где n — произвольная постоянная. Отсюда

$$F(\eta)=\frac{a}{An}e^{n\eta}(A-1+e^{-n\eta})^2, \quad f(\alpha)=c_0+c_1\int_0^\alpha e^{1/2\,n\alpha^2}\,d\alpha \tag{9}$$

где A, c_0, c_1 — произвольные постоянные интегрирования.

Из условия совпадения функции (9) и ее производной в точке $\eta=0$ с соответствующими точными значениями функции (6) получим

$$a=\frac{n}{A}, \qquad n=\frac{A}{A-2}F'(0) \tag{10}$$

На фигуре кривая *1* представляет точную функцию (6), кривая *2* — функцию (9) при условии (10) и $A=0.096$. Кривая *3* изображает зависимость λ от η. При $c_0=0$ решение (7) реализует симметричное сопло, удовлетворяя на линии перехода известному условию продолжимости дозвукового течения в сверхзвуковую область [2].

Поступила 24 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, т. XX, вып. 3, 1946.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, 1948.

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ГРАДИЕНТЕ (СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ)

В. Н. Голубенков
(Москва)

В работе [1] было показано, что уравнения тепловой конвекции в несжимаемой жидкости, заполняющей бесконечно длинную вращающуюся трубу, структурно линеаризуются, если градиент температуры вдоль оси вращения есть величина постоянная. Ниже рассматривается тепловая конвекция в сжимаемой вязкой жидкости, находящейся в бесконечной вращающейся круглой трубе. Для описания задачи принимается вращающаяся с угловой скоростью ω цилиндрическая система координат с полярной осью вдоль оси вращения жидкости. Зависимость от φ отсутствует из соображений симметрии, кроме того, для бесконечно длинной трубы $\partial v_z/\partial z=0$, $v_r=v_\varphi=0$. Наконец, будем считать, что жидкость подчиняется уравнению состояния идеального газа. Таким образом, движение жидкости будет описываться следующей системой уравнений[2]:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\omega^2 r, \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=\eta\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv_z}{dr}\right), \qquad p=\frac{\rho TR}{m} \tag{1}$$

Будем считать, что неравномерность температуры в жидкости задается наличием на стенке трубы постоянного температурного градиента. Поскольку условия по сечению трубы подобны, то

$$\frac{\partial T}{\partial z}=a=\mathrm{const} \tag{2}$$

При рассмотрении сжимаемой жидкости одного этого условия для структурной линеаризации уравнений (1) недостаточно, поскольку теперь пренебрегать изменением плотности жидкости при изменении давления нельзя [3]. Для получения линеаризованных уравнений тепловой конвекции в сжимаемой жидкости рассмотрим случай медленной конвекции. Именно, будем считать, что неравномерность температуры мала по сравнению со средней температурой в жидкости и что вызываемые этой неравномерностью скорость конвекции и изменения давления и плотности так же малы, т. е. можно положить, что

$$\begin{gathered} T'=T+\delta T, \qquad p'=p+\delta p, \qquad \rho'=\rho+\delta\rho, \qquad v_z=v\neq 0 \\ \delta T\ll T, \qquad \delta p\ll p, \qquad \delta\rho\ll\rho, \qquad v\ll\omega r_1 \end{gathered} \tag{3}$$

r_1 — радиус трубы, p и ρ — соответственно давление и плотность жидкости при некоторой постоянной средней температуре жидкости T. Другими словами, будем искать решение системы (1) в виде разложения по степеням градиента температуры a, который предполагается малым. Сохраняя только первый порядок малых величин, из системы (1) легко получить

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \delta p}{\partial r}=p\,\frac{m\omega^2 r}{RT}+\frac{m\omega^2 r}{RT}\left(\delta p-p\,\frac{\delta T}{T}\right)$$
$$\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \delta p}{\partial z}=\eta\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv}{dr}\right) \qquad (4)$$

В изотермическом случае $\delta T=0,\ \delta p=0,\ v=0$ и жидкость вращается как целое с распределением давлений:

$$p=p_0\exp\frac{m\omega^2 r^2}{2RT} \qquad (5)$$

где p_0 — давление на оси трубы. Исключая далее из уравнений (4) δp и подставляя (2) и (5), получим для скорости медленной тепловой конвекции уравнение

$$\frac{m\omega^2 r}{RT}\left[\eta\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv}{dr}\right)-\frac{ap_0}{T}\exp\frac{m\omega^2 r^2}{2RT}\right]=\eta\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dv}{dr}\right)\right] \qquad (6)$$

Это уравнение должно быть решено при следующих граничных условиях:

1) конечность решения при $r=0$,

2) $$v(r_1)=0 \qquad (7)$$

3) $$2\pi\int_0^{r_1}\rho v r\,dr=\pi r_1^2\rho Q$$

где Q — заданный расход жидкости в трубе.

Введем следующие переменные и обозначения:

$$x=\frac{m\omega^2 r^2}{2RT},\qquad b=\frac{m\omega^2 r_1^2}{2RT},\qquad v=\frac{ar_1^2 p_0}{4b\eta T}\,u,\qquad Q=\frac{ar_1^2 p_0}{4b^2\eta T}\,q \qquad (8)$$

При этом уравнение (6) и граничные условия (7) принимают вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\,\frac{du}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{du}{dx}\right)+e^x=0,\qquad u(b)=0,\qquad \int_0^b e^x u\,dx=q \qquad (9)$$

Отсюда легко получим

$$u=[(e^b-1)^2-2q]\,\frac{J_1(x)-J_1(b)}{2J_2(b)-4J_1(b)}+e^b-e^x \qquad (10)$$

где

$$J_1(x)=\int_0^x\frac{e^x-1}{x}\,dx,\qquad J_2(b)=\int_0^b\frac{e^{2x}-1}{x}\,dx$$

Или, окончательно

$$v=\frac{ar_1^2 p_0}{4b\eta T}\left\{\frac{(e^b-1)^2}{2\,[\mathrm{Ei}\,(2b)-2\,\mathrm{Ei}\,(b)+\ln\gamma b-\ln 2]}\left[\mathrm{Ei}\,(x)-\mathrm{Ei}\,(b)-\ln\frac{x}{b}\right]+e^b-e^x\right\}+$$
$$+\frac{bQ}{\mathrm{Ei}\,(2b)-2\,\mathrm{Ei}\,(b)+\ln\gamma b-\ln 2}\left[\mathrm{Ei}\,(b)-\mathrm{Ei}\,(x)+\ln\frac{x}{b}\right] \qquad (11)$$

где $\mathrm{Ei}\,(x)$ — табулированные функции (3).

Полученное решение представляет собой суперпозицию двух движений: первый член в (11) описывает свободную конвекцию в сжимаемой вращающейся жидкости, а второй — вынужденное движение сжимаемой жидкости во вращающейся трубе под влиянием внешней разности давления (аналогичное пуайзелевскому течению несжимаемой жидкости).

Поступила 27 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубенков В. Н. Тепловая конвекция во вращающейся круглой трубе при постоянном температурном градиенте. ПММ, XXI, вып. 3, стр. 439—440, 1957.
2. Ландау и Лифшиц. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, 1953.
3. Янке и Эмде. Таблицы функций, 1948.