ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л. М. Флитман

(Москва)

Первая и вторая краевые задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

для полуплоскости $y>0$ хорошо изучены [1]. Несколько бо́льшую трудность представляет смешанная краевая задача

$$\left.\begin{aligned} &u(x,\ t)=0 && \text{для } |x|>1\\ &w(x,\ t)\equiv\frac{\partial u}{\partial y}=a(x,\ t) && \text{для } |x|<1\end{aligned}\right\} \quad \text{при } y=0 \tag{2}$$

Здесь $a(x,\ t)$ — ограниченная функция.

Начальные условия для простоты полагаем нулевыми:

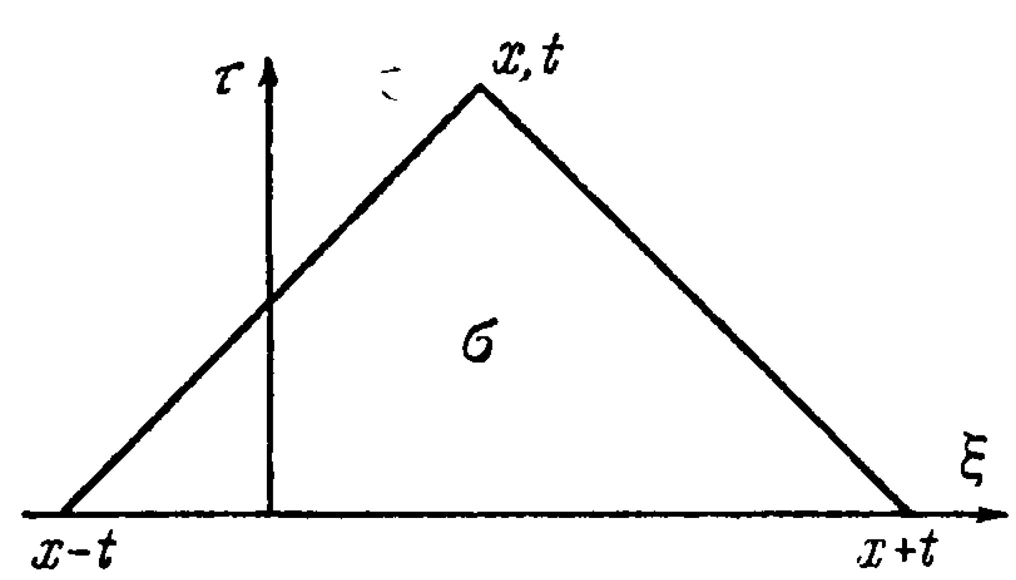
$$u=\partial u/\partial t=0 \qquad \text{при } t=0$$

Если $u(x,\ y,\ t)$ понимать как потенциал смещений упругой жидкости, то краевые условия могут быть истолкованы так: в границу полуплоскости на участке $-1<x<1$ вдавливается штамп заданной формы $a(x,\ t)$, остальная часть границы свободна от давления.

Содержание настоящей работы составляет построение значений на границе (при $y=0$) функций $u(x,\ t)$ для $|x|<1$ и $w(x,\ t)$ для $|x|>1$, так как, зная их, можно построить $u(x,\ y,\ t)$ во всей полуплоскости $y>0,\ t>0$.

Как известно, $u(x,\ t)$ и $w(x,\ t)$ связаны соотношением [1]

$$u(x,\ t)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{w(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}}=0 \tag{3}$$



Фиг. 1

Здесь область интегрирования указана на фиг. 1. В качестве вспомогательной рассмотрим следующую задачу.

Найти, пользуясь (3), функцию $w(x,\ t)$ для $x>0,\ t>0$ при условии, что

$$w(x,\ t)=a(x,\ t) \quad \text{при } x<0, \qquad u(x,\ t)=0 \quad \text{при } x>0 \tag{4}$$

Соотношение (3) для определения $w(x,\ t)$ при $x>0$ дает неоднородное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{w(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}}=0, \qquad x>0 \tag{5}$$

Будем искать решение, ограниченное для $x>0,\ t\geqslant 0$ и интегрируемое по x в каждом конечном интервале при любом t.

Умножим обе части этого уравнения на e^{-pt} и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности, учитывая, что $\operatorname{Re} p>0$. Получим

$$\int\limits_0^\infty K_0(p\,|x-\xi|)\,\varphi(\xi,\ p)\,d\xi+\int\limits_{+\infty}^0 K_0(p\,|x-\xi|)\,\psi(\xi,\ p)\,d\xi=0 \tag{6}$$

где $K_0(\xi)$ — функция Макдональда,

$$\varphi(x,\ p)=\int\limits_0^\infty w(x,\ t)\,e^{-pt}dt \quad \text{при } x>0, \qquad \psi(x,\ p)=\int\limits_0^\infty a(x,\ t)\,e^{-pt}dt \quad \text{при } x<0 \tag{7}$$

Интегральное уравнение (6) будем решать по методу В. А. Фока [2]. Умножим обе части (6) на e^{-sx}, где $\operatorname{Re} s > 0$, и проинтегрируем по x от нуля до бесконечности. После выкладок, аналогичных тем, которые проводятся в работе [2], получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Phi(\eta, p)\,d\eta}{\sqrt{p^2-\eta^2}\,(\eta-s)} + F(s, p) = 0 \qquad (0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p) \tag{8}$$

где

$$\Phi(s, p) = \int_0^\infty \varphi(\xi, p)\, e^{-s\xi} d\xi$$

$$F(s, p) = \int_p^{(p\infty)} \frac{\Psi(\zeta, p)\,d\zeta}{(\zeta+s)\sqrt{\zeta^2-p^2}}, \qquad \Psi(s, p) = \int_{-\infty}^{0} e^{s\xi}\psi(\xi, p)\,d\xi \tag{9}$$

От функции $a(x, t)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла условию Дирихле. Тогда $\Psi(s, p)$ будет регулярной функцией комплексной переменной s для $\operatorname{Re} s > 0$. Тогда, очевидно, и $F(s, p)$ будет регулярной для $\operatorname{Re} s > 0$. Тогда ее можно представить интегралом Коши

$$F(s, p) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{F(\eta, p)\,d\eta}{\eta - s}$$

Тогда (8) можно записать так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{H(\eta, p)\,d\eta}{\eta - s} = 0 \qquad (0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p) \tag{10}$$

где

$$H(s, p) = \frac{\Phi(s, p)}{\sqrt{p^2 - s^2}} + F(s, p) \tag{11}$$

В силу сделанных выше замечаний о функции $w(x, t)$, $\Phi(s, p)$ должна быть регулярной при $\operatorname{Re} s > 0$, а также должна стремиться к нулю при s, стремящемся к бесконечности. $F(s, p)$, как уже говорилось, регулярна при $\operatorname{Re} s > 0$. Повторяя рассуждения, приведенные в [2], из (10) получим, что $H(s, p)$ должна быть регулярной при $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$.

Таким образом, мы пришли к следующей задаче для определения $\Phi(s, p)$.

Найти $\Phi(s, p)$, регулярную для $\operatorname{Re} s > 0$ и стремящуюся к нулю при s, стремящемся к бесконечности, таким образом, чтобы $H(s, p)$ была регулярной для $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p$.

Нетрудно проверить, что решение этой задачи таково:

$$\Phi(s, p) = -\sqrt{p+s}\int_p^{p\infty}\frac{\Psi(\zeta, p)\,d\zeta}{(\zeta+s)\sqrt{\zeta - p}} \tag{12}$$

Выполняя обратные преобразования, получим решение уравнения (5):

$$w(x, t) = 0 \quad \text{для } x > t$$

$$w(x, t) = -\frac{1}{\pi}\int_x^t a(x-\tau, t-\tau)\sqrt{\frac{\tau}{x} - 1}\,\frac{d\tau}{\tau} \quad \text{для } x < t \tag{13}$$

Подставив значение $\Phi(s, p)$ из (12) в (11) и выполняя над соотношением (11) те же преобразования, которые привели нас к нему, только в обратном порядке, покажем, что функция $w(x, t)$ из (13) действительно будет решением интегрального уравнения (5). Единственность решения уравнения (5) при сделанных предположениях легко показать, изучая таким же образом однородное уравнение.

Подставляя значение $w(x, t)$ в равенство (3), получим выражение $u(x, t)$ для $x < 0$.

Таким образом, вспомогательная задача решена. Покажем теперь, как, пользуясь ею, а также формулой (3), при краевых условиях (2) можно найти для любого момента времени $w(x, t)$ для $|x| > 1$ и $u(x, t)$ для $|x| < 1$. Рассмотрим плоскость (xt).

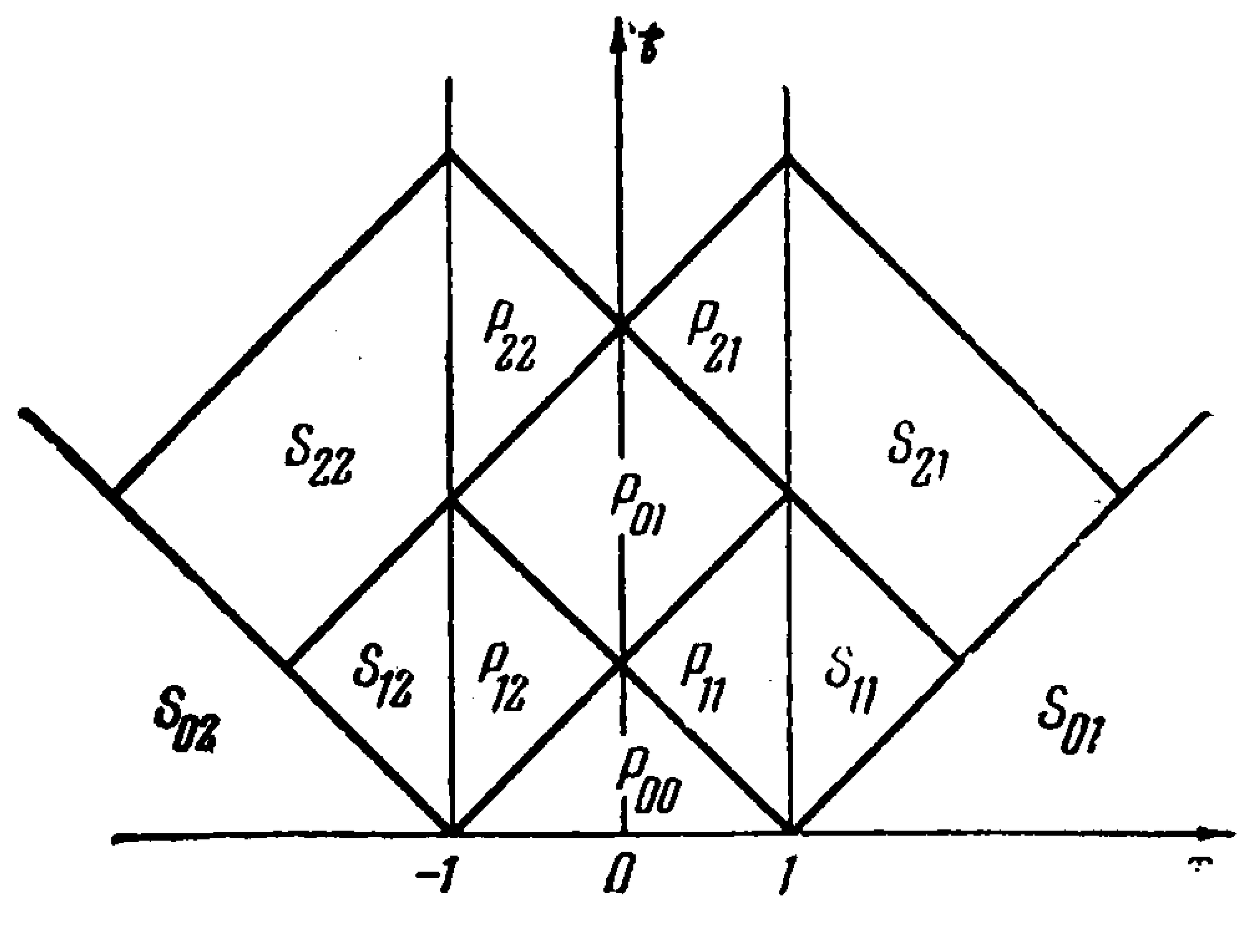
В областях S_{01} и S_{02} имеем $w = 0$ в силу нулевых начальных условий. В областях S_{11} и S_{12} $w(x, t)$ дается решением нашей вспомогательной задачи. Значение $u(x, t)$ в области P_{00} дается формулой (3), а в областях P_{11} и P_{12} — той же формулой, так как значение w в областях S_{11} и S_{12} нам известно. В областях S_{21} и S_{22} $w(x, t)$ снова дается решением вспомогательной задачи, так как значение $u(x, t)$ в областях P_{00}, P_{11}, P_{12} нам уже известно (фиг. 2).

Значение $u(x, t)$ в областях P_{01}, P_{21}, P_{22} также можно построить, опираясь на уже известные значения $w(x, t)$. Продолжая этот процесс далее, мы можем построить значения $w(x, t)$ для $|x| > 1$ и $u(x, t)$ для $|x| < 1$ для любого момента времени, что и требовалось.

Таким образом, принципиально решение получено.

Сделаем теперь несколько замечаний о свойствах полученного решения. Изучать будем решение вспомогательной задачи. Из формулы (13) следует, что при $x = t$ на фронте распространяющейся волны

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$



Фиг. 2

В окрестности точки $x = 0$ имеем для $a(x, t) = 1$

$$w(x, t) = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{x}{t}} - \sqrt{\frac{t}{x} - 1}\right], \qquad \frac{t}{x} > 1$$

В окрестности $x = 0$ функция $w(x, t)$ обращается в бесконечность, как $1/\sqrt{x}$. Интересно отметить, что такой особенностью $w(x, t)$ будет обладать для всех $a(x, t)$, за исключением тех, для которых

$$\int_0^t a(-\tau, t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = 0 \tag{14}$$

для всех t. Нетрудно проверить, что если в качестве $a(x, t)$ возьмем значение $\partial u / \partial y$, при $y = 0$ и $x < 0$, соответствующее

$$u(x, t) = b(x, t) \quad \text{для } x < 0, \qquad u(x, t) = 0 \quad \text{для } x > 0$$

где

$$b = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

например $b(x, t) = c(t)x^2$, то такое $a(x, t)$ будет удовлетворять условию (14).

Как известно [2], аналогичная смешанная задача для уравнения Лапласа приводит нас к значениям $\partial u / \partial y$ при $y = 0$, обладающим такими же особенностями, как и у нас, в точках, где менялся тип граничного условия. И особенности не будет, если для граничного значения выполняется соотношение типа (14).

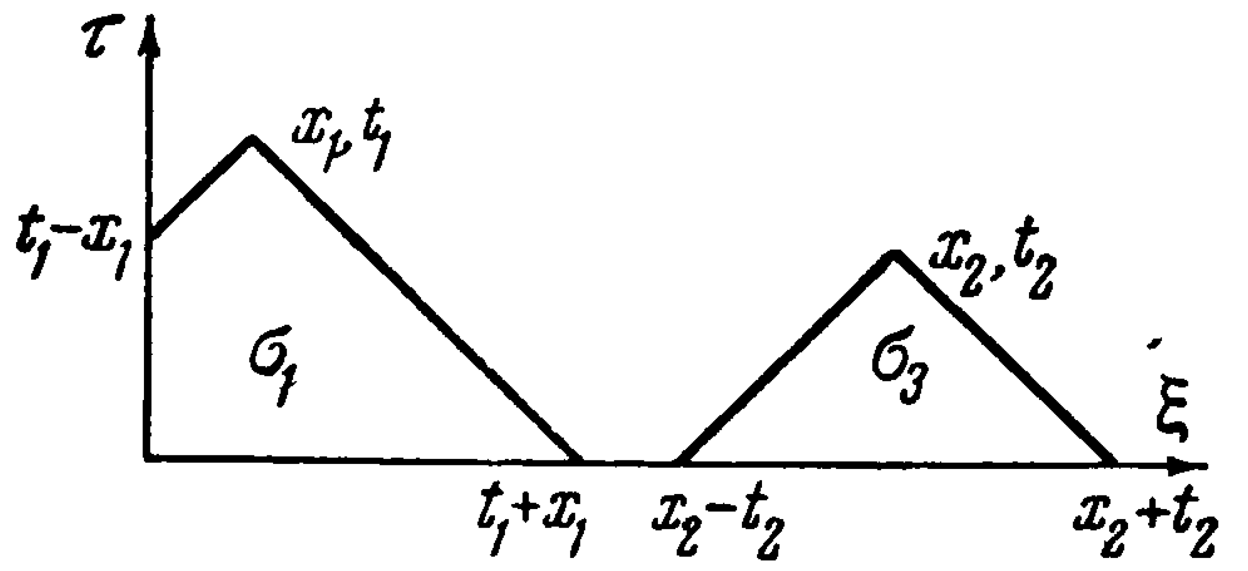
Аналогично можно рассмотреть такую задачу: при $s=0$

$$u(x, t) = a(x, t) \quad \text{для } |x| < 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{для } |x| > 1 \tag{15}$$

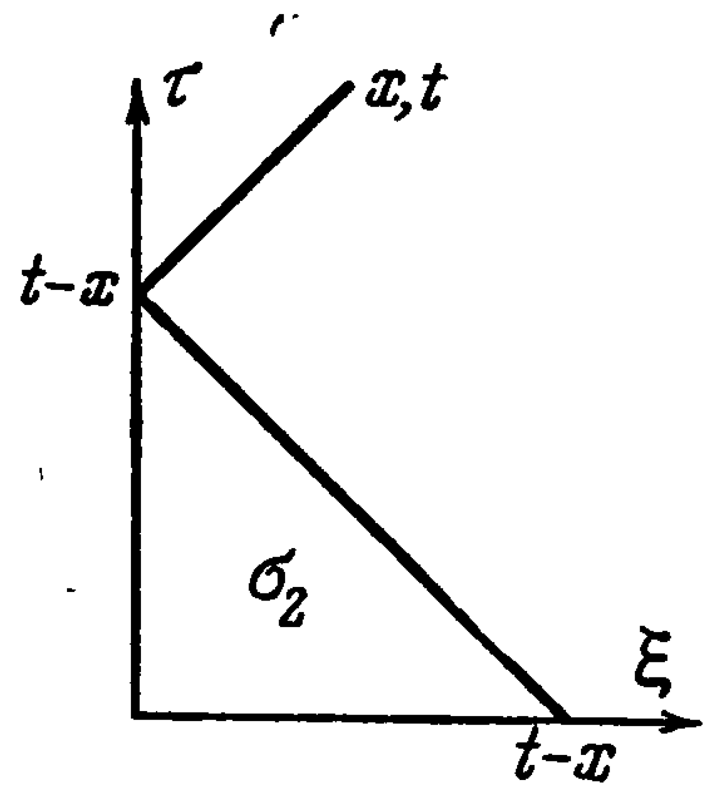
Рассмотрим упругое полупространство $y > 0$.

Если $u(x, y, t)$ понимать как смещение в поперечных колебаниях упругого полупространства, поляризованных параллельно оси z, то $\partial u / \partial y = \tau_{zy} / \mu$, где τ_{zy} — касательное напряжение, а μ — модуль сдвига.

Тогда краевые условия (15) могут быть истолкованы так: на границе упругого полупространства $y \geqslant 0$, в полосе $|x| < 1$ заданы смещения, параллельные оси z $u = a(x, t)$, не зависящие от координаты z, остальная часть границы $|x| > 1$ свободна от напряжений. Тогда, как известно, задача становится плоской, а система уравнений, описывающих колебания упругой среды, вырождается в одно волновое уравнение для компоненты u, параллельной оси z.



Фиг. 3



Фиг. 4

Решение вспомогательной задачи с краевыми условиями при $y = 0$

$$u(x, t) = a(x, t) \quad \text{для } x > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv w = 0 \quad \text{для } x < 0$$

будет иметь вид:

$$w(x, t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\iint\limits_{\sigma_1} \frac{a(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}} -$$

$$- \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iint\limits_{\sigma_2} R\left(\frac{t-\tau}{x}, \frac{x}{\xi}\right) a(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \qquad \text{при } x < t$$

$$w(x, t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\iint\limits_{\sigma_3} \frac{a(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}} \qquad \text{при } x > t$$

Здесь

$$R\left(\frac{t-\tau}{x}, \frac{x}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi - x}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\left[\frac{t-\tau-\xi}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{t-\tau}{\xi - x} - \sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{(\xi - x)^2} - 1}\right]$$

а области интегрирования σ_1, σ_2, σ_3 изображены на фиг. 3 и 4.

Пользуясь формулой, выражающей $\partial u / \partial y \equiv w$ при $y = 0$ через u при $y = 0$, которая выведена в [1]:

$$w = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iint\limits_{\sigma} \frac{u(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}}$$

(область интегрирования σ изображена на фиг. 1), при помощи рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно построить для условий (15) $w(x, t)$ при $|x| < 1$ и $u(x, t)$ при $|x| > 1$.

Важно отметить, что подобным же образом можно рассмотреть плоский случай смешанной краевой задачи (задача о штампе без трения) для динамических уравнений теории упругости.

Поступила 15 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Некоторые элементарные краевые задачи для волнового уравнения. Тр. Сейсмологического института АН СССР, № 101, 1940.
2. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Математический сборник, т. 14 (56), вып. 1—2, 1944.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.— Л., 1946.