ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ СТРУЙ

В. П. Алексеевский

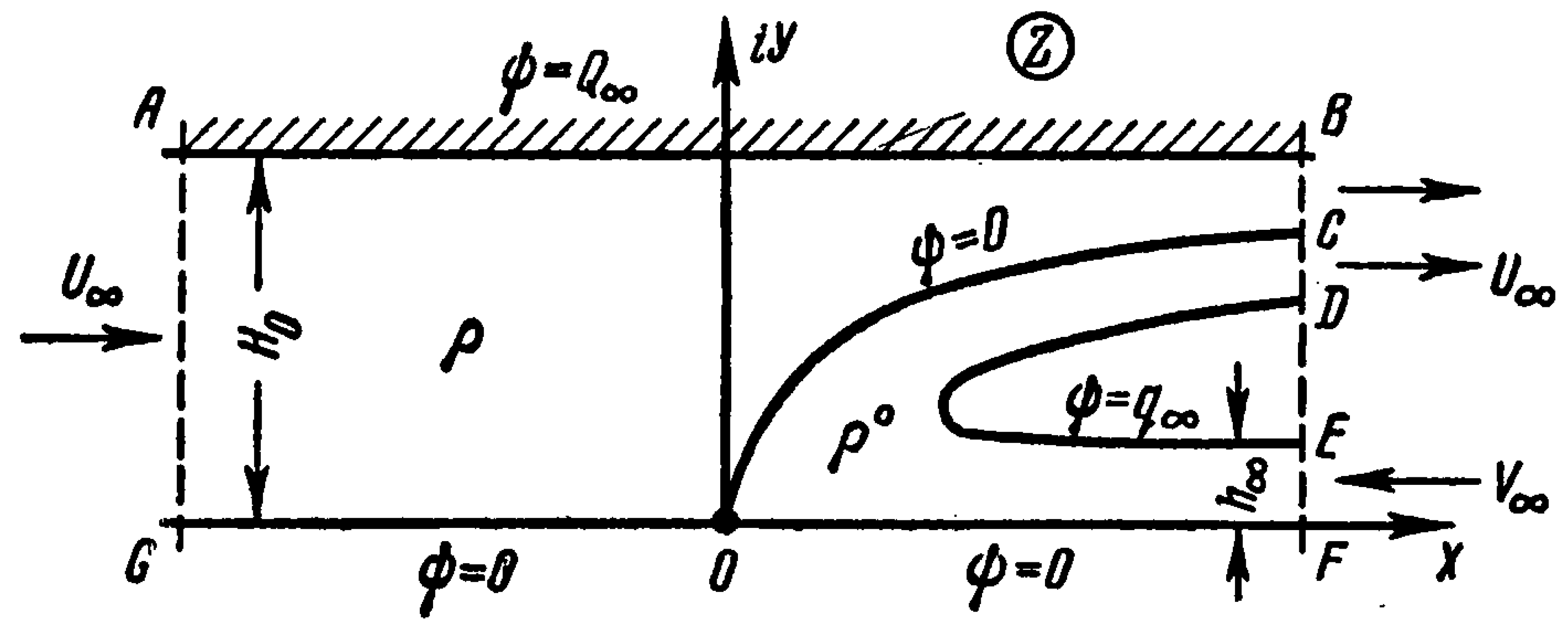
(Киев)

Рассматривается соударение двух струй идеальной несжимаемой жидкости, движущихся из бесконечности навстречу друг другу в пространстве, ограниченном твердыми стенками. Движение установившееся.

Для плоского случая дается полное решение задачи при помощи теории функций комплексного переменного. Для осесимметричного случая при помощи закона сохранения количеств движения выводятся важные для приложений формулы.

1. Положим, что плоскости симметрии струи и потока совпадают, стенки параллельны и поток на бесконечности заполняет все пространство между ними.

В силу симметрии такого течения достаточно изучить часть последнего, изображенную на фиг. 1.



Фиг. 1

Здесь AB — абсолютно твердая стенка, AG — поток, EF — струя, CO — граница между частицами струи и потока, DE — свободная поверхность струи, GF — плоскость симметрии течения.

Предположим, что скорости струи и потока на бесконечности (сечения AG и BF) не зависят от времени.

При этом условии в системе координат, связанной с точкой O, движение частиц жидкости будет установившимся.

Как известно, решение такой задачи сводится к отысканию функции потенциала скоростей φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ и граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad AB \quad \text{и} \quad GF; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \text{const} \quad \text{на } DE$$

(DE — свободная поверхность), где n и s — соответственно направления главных нормали и касательной в произвольной точке границы. Пусть W — комплексный потенциал течения:

$$W(z) = \varphi + i\psi, \qquad z = x + iy \tag{1.1}$$

где ψ — гармоническая функция тока. Найдем решение поставленной задачи, используя теорию конформных отображений.

Пусть u_∞ — скорость частиц потока на бесконечности, ρ — плотность потока, H_0 — половина расстояния между твердыми стенками, Q_∞ — расход жидкости в рассматриваемой части потока на бесконечности, v_∞ — скорость частиц струи на бесконечности, ρ° — плотность струи, h_∞ — половина толщины струи на бесконечности, q_∞ — расход жидкости в рассматриваемой части струи на бесконечности.

Положим сначала, что $\rho = \rho^\circ = 1$. Выразим граничные условия задачи через функцию тока ψ. Полагая $\psi = 0$ на границе GOF и OC, имеем

$$\psi = Q_\infty \quad \text{на } AB, \qquad \psi = q_\infty \quad \text{на } DE$$

Функция W реализует конформное отображение изучаемой области (фиг. 1) плоскости z на четырехугольную область плоскости W (фиг. 2). Обозначения показывают положение границ области при отображении.

Следуя Н. Е. Жуковскому, введем вспомогательную функцию

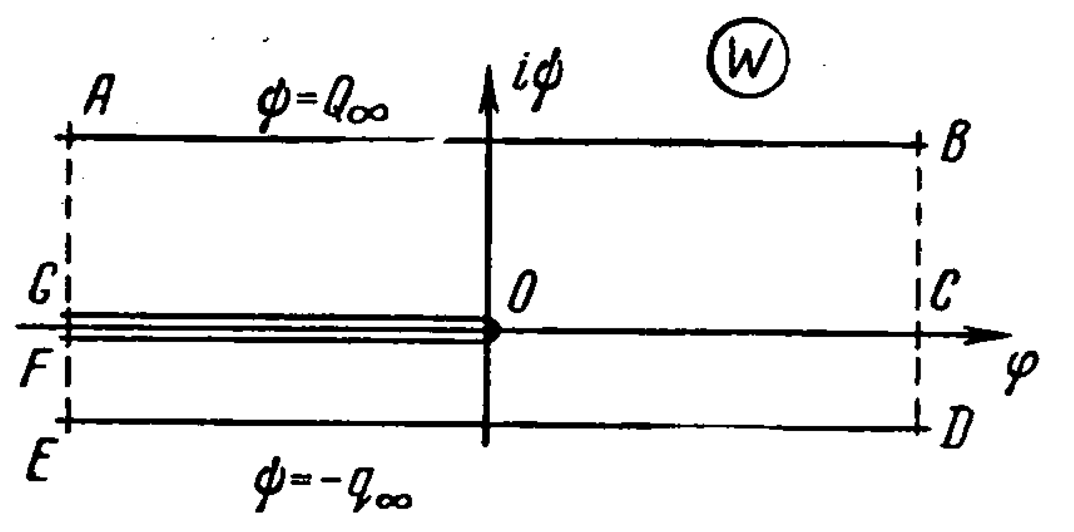
$$Z = \ln \frac{dz}{dW} = X + iY \tag{1.2}$$

Величина $dW / dz = v_z$ комплексно сопряжена с вектором скорости в данной точке течения.

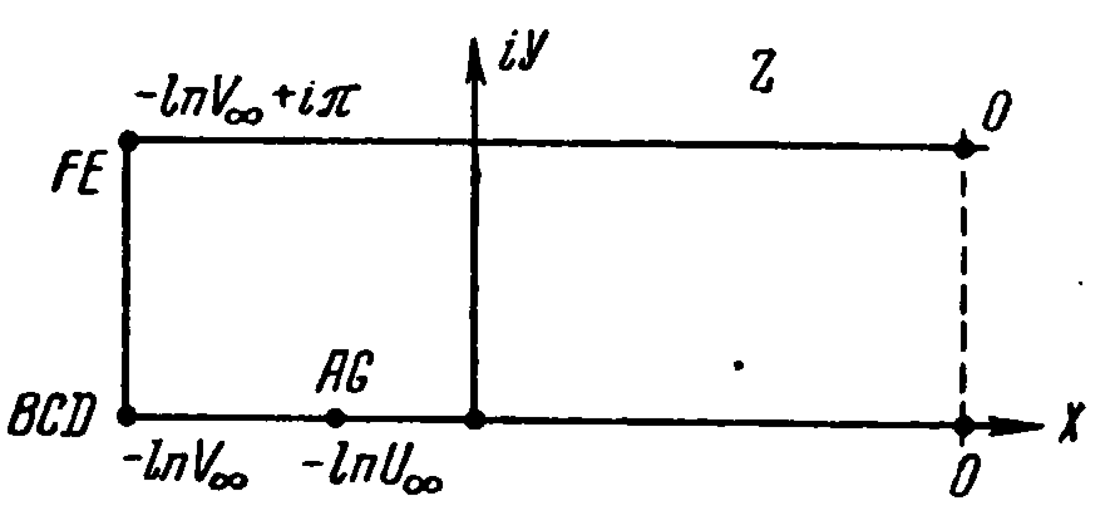
Разделяя действительную и мнимую части Z, запишем

$$X = \ln |1 / v_z|, \qquad Y = \alpha$$

где α — угол наклона вектора скорости с положительным направлением действительной оси на плоскость Z. Функция Z реализует конформное отображение изучаемой области на треугольную область плоскости Z (фиг. 3).



Фиг. 2



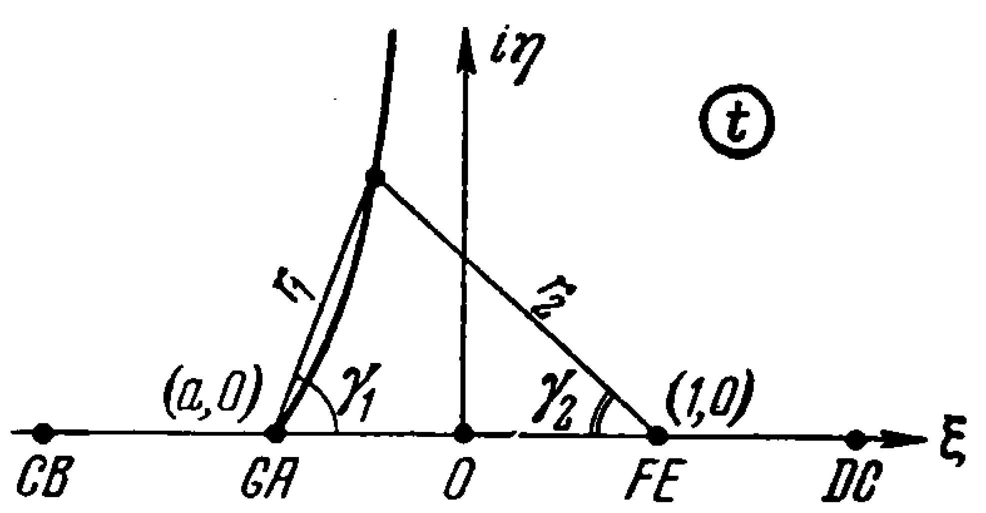
Фиг. 3

Образы изучаемой области на плоскостях W и Z ограничены прямыми линиями.

Задавшись положением трех точек оси ξ на плоскости t, соответствующих трем вершинам четырехугольника на плоскости W, как показано на фиг. 4, на основании формулы Кристофеля получим

$$W(t) = c_1 \int_0^t t(t-1)^{-1}(t+a)^{-1}dt + t_0 \tag{1.3}$$

Выполняя интегрирование и определяя неизвестные коэффициенты c_1, a, t_0 из граничных условий задачи, запишем



Фиг. 4

$$W(t) = \frac{Q}{\pi} \ln \left[\left(\frac{t+a}{a} \right)^{\frac{a}{a+1}} (1-t)^{\frac{1}{a+1}} \right] \tag{1.4}$$

где

$$Q = Q_\infty + q_\infty, \qquad a = \frac{Q_\infty}{q_\infty} = \frac{u_\infty H_0}{v_\infty h_\infty} \tag{1.5}$$

Из (1.4) следует, что

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Q}{\pi} \frac{t}{(t+a)(t-1)} \tag{1.6}$$

Аналогично отображая верхнюю полуплоскость (фиг. 4) на треугольную область плоскости Z (фиг. 3), найдем

$$Z(t) = c_2 \int_1^t t^{-1}(t-1)^{-1/2}dt + Z_0$$

Выполняя интегрирование и определяя неизвестные постоянные из граничных условий задачи, получим

$$Z(t) = -2i \operatorname{arc\,tg} \sqrt{t-1} - \ln v_\infty + i\pi$$

Воспользовавшись связью между арктангенсом и логарифмом в комплексной области, преобразуем это выражение к виду

$$Z(t) = -\ln \left[v_\infty e^{-i\pi} \frac{1 + i\sqrt{t-1}}{1 - i\sqrt{t-1}} \right] \tag{1.7}$$

Так как $Z(a) = \ln u_\infty$ (фиг. 3) при $t = -a$, то, подставляя это значение в (1.7) используя (1.5), получим

$$\frac{u_\infty}{v_\infty} = 1 - 2\sqrt{\frac{h_\infty}{H_0}} \tag{1.8}$$

Исключая Z из уравнений (1.2) и (1.7), запишем

$$\frac{dW}{dz} = v_\infty e^{-i\pi} \frac{1 + i\sqrt{t-1}}{1 - i\sqrt{t-1}} \tag{1.9}$$

Разделив (1.9) на (1.6) и интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до t, найдем

$$z = \frac{Qe^{i\pi}}{\pi v_\infty}\left[-\frac{(1+\sqrt{a+1})^2}{1+a}\ln\left(\frac{t+a}{a}\right) + \frac{1}{a+1}\ln(1-t) + \right.$$
$$\left. + \frac{4\sqrt{a+1}}{1+a}\ln\left(\frac{\sqrt{a+1} - i\sqrt{t-1}}{\sqrt{a+1}+1}\right)\right] \tag{1.10}$$

Если бы удалось исключить параметр t из (1.4) и (1.10), то, разделяя действительную и мнимую части полученного для $W(z)$ выражения, можно найти искомое решение в явном виде. Однако исключить параметр t из уравнений (1.4) и (1.10) не удается, поэтому для их практического использования найдем решение задачи в параметрическом виде. Представим комплексные величины $t + a$ и $1 - t$ в такой форме:

$$t + a = r_1 e^{i\gamma_1}, \qquad 1 - t = r_2 e^{i\gamma_2}$$

Здесь r_1, r_2, γ_1, γ_2 можно рассматривать как биполярные координаты точки на плоскости t (фиг. 4), связанные очевидными соотношениями

$$r_1 = (a+1)\frac{\sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}, \qquad r_2 = (a+1)\frac{\sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} \tag{1.11}$$

Подставляя выражение для $t + a$ и $1 - t$ в (1.4), заменяя Q_∞ и q_∞ их значениями и разделяя действительные и мнимые части полученных уравнений, запишем

$$\varphi = \frac{u_\infty H_0}{\pi}\ln\frac{r_1}{a} + \frac{v_\infty h_\infty}{\pi}\ln r_2, \qquad \psi = \frac{u_\infty H_0 \gamma_1}{\pi} - \frac{v_\infty h_\infty \gamma_2}{\pi} \tag{1.12}$$

Аналогично преобразуя уравнение (1.10) при помощи тех же подстановок, найдем

$$\begin{aligned} x &= \frac{H_0}{\pi}\ln\frac{r_1}{a} - \frac{h_\infty}{\pi}\ln r_2 - \frac{H_0}{\pi}(1-n^2)\ln R \\ y &= \frac{H_0\gamma_1}{\pi} + \frac{h_\infty\gamma_2}{\pi} - \frac{H_0}{\pi}(1-n^2)\gamma \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь

$$R = \sqrt{\frac{n}{a}\left(a + 1 + r_2 + 2\sqrt{r_2(a+1)}\cos\frac{\gamma_2}{2}\right)} \tag{1.14}$$

$$\gamma = -\operatorname{arc\,tg}\left[\sin\frac{\gamma_2}{2}\left(\sqrt{\frac{r_2}{a+1}} + \cos\frac{\gamma_2}{2}\right)^{-1}\right], \qquad n = 1 - 2\sqrt{\frac{h_\infty}{H_0}}$$

На основании (1.13) найдем положение точки D свободной поверхности на бесконечности (фиг. 1). Имеем

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pi, \quad r_1 = r_2 = \infty$$

Отсюда $\gamma = -{}^1/_2\pi$, и искомая величина

$$y_1 = 2\sqrt{H_0 h_\infty} - h_\infty \tag{1.15}$$

Полученные формулы (1.12) и (1.13) позволяют построить линии тока $\psi = \mathrm{const}$ и линии равного потенциала $\varphi = \mathrm{const}$ рассматриваемой задачи на плоскости z. Определим скорость произвольной частицы жидкости v_z, пользуясь (1.9) и введенной ранее подстановкой $1 - t = r_2 \exp(i\gamma_2)$.

Обозначая модуль искомой величины через $|v_z| = v_\infty T$, ее аргумент через $\arg v_z = \beta$ и проделав необходимые выкладки, получим

$$T = \sqrt{\frac{r_2 - 2\sqrt{r_2}\cos{}^1/_2\gamma_2 + 1}{r_2 + 2\sqrt{r_2}\cos{}^1/_2\gamma_2 + 1}} \tag{1.16}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sqrt{r_2}}{1 - r_2}\sin\frac{\gamma_2}{2}\right] \tag{1.17}$$

Выше предполагалось, что $\rho = \rho^\circ = 1$. Найдем условие, при котором полученное решение применимо для случая различных плотностей струи и потока, воспользовавшись тем, что для рассматриваемого течения константа интеграла Бернулли — Эйлера

$$C = p_z + \frac{1}{2}\rho\,|v_z|^2 \tag{1.18}$$

постоянна во всех точках движущейся жидкости [1]. В случае различных плотностей струи и потока это условие выполняется, если на границе раздела жидкостей имеет место разрыв скорости, величина которого

$$m = \sqrt{\frac{\rho}{\rho^\circ}} \tag{1.19}$$

Полагая, что скорость струи на бесконечности и геометрия течения не изменились, найдем, используя соотношения (1.8), (1.18) и (1.19), искомое условие

$$\frac{u_1}{u_\infty} = \sqrt{\frac{\rho^\circ}{\rho}}\left(1 - 2\sqrt{\frac{h}{H}}\right) \tag{1.20}$$

где $h = 2h_\infty$ и $H = 2H_0$ — соответственно толщина струи и расстояние между твердыми стенками, u_1 — такая скорость потока на бесконечности, при которой точное решение, полученное в предположении $\rho = \rho^\circ = 1$, справедливо для случая любых заданных плотностей струи и потока.

Рассмотрим движение струи и потока в неподвижной системе координат, связанной с твердыми стенками. Скорость струи на бесконечности V в этой системе координат определяется очевидным равенством $V = v_\infty + u_1$. При этом скорость u_1 можно рассматривать как скорость проникания точки O границы раздела струи и потока (фиг. 1). Используя это условие, преобразуем (1.20) к виду

$$u_1 = \frac{V}{1 + m/n} = V\left(1 + \frac{\sqrt{\rho/\rho^\circ}}{1 - 2\sqrt{h/H}}\right)^{-1} \tag{1.21}$$

Полученная формула определяет величину скорости проникания в зависимости от абсолютной скорости струи, плотностей струи и потока и геометрии течения.

Для v_∞ получим

$$v_\infty = \frac{V}{1 + n/m} = V\left(1 + \frac{1 - 2\sqrt{h/H}}{\sqrt{\rho/\rho^\circ}}\right)^{-1} \tag{1.22}$$

Из (1.20) следует, что глубина проникания l (путь, проходимый точкой O за единицу времени) выражается через путь, проходимый за то же время частицей струи, расположенной на бесконечности L, следующей формулой:

$$l = L\,\frac{n}{m} = L\,\frac{1 - 2\sqrt{h/H}}{\sqrt{\rho/\rho^\circ}} \tag{1.23}$$

Расстояние между свободными поверхностями растекающихся ветвей струи на бесконечности $h_0 = 2y_1$ определяется в этих обозначениях следующей формулой:

$$h_0 = 2\sqrt{Hh} - h \tag{1.24}$$

Используя (1.18), (1.21), (1.22) и выражение модуля скорости произвольной точки течения $|v_z|$, найдем выражение для давления в произвольной точке струи или потока [1]

$$p_z = \frac{\rho V^2}{2}\frac{(1 - T^2)}{(m + n)^2} \tag{1.25}$$

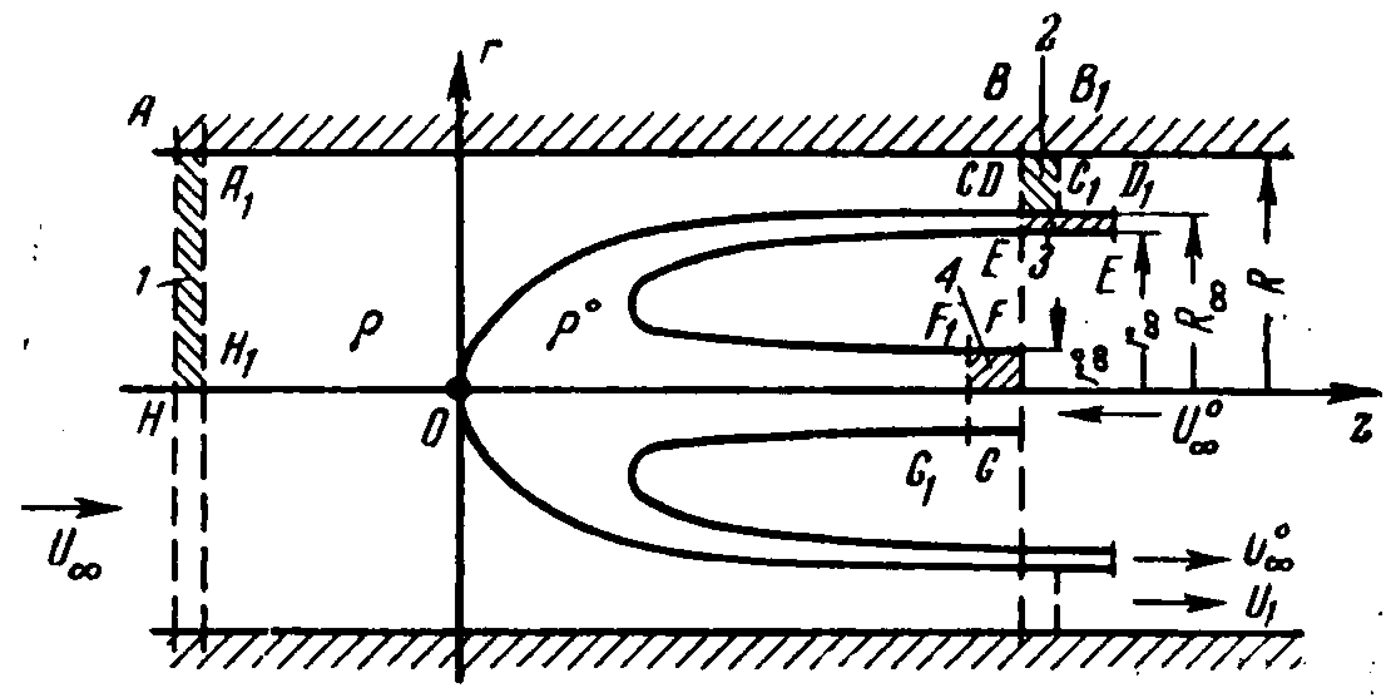
[1] Предполагается, что внешнее давление отсутствует и $C = 0$ в формуле (1.18).

В частности, в точке O, где в соответствии с (1.16) $T = 0$, получим

$$p_0 = \frac{\rho V^2}{2}\frac{1}{(m+n)^2} \tag{1.26}$$

Отметим, что если увеличивать расстояние между твердыми стенками в результате предельного перехода при $H_0 \to \infty$, найденное выше решение переходит в решение, полученное М. А. Лаврентьевым в 1947 г. (работа не опубликована) и независимо от него Г. Бирхгофом [1], для случая проникания плоской струи в бесконечное пространство, заполненное несжимаемой жидкостью.

2. Рассмотрим теперь случай удара струи и потока идеальной невесомой жидкости с осевой симметрией в пространстве, ограниченном цилиндрической абсолютно твердой стенкой. Обозначим постоянные на бесконечности: скорости и давления соответственно через u_∞°, p_∞° — для струи, u_∞, p_∞ — для потока.



Фиг. 5

Пусть $r_\infty{}^\circ$ — радиус струи, r_∞ — радиус свободной поверхности, R_∞ — радиус поверхности раздела, R — радиус твердой границы области. Через ρ, ρ° обозначим соответственно плотности потока и струи.

Найдем изменение количеств движения dK объема жидкости N, образованного вращением области $ABCDEFGH$ (фиг. 5) относительно оси z, перемещающегося в принятой подвижной системе координат roz в положение $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ за время dt. Величина dK / dt, определяемая движением объемов $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, сечения которых заштрихованы на фиг. 5 для рассматриваемого установившегося процесса, равна сумме гидродинамических давлений, действующих на поверхность рассматриваемого объема N.

Полагая, что сечения AH и BG достаточно удалены от начала координат O и соответствующие скорости и давления в этих сечениях постоянны и равны их значениям на бесконечности, запишем

$$\frac{dK}{dt} = \rho^\circ u_\infty{}^\circ \frac{d}{dt} N^{(3)} + \rho u_0 \frac{d}{dt} N^{(2)} - \rho u_\infty \frac{d}{dt} N^{(1)} + \rho^\circ u_\infty{}^\circ \frac{d}{dt} N^{(3)} = \pi R^2 (p_\infty - p_\infty{}^\circ) \tag{2.1}$$

где u_0 — скорость потока в сечении BC, величина которой определяется, как и в плоском случае, из условия существования разрыва скорости на границе струи и потока равенством

$$u_0 = u_\infty{}^\circ \sqrt{\rho^\circ / \rho} \tag{2.2}$$

Значения производных от соответствующих объемов равны

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} N^{(1)} = \pi R^2 u_\infty, &&\frac{d}{dt} N^{(2)} = \pi (R^2 - R_\infty{}^2) u_0 \\ &\frac{d}{dt} N^{(3)} = \pi (R_\infty^2 - r_\infty{}^2) u_\infty{}^\circ, &&\frac{d}{dt} N^{(4)} = -\pi r_\infty{}^{\circ 2} u_\infty{}^\circ \end{aligned} \tag{2.3}$$

Написав интеграл Бернулли — Эйлера для произвольной линии тока, проходящей через сечения HA и BC, найдем

$$p_\infty - p_\infty{}^\circ = \frac{\rho}{2} (u_0{}^2 - u_\infty{}^2) \tag{2.4}$$

Поставив значения соответствующих величин (2.2), (2.3) и (2.4) в (2.1) и выполнив преобразования, получим

$$\left[\sqrt{\frac{\rho}{\rho^\circ}}\frac{u_\infty}{u_\infty{}^\circ}\right]^2 = 2\left(\frac{R^2 - r_\infty{}^2}{R^2} + \frac{r_\infty{}^{\circ 2}}{R^2} - \frac{1}{2}\right) \tag{2.5}$$

Исключая R из уравнений расходов жидкостей струи и потока в рассматриваемых сечениях

$$u_\infty \pi R^2 = u_0 \pi (R^2 - R^2_\infty), \qquad u_\infty{}^\circ \pi r_\infty{}^{\circ 2} = u_\infty{}^\circ \pi (R_\infty{}^2 - r_\infty{}^2)$$

и пользуясь (2.2), запишем

$$\left[\sqrt{\frac{\rho}{\rho^\circ}}\frac{u_\infty}{u_\infty{}^\circ}\right] = \left(\frac{R^2 - r_\infty{}^2}{R^2} - \frac{r_\infty{}^2}{R^2}\right) \tag{2.6}$$

Исключая r_∞ из (2.5) и (2.6), получим соотношение

$$\frac{u_\infty}{u_\infty{}^\circ} = \sqrt{\frac{\rho^\circ}{\rho}}\left(1 - 2\frac{r_\infty{}^\circ}{R}\right) = \frac{n_0}{m_0} \tag{2.7}$$

аналогичное (1.20) для плоского случая движения. В (2.7)

$$n_0 = \left(1 - 2\frac{r_\infty{}^\circ}{R_\infty}\right), \qquad m_0 = \sqrt{\rho / \rho^\circ}$$

Полагая $u_\infty + u_\infty{}^\circ = V$ в неподвижной системе координат (V — скорость струи, а u_∞ — скорость движения точки O — границы раздела жидкостей), найдем

$$u_\infty = V\left(1 + \frac{m_0}{n_0}\right)^{-1}, \qquad u_\infty{}^\circ = V\left(1 + \frac{n_0}{m_0}\right)^{-1} \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что перемещение l точки O выражается через перемещение L сечения струи FG формулой

$$l = L\frac{n_0}{m_0} \tag{2.9}$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что

$$r_\infty = \sqrt{2r_\infty{}^\circ R - r_\infty{}^{\circ 2}} \tag{2.10}$$

Полагая давление в струе на бесконечности равным нулю, найдем давление в точке O:

$$p_0 = \frac{\rho V^2}{2}\frac{1}{(m_0 + n_0)^2} \tag{2.11}$$

Отметим, что до настоящего времени нет ни одного точного решения пространственной задачи о движении идеальной жидкости со свободными поверхностями. В работе М. А. Лаврентьева [2] указываются возможные с математической точки зрения пути решения таких задач для случая осевой симметрии. Саусвелл и Вэзи [3] при помощи численного метода релаксации рассчитали несколько случаев движения осесимметричных потоков.

Полученные выше соотношения позволяют, применяя метод релаксации, приближенно рассчитать линии тока, эквипотенциалы, поля скоростей и давлений для рассмотренной задачи.

В заключение отметим, что сравнение аналогичных выражений, определяющих параметры изучаемого течения (1.20), (1.23), (1.24), (1.26) для плоского и (2.7), (2.9), (2.10), (2.11) для осесимметричного случаев движения показывает существенное различие в количественном выражении этих параметров.

Поступила 10 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд-во иностранной литературы, 1950.
2. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принципы его работы. Успехи мат. наук, т. XII, вып. 4, стр. 76, 1957.
3. Sauthwel and Vaisei. Fluid Motions characterised by «free» stremblines. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. 240, 1946.