2]^{3/2}}\right\} \tag{2.5}$$

В частности, при $r = 1$ можно получить

$$\varphi(1, \theta, \omega) = -\frac{U_0}{2}\sin\theta\cos\omega - \frac{U_0}{2\pi}\cos\theta\cos\omega\int_0^{2\pi} P(\sin\theta\cos\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \tag{2.6}$$

где

$$P(z) = \frac{1+3z}{(1+z)\sqrt{2(1-z)}} + \frac{1-3z}{2(1-z^2)} - \frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-z}}\right) \tag{2.7}$$

Аналогично можно получить решение так называемой «внутренней» задачи о горизонтальном ударе сферической оболочки, заполненной до половины жидкостью. Для этой задачи, например,

$$\varphi^*(1, \theta, \omega) = U_0\sin\theta\cos\omega - \frac{U_0}{2}\cos\theta\cos\omega\int_0^{2\pi} P^*(\sin\theta\cos\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \tag{2.8}$$

где

$$P^*(z) = -\frac{1+3z}{(1+z)\sqrt{2(1-z)}} + \frac{2z}{1-z^2} + \frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-z}}\right) \tag{2.9}$$

§ 3. Для сравнения с решением, данным Э. Л. Блохом, подсчитан коэффициент $\lambda_x$ присоединенной массы сферы, исходя из формулы

$$\lambda_x = -\frac{P_t}{{}^2/_3\,\rho\pi U_0} \tag{3.1}$$

где $P_t$ — равнодействующая импульсивных сил давления, действующих на смоченную поверхность сферы:

$$P_t = -\iint_{(s)} p_t\cos(n, Ox)\, ds \qquad (ds = \sin\theta\, d\theta\, d\omega) \tag{3.2}$$

Замечая, что $p_t = -\rho\varphi$, получим

$$\lambda_x = \frac{1}{{}^2/_3\rho\pi U_0}\int_0^{2\pi}\cos\omega\, d\omega\int_0^{{}^1/_2\pi}\sin^2\theta\varphi(1, \theta, \omega)\, d\theta \tag{3.3}$$

Учитывая формулу (2.6), после вычисления квадратур получим

$$\lambda_x = \frac{4}{\pi} - 1 = 0.27323954 \tag{3.4}$$

Подобным образом для внутренней задачи находим, что

$$\lambda_x^* = 4\pi^{-1} - {}^7/_8 = 0.39823954$$

В работе Э. Л. Блоха приведены следующие значения этих же коэффициентов $\lambda_x = 0.27322$, $\lambda_x^* = 0.39822$.

Поступила 29 X 1957

## ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Э. Л. Горизонтальный гидродинамический удар сферы при наличии свободной поверхности жидкости. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.