

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Розин

(Ленинград)

Для приближенного расчета стационарного турбулентного пограничного слоя иногда делают предположение об аналогии между турбулентным и ламинарным пограничными слоями^[1]. Такой подход к исследованию турбулентного движения жидкости в пограничном слое позволяет получить некоторые важные результаты сравнительно простым путем. Поэтому представляется целесообразным распространить указанную аналогию и на нестационарные пограничные слои, тем более, что приближенные методы расчета стационарного^[2] и нестационарного^[3] ламинарного пограничного слоя также имеют много общего.

В настоящей статье излагается приближенный метод расчета нестационарного турбулентного пограничного слоя, основанный на аналогии между ламинарным и турбулентным нестационарными слоями. Приводятся примеры, позволяющие сделать некоторые качественные выводы.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим осредненное движение жидкости в турбулентном пограничном слое со скоростью внешнего потока, зависящей от времени. При этом будем предполагать, что структура турбулентных пульсаций и характер осредненных движений жидкости позволяют всякий раз считать справедливыми известные постулаты осреднения, которыми пользуются при выводе уравнений Рейнольдса^[2]. Тогда для осредненного течения жидкости в турбулентном пограничном слое можно записать уравнение импульсов в следующем виде:

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \delta^*}{\partial t} + \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x} (2\delta^{**} + \delta^*) + \frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t} \delta^* = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad (1.1)$$

Здесь, как обычно, положено

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (1.2)$$

где $u(x, y, t)$ — продольная скорость в слое, $U(x, t)$ — заданная скорость на внешней границе слоя, τ_0 — напряжение трения на поверхности обтекаемого тела, ρ — плотность жидкости, x, y — соответственно продольная и поперечная оси координат, t — время; бесконечный предел в интегралах (1.2) соответствует понятию асимптотического пограничного слоя.

Следуя идее расчета стационарного турбулентного слоя^[1], умножим обе части уравнения (1.1) на некоторую функцию $G(R^*)$ рейнольдсова числа R^* и введем обозначения

$$\zeta = \frac{\tau_0}{\rho U^2} G(R^*), \quad f = \frac{1}{U} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \varphi, \quad \varphi = \frac{\delta^* G(R^*)}{U} \quad \left(R^* = \frac{U \delta^*}{\nu} \right) \quad (1.3)$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости; уравнение (1.1) при этом примет вид:

$$G(R^*) \frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \frac{1}{U} G(R^*) \frac{\partial \delta^*}{\partial t} + \left[\frac{\partial U}{\partial x} \left(2 \frac{\delta^{**}}{\delta^*} + 1 \right) + \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \right] \varphi = \zeta \quad (1.4)$$

Полагая $\delta^{**} / \delta^* = h$, можно преобразовать два первых члена левой части равенства (1.4) следующим образом:

$$\frac{1}{U} G(R^*) \frac{\partial \delta^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{G(R^*)}{U} \delta^* \right] - \delta^* \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{G(R^*)}{U} \right] \quad (1.5)$$

$$G(R^*) \frac{\partial h \delta^*}{\partial x} = U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{G(R^*)}{U} h \delta^* \right] - h \delta^* U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{G(R^*)}{U} \right] \quad (1.6)$$

Вводя обозначение

$$m(R^*) = \frac{G'(R^*) R^*}{G(R^*)} = \frac{d \log G(R^*)}{d \log R^*} \quad (1.7)$$

представим выражения (1.5), (1.6) так:

$$\frac{1}{U} G(R^*) \frac{\partial \delta^*}{\partial t} = \frac{1}{1+m} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} (1-m) \varphi \right] \quad (1.8)$$

$$G(R^*) \frac{\partial h \delta^*}{\partial x} = \frac{U}{1+m} \left[\frac{\partial h \varphi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x} (1-m) h \varphi + m \frac{\partial h}{\partial x} \varphi \right] \quad (1.9)$$

Наконец, подставляя (1.8), (1.9) в уравнение (1.4), окончательно получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial h \varphi}{\partial x} + \left[\frac{\partial U}{\partial x} (3h + hm + m + 1) + 2 \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} + mU \frac{\partial h}{\partial x} \right] \varphi = (1+m) \zeta \quad (1.10)$$

Рассмотрим теперь величины f и ζ , определяемые формулами (1.3). В случае ламинарного нестационарного пограничного слоя [3] функция $G(R^*)$ равнялась R^* и величина f представляла собой параметр, характеризующий форму профилей скорости в различных сечениях слоя. При этом величины ζ и h являлись функциями этого параметра. Предположим, что и в случае турбулентного слоя можно определить такую функцию $G(R^*)$, которая позволила бы считать f параметром профилей скорости, а ζ и h рассматривать как функции f . Кроме того, замечая, что в ламинарном пограничном слое величина $G(R^*) = R^*$ обратно пропорциональна местному коэффициенту трения на пластинке [2,3], положим и в турбулентном слое $G(R^*) = (\rho U^2 / \tau_0)_{f=0}$, где значение R^* предполагается взятым для тела, обтекание которого рассматривается. Сделав такие допущения, определим вид функции $G(R^*)$ при помощи известного степенного закона скоростей и сопротивлений [2], который при пересчете на принятые выше величины дает

$$G(R^*) = 144.94 R^{*1/6} \quad (1.11)$$

Таким образом, принимая $m(R^*) = 1/6$ и определяя $G(R^*)$ по формуле (1.11), будем предполагать, что ζ и h представляют собой некоторые функции f или φ . Если бы удалось установить вид этих функций, то равенство (1.10) представило бы собой дифференциальное уравнение относительно φ , решение которого дало бы возможность при помощи (1.3) найти R^* , а следовательно, и все основные величины, характеризующие пограничный слой.

§ 2. Выбор зависимостей $\zeta(f)$ и $h(f)$. Приближенный расчет нестационарного турбулентного слоя. Так же как это делается при расчете стационарного турбулентного слоя [1], воспользуемся для определения зависимостей $\zeta(f)$, $h(f)$ предположением об аналогии между ламинарным и турбулентным нестационарными слоями. Для этого нормируем параметр f в ламинарном [3] и соответственно турбулентном нестационарном слое так, чтобы в точке отрыва потока от обтекаемого тела его значение равнялось единице. Тогда

$$f^\circ = \frac{f}{f_s} \quad (2.1)$$

где f_s — значение ненормированного параметра f в точке отрыва, а $^\circ$ у f означает нормированную величину. Далее нормируем зависимости ζ и h таким образом, чтобы при $f = f^\circ = 0$ они обращались в единицу, т. е.

$$\zeta^\circ = \frac{\zeta}{(\zeta)_{f=0}}, \quad h^\circ = \frac{h}{(h)_{f=0}} \quad (2.2)$$

Проводя указанную выше аналогию, будем считать, что функции $\zeta^\circ(f^\circ)$ и $h^\circ(f^\circ)$ имеют одинаковый вид как для ламинарного, так и для турбулентного нестационарного пограничного слоя.

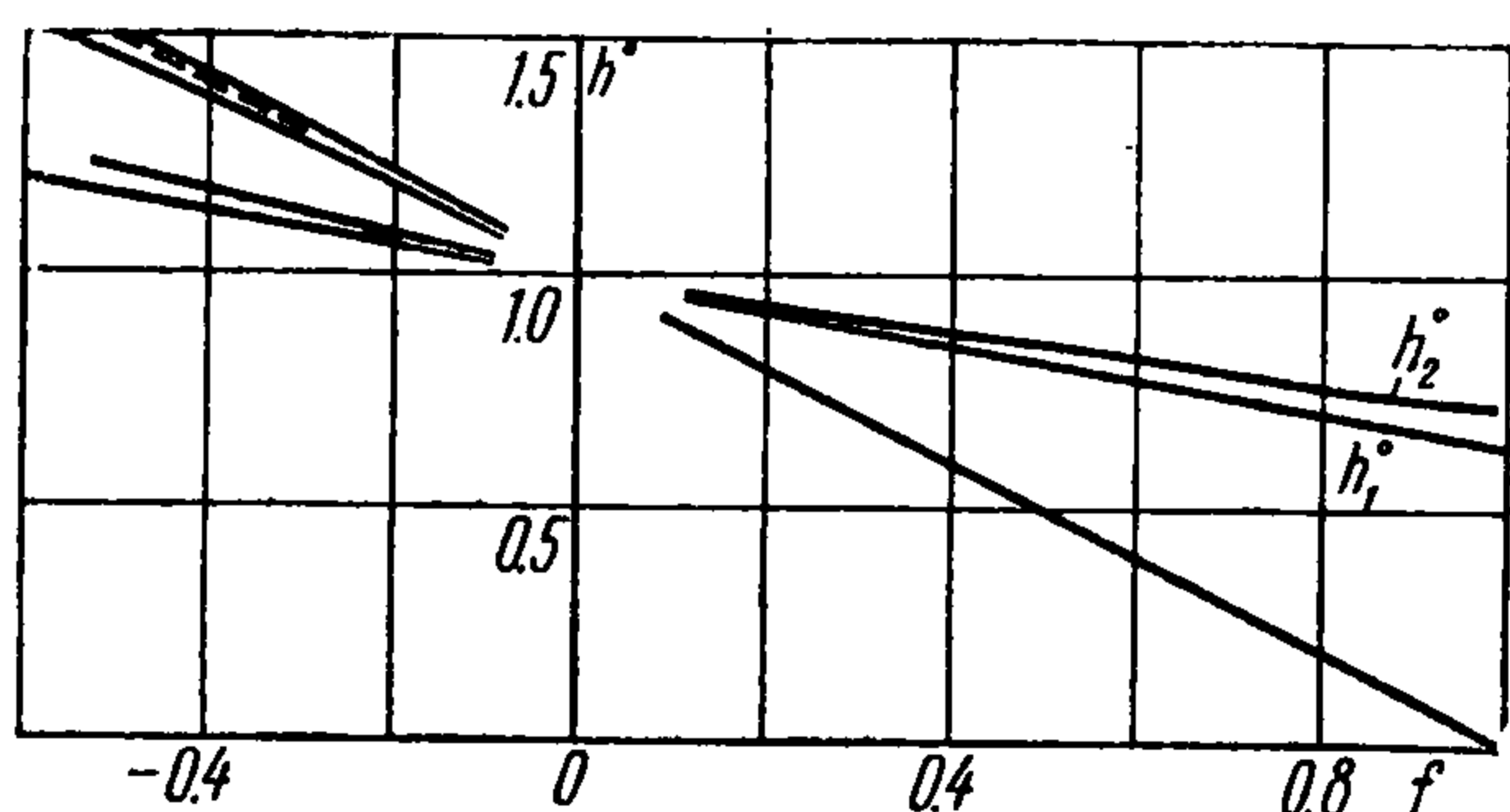
При расчете нестационарного ламинарного пограничного слоя [3] принимались два рода зависимостей ζ и h , отвечающих соответственно двум семействам профилей скорости в сечениях слоя. В качестве одного из профилей скорости была использована известная функция Хартри, в качестве другого — первое приближение к точному решению задачи о развитии пограничного слоя, имеющего скорость на границе, заданную в форме $U = t^n w(x)$. При этом последнее семейство скоростей, будучи взято из нестационарной задачи, приводило к более точным результатам в отношении времени начала отрыва потока на круглом цилиндре. Однако если перейти к нормированным функциям $\zeta^\circ(f^\circ)$ и $h^\circ(f^\circ)$, то разница между ζ_1° , h_1° , полученными при помощи функ-

ции Хартри, и ζ_2° , h_2° , взятыми из решения указанной нестационарной задачи, становится несущественной (фиг. 1). Из фигуры прежде всего следует, что функции h_1° и h_2° меняются незначительно и можно в дальнейшем принять $h^\circ = h_1^\circ = 0.922$ (среднее значение). В тех случаях, когда определяется отрыв пограничного слоя, более точные результаты, по-видимому, даст h° , равное отрывному значению $h_1^\circ = 0.642$. Переходя к функции $\zeta^\circ(f^\circ)$, представим ее в виде

$$\zeta^\circ(f^\circ) = 1 - f^\circ + \varepsilon(f^\circ) \quad (2.3)$$

На фигуре показана пунктиром прямая (2.3) при $\varepsilon = 0$. Эта прямая находится в вилке между сплошной кривой ζ_1 (сверху) и ζ_2 (снизу), так что в нужном нам интервале значений f° абсолютная величина $\varepsilon_\pm(f^\circ)$ невелика и в большинстве случаев можно считать $\zeta^\circ(f^\circ)$ линейной функцией.

После того как установлен вид нормированных функций ζ° , h° для определения ζ и h в турбулентном слое, остается найти значение f_s — параметра турбулентного слоя в точке отрыва — и величину h при $f = 0$. Последняя из указанных величин в большинстве работ [2] принимается равной $(h)_{f=0} = 0.714$. Что касается значения f_s , то оно до сих пор еще окончательно не установлено и отдельные попытки его определения



экспериментальным путем нуждаются в уточнении. Тем не менее, на основании имеющихся данных [1] можно записать в точке отрыва следующее равенство:

$$\frac{1}{U^2} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \delta^{**} \left(5.75 \log \frac{U \delta^{**}}{\nu} + 3.8 \right)^2 = -2 \quad (2.4)$$

которое позволяет при помощи (1.3) и $h = h^\circ (h)_{f=0} = 0.46$, где $h^\circ = 0.642$ взято в точке отрыва, положить $f_s = -5$.

Теперь остается выписать выражения для функций h и ζ , входящих в уравнение (1.10). Пользуясь приведенным выше средним значением h° , на основании второй формулы (2.2) будем иметь $h(f) = 0.66$. С другой стороны, полагая в (2.3) $\varepsilon = 0$ и считая в турбулентном слое $(\zeta)_{f=0} = 1$, из первой формулы (2.2) получим

$$\zeta(f) = 1 - \frac{1}{f_s U} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \varphi \quad (2.5)$$

Подставляя принятые h и ζ в уравнение (1.10), окончательно запишем его в форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + aU \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(b \frac{\partial U}{\partial x} + c \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \varphi = p \quad (2.6)$$

где

$$a = h = 0.66, \quad b = 3h + hm + m + 1 + \frac{1}{f_s} (1 + m) = 3.02 \quad (2.7)$$

$$c = 2 + \frac{1}{f_s} (1 + m) = 1.77 \quad p = 1 + m = 1.17$$

Дифференциальное уравнение (2.6) аналогично соответствующему уравнению, положенному в основу расчета ламинарного нестационарного пограничного слоя [3]. Этот факт является следствием сделанных предположений об аналогии между ламинарным и турбулентным нестационарными слоями.

Интегрирование уравнения (2.6) при соответствующих условиях решает задачу приближенного расчета нестационарного турбулентного пограничного слоя. Действительно, если известно φ , то при помощи (1.3) и (1.11) можно определить R^* по формуле

$$R^* = \left(0.006899 \frac{\varphi U^2}{\nu} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Затем величина δ^* находится из R^* и в свою очередь $\delta^{**} = h\delta^*$. Напряжение трения на обтекаемой поверхности τ_0 выражается следующим образом:

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{\zeta(f)}{G(R^*)} = \mu \varphi^{-1/2} \left(0.006899 \frac{U^2}{\nu} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{f_s U} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \varphi \right] \quad (2.9)$$

Отсюда условие отрыва пограничного слоя $\tau_0 = 0$ записывается в виде

$$\frac{1}{U} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \varphi = f_s \quad (2.10)$$

Все предыдущие рассуждения легко обобщаются на случай осесимметричного нестационарного турбулентного пограничного слоя. Действительно, пользуясь уравнением импульсов, которое будет отличаться от (1.1) только наличием в левой части дополнительного слагаемого $(1/r)(dr/dx)\delta^{**}$, так же как и выше, можно получить в этом случае следующее дифференциальное уравнение для φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + aU \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(b \frac{\partial U}{\partial x} + c \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} + q \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} U \right) \varphi = p \quad (2.11)$$

где $q = h(1+m) = 0.771$ и r представляет собой радиус любой из параллелей на обтекаемом контуре.

§ 3. Примеры. Перейдем к рассмотрению нескольких примеров.

1. Вследствие того, что уравнение (2.6) и соответствующее уравнение ламинарного движения [3] имеют одинаковый вид, классы задач, для которых (2.6) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение, будут такими же, как в работе [3]. Не выписывая всех решений, отвечающих этим задачам, остановимся на одном частном примере движения жидкости у передней части тупого препятствия, когда скорость на границе слоя выражается по формуле

$$U = U_0 k(\xi) x \lambda, \quad \xi = t U_0 \lambda \quad (3.1)$$

где постоянные U_0, λ имеют размерности $[U_0] = LT^{-1}$, $[\lambda] = L^{-1}$, а L и T — масштабы длины и времени.

В этом случае нетрудно получить следующее выражение для φ :

$$\varphi = \frac{1}{\lambda U_0 k^c} \exp \left(-b \int k d\xi \right) \left[D + p \int_0^\xi k^c \exp \left(b \int k d\xi \right) d\xi \right] \quad (3.2)$$

где D — постоянная интегрирования. Если движение тела в жидкости возникает из состояния относительного покоя между телом и окружающей его жидкостью, то из условия конечности φ при $t=0$ и $k=0$ вытекает, что $D=0$. Применительно к такому рода движению условие отрыва пограничного слоя запишется в виде

$$\frac{p}{k^{1+c}} \left(k^2 + \frac{dk}{d\xi} \right) \exp \left(-b \int k d\xi \right) \int_0^\xi k^c \exp \left(b \int k d\xi \right) d\xi = f_s \quad (3.3)$$

справедливом как для ламинарного, так и для турбулентного течения. Равенство (3.3) позволяет заключить, что отрыв пограничного слоя в рассматриваемом примере возникает при всех x одновременно. Причем, сравнивая коэффициенты p, b, c и f_s в турбулентном и соответственно ламинарном (профиль Хартри: $p = 1.12$, $b = 2.422$, $c = 1.00$, $f_s = -1.12$) слое, можно прийти к выводу, что при одинаковом распределении давлений турбулентный слой должен оторваться значительно позднее ламинарного, так как в первом случае $|f_s|$ почти в 4.5 раза больше, чем во втором.

Если до некоторого момента времени $t = \xi = 0$ пограничный слой был ламинарным, то постоянная D , входящая в (3.2), будет определяться следующим равенством:

$$D = D_1 = \frac{\nu}{U_0 \lambda x^2} \left[k^{c-2} \exp \left(b \int k d\xi \right) \right]_0 R_0^* G(R_0^*) \quad (3.4)$$

Здесь индекс 0 означает, что данная величина берется при $t = \xi = 0$, а под R_0^* подразумевается значение рейнولدсова числа $U\delta^*/\nu$ в момент $t=0$, рассчитанное по теории ламинарного пограничного слоя. С другой стороны, при том же самом распределении давлений, но при условии только турбулентного движения величина $D = D_2$ также выражается по формуле (3.4), в которой, однако, R_0^* подсчитывается по теории турбулентного пограничного слоя. Так как R_0^* в ламинарном слое значительно меньше R_0^* турбулентного слоя, то будет иметь место следующее неравенство: $D_1 < D_2$. На основании формул (2.10) и (3.2) это неравенство позволяет заключить о том, что при наличии до некоторого момента времени ламинарного движения отрыв произойдет позднее, чем при отсутствии его.

2. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ полубесконечная пластинка начинает двигаться по отношению к окружающей ее жидкости со скоростью на границе пограничного слоя $U = U_0 + \sigma(1 - \cos \omega t)$. Причем будем считать, что на основную скорость U_0 накладываются малые колебания ($U_0 \gg \sigma$), частота которых ω значительно меньше частоты турбулентных пульсаций. Такого рода задача рассматривалась применительно к ламинарному пограничному слою [3] и было получено следующее выражение для параметра f :

$$f = \frac{p}{a} \frac{\sigma \omega}{U_0^2} x \sin \omega t \quad (x < aU_0 t), \quad f = p \frac{\sigma \omega}{U_0} t \sin \omega t \quad (x > aU_0 t) \quad (3.5)$$

где начало отсчета координаты x помещено в переднюю кромку пластинки. Очевидно, в случае турбулентного пограничного слоя можно получить такое же выражение для f с коэффициентами a , p , заданными по формулам (2.7). Это позволяет наряду с одинаковым характером решения задачи подчеркнуть разницу между ламинарным и турбулентным обтеканием пластинки. Из формул (3.5) следует, что на пластинке образуются две области, которые разделены между собой движущейся границей $x = aU_0 t$. По одну сторону этой границы ($x < aU_0 t$) пограничный слой развился, т. е. параметр f , а следовательно, δ^* зависят от x , по другую — ($x > aU_0 t$) влияние передней кромки пластинки еще не сказывается и δ^* меняется лишь со временем. Постепенно развившийся пограничный слой занимает всю пластинку; при этом скорость перемещения границы указанных областей равна aU_0 и почти в два раза больше при турбулентном, чем при ламинарном обтекании пластинки.

Наряду с развитием пограничного слоя имеет место и его отрыв. Действительно, пользуясь выражениями (3.5), можно заключить, что отрыв начнется при $x > aU_0 t$ в момент времени t_0 , определяемый условием

$$t_0^\circ \sin N_{sh} t_0^\circ = -\beta \frac{U_0}{\sigma} \frac{1}{N_{sh}} \quad \left(t_0^\circ = \frac{U_0}{L} t_0, N_{sh} = \frac{\omega L}{U_0} \right) \quad (3.6)$$

Здесь L — масштаб длины, N_{sh} — число Струхалея, а β — коэффициент, соответственно равный 1.0 и 4.27 для ламинарного и турбулентного слоя. Отсюда также следует, что нестационарный турбулентный пограничный слой при прочих равных условиях отрывается позднее ламинарного.

Принимая во внимание (3.5) и выражение (2.9), можно определить напряжение трения на пластинке и сопротивление F пластинки длины L , омываемой потоком жидкости с двух сторон. Если обозначить через S смоченную поверхность пластинки и ввести коэффициент сопротивления по формуле $F = C_f S^{1/2} \rho U_0^2$, то можно получить для C_f следующее выражение:

$$C_f = R^{-1/2} t^{\circ 1/2} \left[\left(0.00303 + \frac{0.0275}{t^\circ} \right) + \left(\frac{0.00644}{t^\circ} - 0.00195 \right) \frac{\sigma}{U_0} N_{sh} t^\circ \sin N_{sh} t^\circ \right] \quad (3.7)$$

где $R = U_0 L / \nu$. В момент $t^\circ = 1.51$ всю пластинку длины L займет область, в которой течение зависит от x , и с этого момента формула для C_f примет вид:

$$C_f = R^{-1/2} \left(0.0303 + 0.00496 \frac{\sigma}{U_0} N_{sh} \sin N_{sh} t^\circ \right) \quad (3.8)$$

В случае $\sigma = 0$ формула (3.7) соответствует развитию пограничного слоя на пластинке, начавшей импульсивно двигаться из состояния покоя с постоянной скоростью U_0 . При этом в момент $t^\circ = 1.51$, когда на всей пластинке устанавливается стационарное движение, $C_f = 0.0303 R^{-1/2}$, что совпадает с известной формулой сопротивления [2]. Полагая $\sigma = 0$, оценим ту избыточную силу сопротивления, которая возникает при развитии со временем течения около пластинки по сравнению с силой, действующей в стационарном движении. Для этого определим величину A , равную импульсу силы сопротивления F за время $t^\circ = 1.51$. Тогда, рассматривая неустановившееся движение, будем иметь $A = 0.0497 \mu L R^{1/2}$. С другой стороны, для установившегося движения получим $A = 0.0461 \mu L R^{1/2}$. Отсюда видно, что величина импульса силы F при неустановившемся движении на 8% больше соответствующей величины при стационарном движении. Для ламинарного движения [3] этот избыток импульса силы F составлял почти 33%.

В заключение следует сделать два замечания.

1. В последнее время Л. Г. Лойцянский высказал предположение, что вблизи точки отрыва $C = (K^*) \text{const}$, так как здесь $\tau_0 = 0$ и влияние вязкости, а вместе с ним рейнольдсова числа K^* , исчезает. Такое предположение незначительно сказывается на коэффициентах уравнений (1.10), (2.6) и, следовательно, почти не влияет на f или φ . При этом, однако, толщина вытеснения δ^* вблизи точки отрыва уже будет определяться не по формуле (2.8), а несколько иным путем, изложенным в монографии [2].

2. Как [в случае ламинарного [3],] так и турбулентного движения, в первом приближении [для упрощения расчета пограничного слоя было принято $h = \delta^{**} / \delta^* = \text{const}$. Обращаясь к интегральному соотношению импульсов (1.1), нетрудно прийти к выводу, что допущение оправдывается тем больше, чем меньшую роль играют слагаемые с h в уравнении (1.1). Это в свою очередь будет иметь место при сильно выраженной нестационарности, когда величины, характеризующие пограничный слой, меняются во времени быстрее, чем с изменением x , и $\partial U / \partial x$ мало по сравнению с $(\partial U / \partial t) / U$. Для более точных расчетов, как ламинарного, так и турбулентного пограничных слоев, можно отказаться от допущения о постоянстве отношения δ^{**} / δ^* и аппроксимировать $h(f)$ линейной функцией; при этом дифференциальное уравнение относительно φ станет нелинейным.

Приношу глубокую благодарность Л. Г. Лойцянскому за помощь в работе и постоянное внимание.

Поступила 6 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
2. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Механика жидкости и газа. ГТТИ, 1957.
3. Р о з и н Л. А. Приближенный метод интегрирования уравнений нестационарного ламинарного слоя в несжимаемой жидкости. ПММ, т. XXI, вып. 5, 1957.

К ЗАДАЧЕ О ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УДАРЕ СФЕРЫ

В. И. Моссаковский, В. Л. Рвачев

(Днепропетровск — Бердянск)

Решение задачи о горизонтальном гидродинамическом ударе сферы при наличии свободной поверхности жидкости было найдено Э. Л. Блохом [1] в виде ряда, содержащего сферические функции. В настоящей заметке излагается метод, при помощи которого находится решение этой задачи в замкнутом виде.

§ 1. Пусть в жидкость, заполняющую полупространство $z \geq 0$, погружена сферическая оболочка так, что ее смоченная поверхность имеет уравнение $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Предположение, что радиус сферы равен единице, очевидно, не нарушает общности рассуждений.)

Пусть затем сфера приходит во внезапное поступательное движение вдоль оси Ox со скоростью U_0 . Тогда, имея в виду, что потенциал скоростей $\varphi(x, y, z)$ возмущенного движения жидкости есть гармоническая внутри жидкости функция, связанная с импульсивным давлением p_t равенством $p_t = -\rho\varphi$, где ρ — плотность жидкости, приходим к следующим условиям:

$$\varphi(x, y, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 > 1 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_0 x \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0) \quad (1.2)$$

$$\text{grad } \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (1.3)$$