К ЗАДАЧЕ О КРЫЛЕ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА С МИНИМАЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Е. В. Булыгина

(Новосибирск)

Задача решается на основании линеаризованной теории вариационным методом. Получено решение для крыла с произвольной передней кромкой, уравнение которой может быть задано степенным рядом.

Пусть $z(x, y)$ — уравнение поверхности крыла, тогда объем крыла определяется двойным интегралом от этой функции по области s, представляющей проекцию поверхности крыла на плоскость $z = 0$:

$$v = \iint\limits_s z\,dx\,dy \tag{1}$$

Сопротивление крыла определяется суммированием проекций всех сил давления p, умноженных на угол наклона поверхности:

$$C_x = \frac{2}{s}\iint\limits_s p\frac{\partial z}{\partial x}dx\,dy \qquad \left(\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{2}$$

Давление в каждой точке $P(x, y)$ плоскости крыла со сверхзвуковой передней кромкой в свою очередь определяется двойным интегралом [1]

$$p = -2\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_\nabla \frac{\alpha(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2(y-\eta)^2}}d\xi d\eta \tag{3}$$

Область интегрирования ∇ представляет собой часть области, вырезаемую из крыла конусом Маха с вершиной в точке $P(x, y)$.

Таким образом, задача сводится к изопараметрической задаче для функционала 2) при условии сохранения заданного значения функционала (1). Эта задача может быть просто решена классом поверхностей, у которых

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = a_2(x) = \mathrm{const}$$

В этом случае волновое сопротивление крыла с хордой b может быть определено формулой, предложенной М. Н. Коган:

$$C_x = \frac{4}{s\beta}\int\limits_0^b \left\{\overline{\alpha^2(x)} + \frac{a_2(x)}{\beta^2}\int\limits_0^x \overline{\alpha(\eta)}(x-\eta)\,d\eta\right\}dx \tag{4}$$

Изменим в (4) порядок интегрирования и введем функцию

$$\varphi(\eta) = \int\limits_\eta^b a_2(x)(x-\eta)\,dx \tag{5}$$

Тогда формулу (4) можно преобразовать к виду

$$C_x = \frac{4}{s\beta}\int\limits_0^b \left\{\overline{\alpha^2(x)} + \frac{\overline{\alpha(x)}\,\varphi(x)}{\beta^2}\right\}dx \tag{6}$$

При заданной форме крыла в плане функция $z = z(x, y)$ должна быть такой, чтобы в сечении $z = 0$ получался заданный контур крыла $y = \pm\gamma(x)$. Это условие будет выполнено, если искать поверхность крыла в виде

$$z = f(x)[\gamma^2(x) - y^2] \tag{7}$$

Тогда объем крыла будет

$$v_0 = \frac{4}{3}\int\limits_0^b f(x)\gamma^3(x)\,dx \tag{8}$$

Согласно методу множителей Лагранжа для определения минимума функционала (6) при заданном значении (8) надо рассматривать уравнение Эйлера для функции $F(x)$:

$$F(x) = \overline{\alpha^2(x)} + \frac{1}{\beta^2}\overline{\alpha(x)}\,\varphi(x) + \lambda f(x)\gamma^3(x) \tag{9}$$

С учетом (5) уравнение Эйлера запишется

$$F_\varphi - \frac{d}{dx}\left\{F_f - \frac{d}{dx}F_{f'}\right\} = 0, \qquad F_\varphi = \frac{\bar{\alpha}}{\beta^2} \tag{10}$$

Заметим, что F_φ может быть представлено в виде производной по x;

$$F_\varphi = \frac{1}{\beta^2}\frac{d}{dx}\left\{\frac{4}{3}f\gamma^3 + c\right\}$$

Первый интеграл уравнения (10) будет

$$-\frac{32}{15}\frac{d}{dx}(f'\cdot\gamma^5) - \frac{16}{3}f\gamma^3\gamma^{12} - \frac{16}{3}f\gamma^4\gamma^{11} + \frac{8}{\beta^2}\frac{1}{}f\gamma^3 = c_1 - \lambda\gamma^3 \tag{11}$$

Если боковые кромки крыла проходят через начала координат ($\gamma = 0$ при $x = 0$), то постоянная C_1 обращается в нуль. Тогда после сокращения на γ^2 первый интеграл (11) получим в таком виде:

$$4f''\gamma^2 + 10f'(\gamma^2)' + 5f\left[(\gamma^2)'' - \frac{1}{\beta^2}\right] = \lambda \tag{12}$$

Так как форма крыла в плане задана, то функция γ^3 известна.

В общем случае квадрат этой функции может быть представлен рядом

$$\gamma^2 = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \ldots + a_nx^{n+2} + \ldots \tag{13}$$

Общее решение уравнения (12) получим как сумму его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения. Последнее будем искать в виде произведения некоторой степени x^ρ на степенной ряд:

$$f_1(x) = x^\rho\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^\rho \tag{14}$$

Определяющее уравнение для ρ будет

$$F_0(\rho) = 4\rho(\rho-1) + 10\cdot 2\rho + 5\left(2 - \frac{1}{\beta^2 a_0}\right) = 0$$

Решая его, получим два значения:

$$\rho_1 = -2 + \sqrt{\frac{3}{2} + \delta}, \qquad \rho_2 = -2 - \sqrt{\frac{3}{2} + \delta} \qquad \left(\delta = \frac{1}{\beta^2 a_0}\right) \tag{15}$$

Коэффициенты ряда (11), соответствующие этим значениям ρ, получаются из бесконечной системы уравнений

$$\begin{gathered} a_0\alpha_1F_0(\rho+1) + \alpha_0a_1F_1(\rho) = 0 \\ a_0\alpha_2F_0(\rho+2) + a_1\alpha_1F_1(\rho+1) + a_2\alpha_0F_2(\rho) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\alpha_nF_0(\rho+n) + a_1\alpha_{n-1}F_1(\rho+n-1) + a_2\alpha_{n-2}F_2(\rho+n-2) + \ldots + a_n\alpha_0F_n(\rho) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{16}$$

Функция $F_n(\rho)$ имеет вид:

$$F_n(\rho) = 4\rho(\rho-1) + 10\rho(n+2) + 5(n+2)(n+1) \tag{17}$$

Каждое последующее уравнение системы содержит одним коэффициентом больше, чем предыдущее, и поэтому, принимая коэффициент α_0 произвольным, можно последовательно выразить через него все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Частное решение уравнения (12) определим рядом

$$f_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k x^k \tag{18}$$

коэффициенты которого определяются системой уравнений, аналогичной (16):

$$
\begin{gathered}
a_0G_0(0)\,\beta_0 = \lambda \\
a_0G_0(1)\,\beta_1 + a_1G_1(0)\,\beta_0 = 0 \\
a_0G_0(2)\,\beta_2 + a_1G_1(1)\,\beta_1 + a_2F_2(0)\,\beta_0 = 0 \qquad (19) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0G_0(k)\,\beta_k + a_1G_1(k-1)\,\beta_{k}+1 + \ldots + a_k\widetilde{F}_k(0)\,\beta_0 = 0
\end{gathered}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
G_0(k) = 4k(k-1) + 10\cdot 2k + 5(2-\delta) \qquad (20) \\
G_n(k) = 4k(k-1) + 10(n+2)\,k + 5(n+2)(n+1)
\end{gathered}
$$

Так как λ — произвольный множитель, то β_0 можно считать произвольным и выразить через него все коэффициенты ряда (18).

Искомая функция $f(x)$ определится суммой рядов:

$$
\begin{gathered}
f(x) = \alpha_0(\rho_1)\,x^{\rho_1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_s(\rho_1)}{\alpha_0(\rho_1)}\,x^s\right) + \\
+ \alpha_0(\rho_2)\,x^{\rho_2}\left(1 + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\alpha_s(\rho_2)}{\alpha_0(\rho_2)}\,x^s\right) + \beta_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_0}\,x^k\right) \qquad (21)
\end{gathered}
$$

Три произвольные постоянные $\alpha_0(\rho_1)$, $\alpha_0(\rho_2)$ и β_0 определяются из условий:

1) на задней кромке крыла прл $x = b$ функция должна обращаться в нуль;

2) поверхность крыла z должна быть ограничена при $y^2 - \gamma^2(x) \leqslant 0$;

3) объем крыла v имеет заданное значение v_0.

Рассмотрим практически важный случай треугольного в плане крыла.

Для этого случая ряд (14) содержит лишь один член. Передняя кромка определяется уравнением $y = \pm kx$, поэтому в решении (21) все коэффициенты $\alpha_s(\rho_1) = \alpha_s(\rho_2) = \beta_k = 0$ при $s \geqslant 1$.

Из условия 2 получаем, что $\alpha_0(\rho_2) = 0$. Произвольную постоянную β_0 получим, удовлетворяя условию 1:

$$\beta_0 = -\alpha_0(\rho_1)\,b^{\rho_1}$$

Уравнение поверхности треугольного крыла, обладающего минимальным сопротивлением при заданном объеме, будет

$$z = \alpha_0(\rho_1)\,(x^{\rho_1} - b^{\rho_1})\,(k^2x^2 - y^2) \qquad (22)$$

Постоянная $\alpha_0(\rho_1)$ определяется заданием объема

$$v_0 = -\frac{1}{3}\,k^3\,\frac{\rho_1}{\rho_1+4}\,b^{\rho_1+4}\alpha_0(\rho_1)$$

Сопротивление треугольного крыла, поверхность которого определяется уравнением (7), будет

$$C_{x_{\min}} = \frac{v_0^2}{sb^4}\,12\delta\,\frac{\rho_1+4}{\rho_1+2}\left[\frac{8\rho_1+22}{5} + \delta\right]$$

Для треугольного крыла со звуковой передней кромкой ($\beta = \delta = 1$) это сопротивление равно

$$C_{x_{\min}} = 128v_0^2$$

Сопротивление такого же крыла, но с ромбовидным профилем, равно $C_x = 180v_0^2$. Как видно из сравнения, треугольное крыло с найденной поверхностью (22) имеет сопротивление, на 40% меньшее, чем треугольное крыло с ромбовидным профилем.

Поступила 18 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГТТИ, 1952.

2. Коган М. Н. Некоторые интегральные свойства сверхзвуковых течений. МАП, Тр. ЦАГИ, № 687, 1955.