К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ СОПЕЛ

И. М. Юрьев

(Москва)

Получено новое частное решение для приближенной системы уравнений движения газа, близкой к точной системе уравнений Чаплыгина на большом трансзвуковом интервале изменения скорости. Этим решением можно воспользоваться для расчета сопел.

Система уравнений Чаплыгина в канонической форме имеет вид:

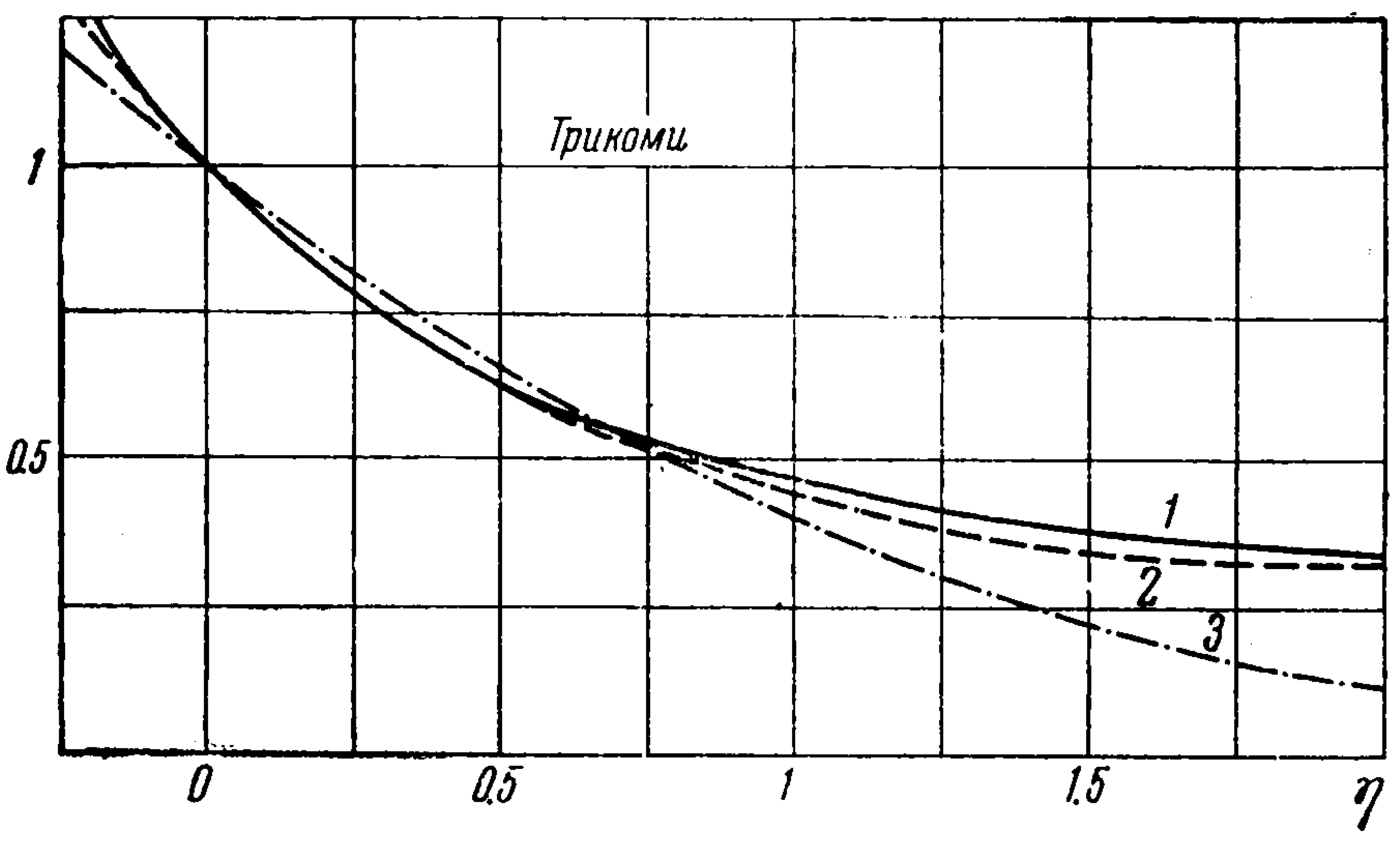
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial s}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \tag{1}$$

где φ и ψ — потенциал скорости и функция тока, $\sqrt{K}$ и s — известные функции относительной скорости λ, причем (2)

$$\sqrt{K} = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2/h^2)^{h^2}}}$$

$$s = \int\limits_1^\lambda \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2/h^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\left(h^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)$$



и ϑ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс плоскости течения газа (x, y). В окрестности $\lambda = 1$ имеем

$$\sqrt{K} = A_0 s^{1/3}, \qquad A_0 = -3^{1/3}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa+2}{3(\varkappa-1)}}$$

Перейдем в системе (1) к новым независимым переменным η, α по формулам

$$s = -\frac{2}{3}\eta^{3/2}, \qquad \vartheta = -\eta\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 \tag{3}$$

После простых преобразований получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} A_0 F(\eta)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} A_0 F(\eta)\left(\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - (\eta+\alpha^2)\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{4}$$

или одно уравнение для функции тока

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - 2\alpha\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\eta} + (\eta+\alpha^2)\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} - \frac{F'(\eta)}{F(\eta)}\left(\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - (\eta+\alpha^2)\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{5}$$

где

$$F(\eta) = \frac{\sqrt{K}}{A_0 s^{1/3}} \tag{6}$$

При $F = 1$ уравнение (5) имеет частное решение $\psi = \alpha$, что соответствует результату С. В. Фальковича [1]. Однако точная функция $F(\eta)$ сильно отличается от единицы на большом околозвуковом интервале изменения скорости λ. Чтобы получить более точный результат, будем искать частное решение вида

$$\psi = f(\alpha)\,[1 + aJ(\eta)] \qquad \left(J(\eta) = \int\limits_0^\eta \frac{d\eta}{F(\eta)}\right) \tag{7}$$

где a — произвольная постоянная. Подставляя выражение (7) в уравнение (5) и разделяя переменные, получим

$$\frac{f''(\alpha)}{\alpha f'(\alpha)} = \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} + \frac{2a}{F(\eta)\,[1 + aJ(\eta)]} = n \tag{8}$$

где n — произвольная постоянная. Отсюда

$$F(\eta) = \frac{a}{An} e^{n\eta}(A - 1 + e^{-n\eta})^2, \quad f(\alpha) = c_0 + c_1 \int\limits_0^\alpha e^{1/2\, n\alpha^2}\, d\alpha \tag{9}$$

где A, c_0, c_1 — произвольные постоянные интегрирования.

Из условия совпадения функции (9) и ее производной в точке $\eta = 0$ с соответствующими точными значениями функции (6) получим

$$a = \frac{n}{A}, \qquad n = \frac{A}{A - 2} F'(0) \tag{10}$$

На фигуре кривая *1* представляет точную функцию (6), кривая *2* — функцию (9) при условии (10) и $A = 0.096$. Кривая *3* изображает зависимость λ от η. При $c_0 = 0$ решение (7) реализует симметричное сопло, удовлетворяя на линии перехода известному условию продолжимости дозвукового течения в сверхзвуковую область [2].

Поступила 24 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, т. XX, вып. 3, 1946.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, 1948.

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ГРАДИЕНТЕ (СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ)

В. Н. Голубенков
(Москва)

В работе [1] было показано, что уравнения тепловой конвекции в несжимаемой жидкости, заполняющей бесконечно длинную вращающуюся трубу, структурно линеаризуются, если градиент температуры вдоль оси вращения есть величина постоянная. Ниже рассматривается тепловая конвекция в сжимаемой вязкой жидкости, находящейся в бесконечной вращающейся круглой трубе. Для описания задачи принимается вращающаяся с угловой скоростью ω цилиндрическая система координат с полярной осью вдоль оси вращения жидкости. Зависимость от φ отсутствует из соображений симметрии, кроме того, для бесконечно длинной трубы $\partial v_z / \partial z = 0$, $v_r = v_\varphi = 0$. Наконец, будем считать, что жидкость подчиняется уравнению состояния идеального газа. Таким образом, движение жидкости будет описываться следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv_z}{dr}\right), \qquad p = \frac{\rho T R}{m} \tag{1}$$

Будем считать, что неравномерность температуры в жидкости задается наличием на стенке трубы постоянного температурного градиента. Поскольку условия по сечению трубы подобны, то

$$\frac{\partial T}{\partial z} = a = \text{const} \tag{2}$$

При рассмотрении сжимаемой жидкости одного этого условия для структурной линеаризации уравнений (1) недостаточно, поскольку теперь пренебрегать изменением плотности жидкости при изменении давления нельзя [3]. Для получения линеаризованных уравнений тепловой конвекции в сжимаемой жидкости рассмотрим случай медленной конвекции. Именно, будем считать, что неравномерность температуры мала по сравнению со средней температурой в жидкости и что вызываемые этой неравномерностью скорость конвекции и изменения давления и плотности так же малы, т. е. можно положить, что

$$\begin{gathered} T' = T + \delta T, \qquad p' = p + \delta p, \qquad \rho' = \rho + \delta\rho, \qquad v_z = v \neq 0 \\ \delta T \ll T, \qquad \delta p \ll p, \qquad \delta\rho \ll \rho, \qquad v \ll \omega r_1 \end{gathered} \tag{3}$$