

## ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ СТЕСНЕННОМ ПОТОКЕ

М. Д. Хаскинд, В. С. Хоменко

(Одесса)

Рассматривается нелинейная двумерная задача об установившемся обтекании крылового профиля с острой передней кромкой сверхзвуковым стесненным потоком изэнтропического газа. Границы потока принимаются прямолинейными и параллельными, и профиль расположен несимметрично относительно этих границ.

Решение основывается на применении преобразования Лежандра, при помощи которого уравнения движения газа преобразовываются в симметричные линейные уравнения. В дальнейшем осуществляется простейшая аппроксимация интеграла Бернулли, и вся задача сводится к решению конечной системы функциональных уравнений, свойства которой изучены детально. На основании этих свойств приводятся конкретные вычисления аэродинамических сил и моментов, действующих на пластину. Полученные результаты показывают значительную чувствительность решения к нелинейным эффектам в стесненном потоке даже при малых углах атаки.

Основные уравнения установившегося плоского и безвихревого движения изэнтропического газа имеют вид:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$M^2 = \frac{1}{v^{\gamma-1}} \left( M_{\infty}^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right) - \frac{2}{\gamma-1} \quad (2)$$

$$M = \frac{w}{a}, \quad a^2 = \gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} v^{\gamma-1}, \quad v = \frac{\rho}{\rho_{\infty}}, \quad a_{\infty}^2 = \gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}, \quad M_{\infty} = \frac{u_{\infty}}{a_{\infty}} \quad (3)$$

где  $w$  — скорость потока с составляющими по осям координат  $u$  и  $v$ ,  $\rho$  — плотность газа,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $a$  — скорость звука и с индексом  $\infty$  обозначены характеристики невозмущенного потока, в которых  $p_{\infty}$  — давление.

Для линеаризации уравнений (1) воспользуемся преобразованием Лежандра

$$\varphi + \frac{i}{\rho} \psi = z w e^{-i\theta} - \left( \Phi + \frac{i}{\rho} \Psi \right) \quad (z = x + iy, \quad i = \sqrt{\gamma-1}) \quad (4)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — соответственно потенциал скорости и функция тока,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ , а  $\Phi$  и  $\Psi$  — функции преобразования Лежандра.

Подстановка (4) в (1) с учетом соотношений (3) приводит к следующим линейным симметричным уравнениям:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{K}{\rho_{\infty}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{K}{\rho_{\infty}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \quad (5)$$

где  $\sigma$  и  $K$  определяются выражениями

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \int_0^v \frac{K dv}{1 + v^2 K^2}, \quad M^2 = \frac{C}{v^{\gamma-1}} \exp \left( - \int_0^v \frac{K^2 dv^2}{1 + v^2 K^2} \right), \quad C = M_{\infty}^2 \exp \left( \int_0^1 \frac{K^2 dv^2}{1 + v^2 K^2} \right) \quad (6)$$

причем на основании (2)  $\sigma$  является функцией  $M$ .

Во всем дальнейшем полагаем

$$\frac{1}{K^2} = M_{\infty}^2 - 1 = \operatorname{tg}^2 \sigma_{\infty} \quad (7)$$

в соответствии с (6) получим

$$M^2 = \frac{M_{\infty}^4}{v^{\gamma-1} (M_{\infty}^2 - 1 + v^2)}, \quad v = \operatorname{tg} \sigma_{\infty} \operatorname{ctg} \sigma \quad (8)$$

При таком выборе  $K$  первая из формул (8) дает аппроксимированное выражение уравнения (2), при котором имеет место совпадение значений (2) и (8) вместе с их производными в точке  $M = M_{\infty}$ . На фиг. 1 представлены точная и приближенная зави-

симости  $\nu$  от  $M$ , определяемые из (2) и (8) при  $\gamma = 1.405$ , соответственно сплошными и пунктирными линиями. Отметим, что существующие приемы аппроксимации уравнения состояния газа с использованием различного вида обобщенных преобразований [1-6] являются более точными, но при этом сильно усложняется переход к физической плоскости и решение данной задачи наталкивается на большие трудности. В рассматриваемом же случае переход от плоскости  $\sigma\theta$  к плоскости  $xu$  определяется на основании (4), (5) и (8) при помощи формул

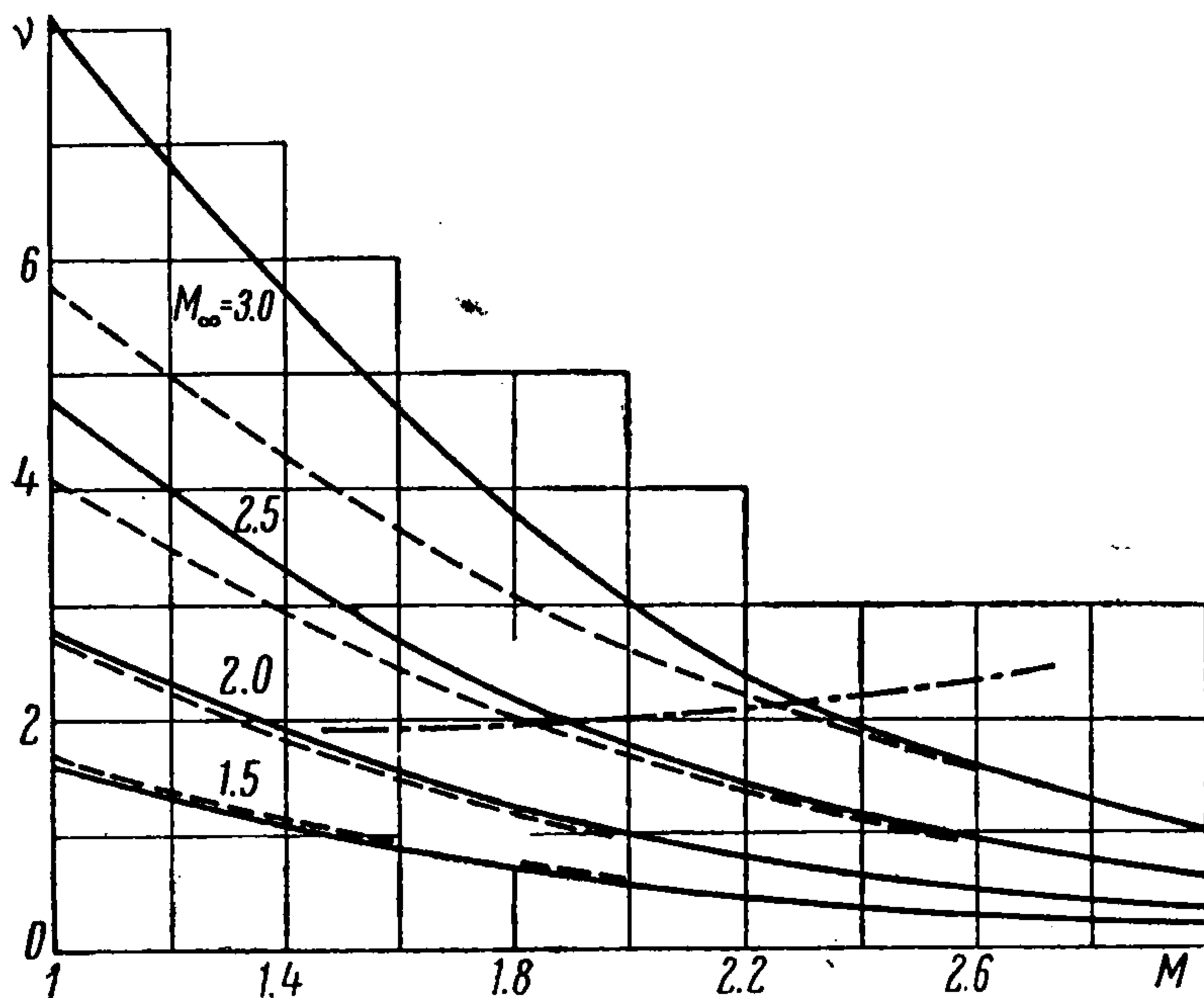
$$\begin{aligned} (x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \sigma &= \Phi_1'(\sigma + \theta) + \Phi_2'(\sigma - \theta) \\ (x \sin \theta - y \cos \theta) \sin \sigma &= -\Phi_1'(\sigma + \theta) + \Phi_2'(\sigma - \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Phi_1(\sigma + \theta)$  и  $\Phi_2(\sigma - \theta)$  — произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям (5) при  $K = \text{const}$ .

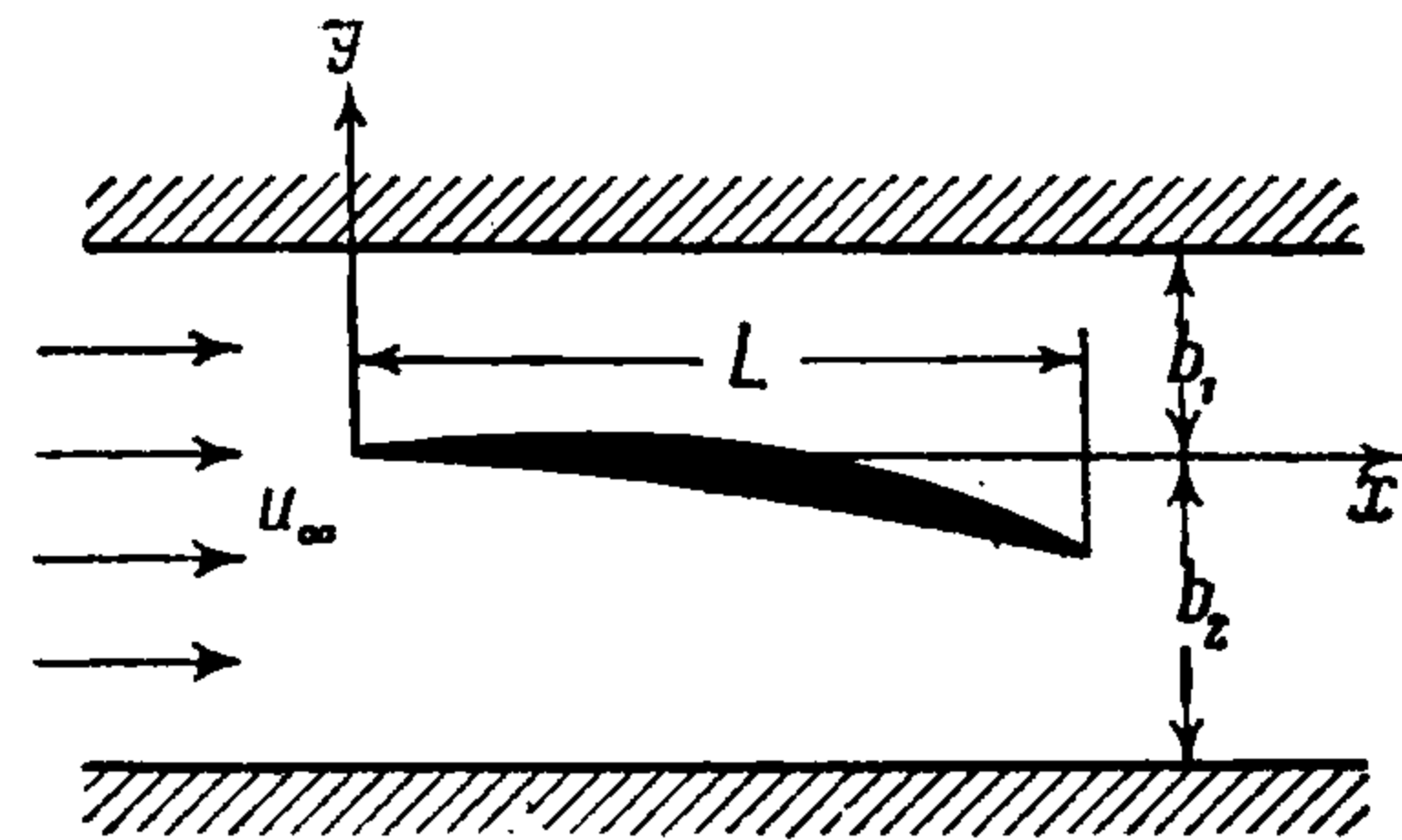
Рассмотрим теперь граничные условия. При  $x < 0$  (фиг. 2) сверхзвуковой поток невозмущен и, следовательно,

$$\begin{aligned} w &= u_\infty \quad \text{при } y = 0, x < 0, \\ \theta &= \theta(x/L) \quad \text{на } C_0 \\ \theta &= 0 \quad \text{при } y = b_1, y = -b_2 \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\theta(x/L)$  — заданная функция на обтекаемом профиле  $C_0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение задачи в областях над профилем и под ним осуществляется отдельно и в одинаковой форме. Поэтому ограничимся рассмотрением только верхней области.

Из условия  $\theta = 0$  при  $y = b_1$  сразу находим, что  $\Phi_1'(\sigma) = \Phi_2'(\sigma) + b_1 \sin \sigma$ . Полное же удовлетворение условий (10) дает

$$\begin{aligned} t_0 \cos [\sigma(t_0) - \theta(t_0)] - \tau_0 \sin [\sigma(t_0) - \theta(t_0)] &= \frac{2}{L} \Phi_2'[\sigma(t_0) - \theta(t_0)] \\ t_0 \cos [\sigma(t_0) + \theta(t_0)] - (2\zeta_1 - \tau_0) \sin [\sigma(t_0) + \theta(t_0)] &= \frac{2}{L} \Phi_2'[\sigma(t_0) + \theta(t_0)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left( t_0 = \frac{x}{L}, \tau_0 = \frac{y(t_0)}{L}, \zeta_1 = \frac{b_1}{L} \right)$$

где  $y(t_0)$  — уравнение верхней части профиля.

В частности, при  $\zeta_1 = \infty$  из второго уравнения (11) находим выражение

$$\sigma(t_0) + \theta(t_0) = \sigma_\infty \quad (12)$$

которое определяет решение Прандтля-Майера неограниченного сверхзвукового потока.

Для решения уравнений (11) в общем случае введем вспомогательную переменную  $t_1$ , определяемую из условия

$$\sigma(t_0) + \theta(t_0) = \sigma(t_1) - \theta(t_1) \quad (13)$$

Тогда из уравнений (11) функция  $\Phi_2'$  исключается и мы получим

$$t_1 = t_0 - (2\zeta_1 - \tau_0 - \tau_1) \operatorname{tg} [\sigma(t_0) + \theta(t_0)], \quad \tau_1 = \tau_0(t_0) \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) являются уравнениями для определения  $\sigma$ . Общее решение этих уравнений можно получить при помощи метода последовательных приближений, используя (12) в качестве нулевого приближения:

$$\sigma_0(t_1) + \theta(t_1) = \sigma_\infty, \quad \sigma_p(t_0) + \theta(t_0) = \sigma_{p-1}(t_1) - \theta(t_1) \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

В результате получим

$$\sigma(t_0) = \sigma_\infty - \theta(t_0) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta(t_k) \quad (16)$$

где  $t_p$  связано с  $t_{p-1}$  по формуле (14), т. е.

$$t_p = t_{p-1} - (2\zeta_1 - \tau_{p-1} - \tau_p) \operatorname{tg} [\sigma(t_{p-1}) + \theta(t_{p-1})] \quad (\tau_p = \tau_0(t_p), p = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

Пусть при совместном рассмотрении (13) и (14) величина  $\sigma$  исключена, т. е.  $t_1(t_0) = Gt_0$ , где  $G$  — некоторый функциональный оператор, тогда из (17) имеем, что  $t_p(t_0) = G^p t_0$ . Следовательно, последовательность значений  $t_p$  удовлетворяет условию  $t_p(t_0) = G^{p-k} t_k(t_0)$ , так как  $t_k(t_0) = G^k t_0$ . Пользуясь этим и подставляя (16) в (17), найдем

$$t_p = t_{p-1} - (2\zeta_1 - \tau_{p-1} - \tau_p) \operatorname{tg} \left[ \sigma_\infty - 2 \sum_{k=p}^{\infty} \theta(t_k) \right] \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

Рассмотрим значения  $0 < \sigma(t_k) + \theta(t_k) < \pi/2$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) при  $0 \leq t_0 \leq 1$ , тогда из (17) получаем ( $m = \min \operatorname{tg}(\sigma + \theta)$ )

$$t_p \leq t_{p-1} - (2\zeta_1 - \tau_{p-1} - \tau_p) m, \quad t_p < t_{p-1} \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

Таким образом, последовательность значений  $t_p$  является убывающей с возрастанием  $p$ . Поэтому при  $p > n$  получим  $t_p < 0$  ( $\theta(t_p) = 0$ ) и ряды в (16) и (18) обращаются в конечные суммы<sup>1</sup>:

$$t_p = t_{p-1} - (2\zeta_1 - \tau_{p-1} - \tau_p) \operatorname{tg} \left[ \sigma_\infty - 2 \sum_{k=p}^n \theta(t_k) \right] \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

$$\sigma(t_0) = \sigma_\infty - \theta(t_0) - 2 \sum_{k=1}^n \theta(t_k) \quad (21)$$

При решении уравнений (20) задаемся целым и положительным числом  $n$ , для которого находим точку отражения характеристики на профиле и интервал скоростей ( $\sigma_\infty$ ), соответствующий заданному  $n$ . Значения же  $t_p$  определяются из (20) в обратном порядке, а именно  $t_n, t_{n-1}$  и т. д. до  $t_0 = t_0(t_n)$ . Распределение давления на профиле определяем по уравнению состояния

$$p = p_\infty v^\gamma = p_\infty \operatorname{tg}^\gamma \sigma_\infty \operatorname{ctg}^\gamma \sigma(t_0) \quad (22)$$

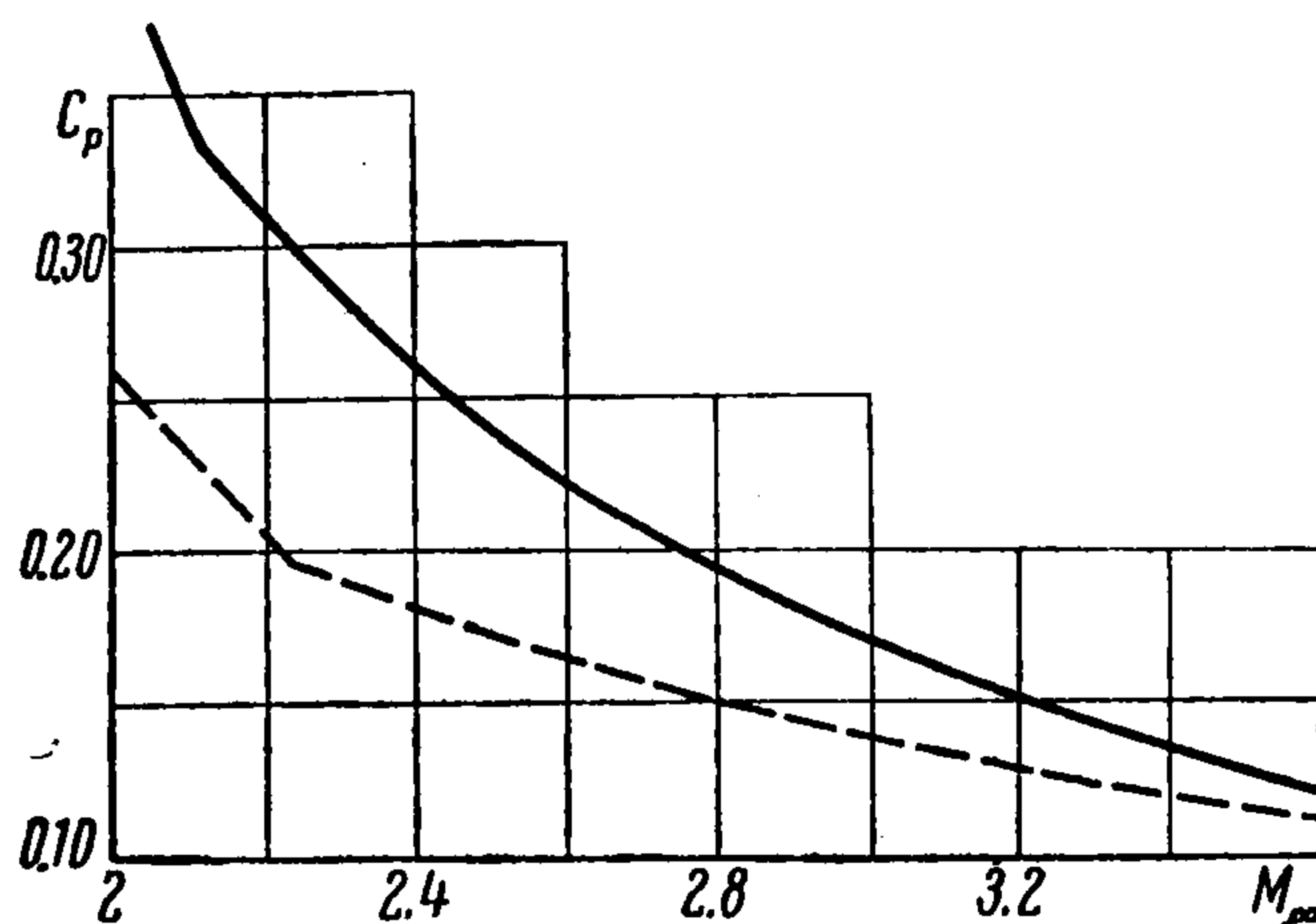
при помощи которого можно найти суммарные значения аэродинамических сил и момента относительно передней кромки профиля. В частности, для плоской пластины, расположенной под углом атаки  $\theta = \operatorname{const}$ , безразмерные коэффициенты подъемной силы и момента определяются по формулам

$$c_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_\infty L_1 u_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^{2\gamma}} \int_0^1 (v_-^\gamma - v_+^\gamma) dt_0 \quad \left( L_1 = \frac{L}{\cos \theta} \right) \quad (23)$$

$$c_m = \frac{m}{\frac{1}{2} \rho_\infty L_1^2 u_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^{2\gamma}} \int_0^1 (v_-^\gamma - v_+^\gamma) t_0 dt_0$$

где  $L_1$  — ширина пластинки, а  $P$  и  $m$  — подъемная сила и ее момент.

<sup>1</sup> Свойства уравнений (20) и (21) (определение прямых и обратных волн, точки отражений характеристик и т. п.) изучены детально В. С. Хоменко и применены к исследованию движения судна в мелководном канале.



Фиг. 3

В рассматриваемом случае плоской пластины  $\tau_0 = -t_0 \operatorname{tg} \theta$  и использование (20)—(23) приводит к интегрируемым выражениям, так как  $\sigma(t_0)$  между двумя соседними точками отражений характеристик является постоянной и изменяется скачком при переходе через эти точки. Сопоставим полученные данные нелинейной теории с результатами линеаризованной теории. В линеаризованном случае  $\theta$  и  $\tau_0$  принимаются малыми величинами и уравнения (20) упрощаются. Имеем

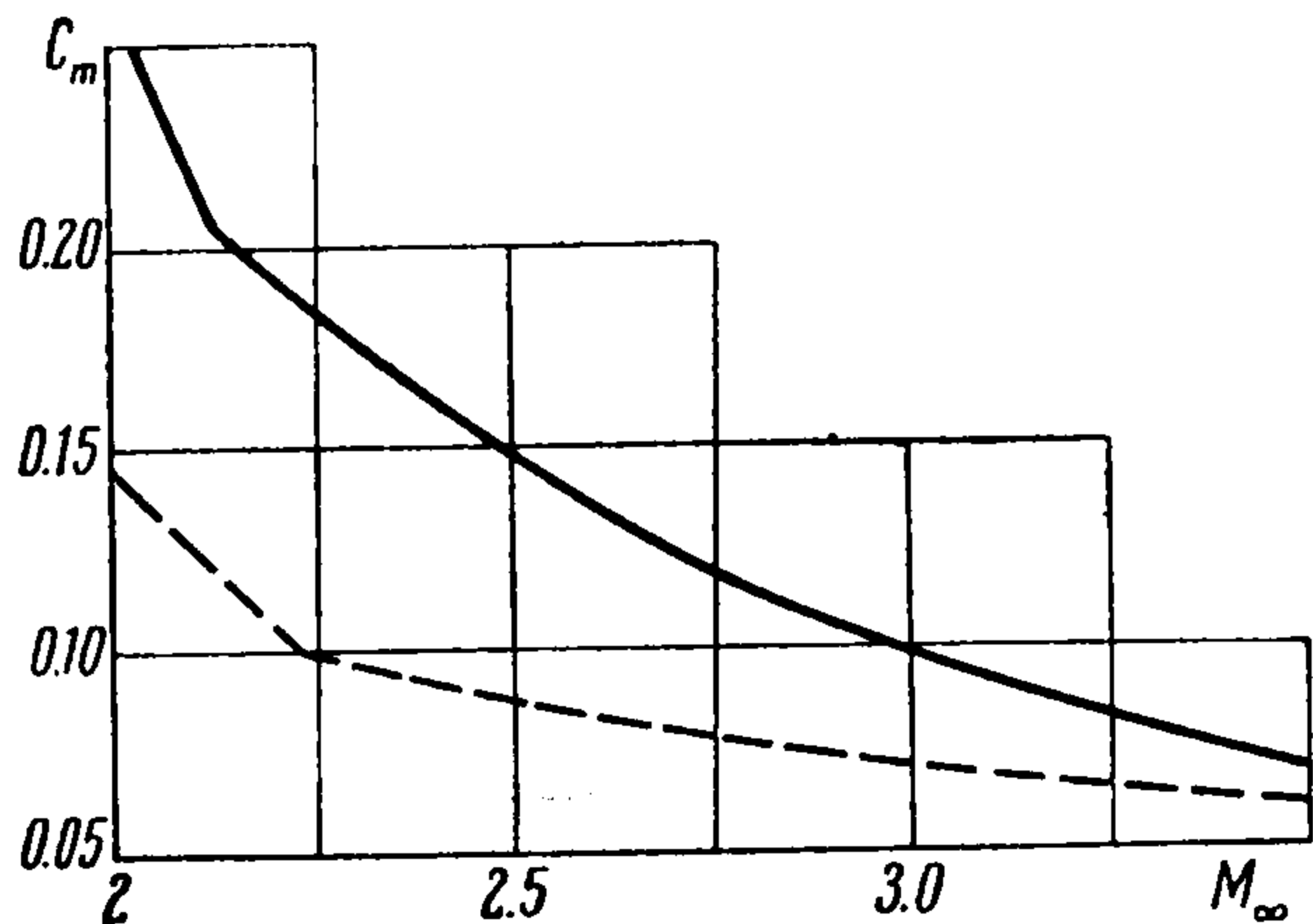
$$t_p = t_0 - 2p\zeta_1 \operatorname{tg} \sigma_\infty \quad (p = 1, \dots, n) \quad (24)$$

Представляя выражение (22) с точностью до малых первого порядка и учитывая при этом (21), (3) и (7), получим

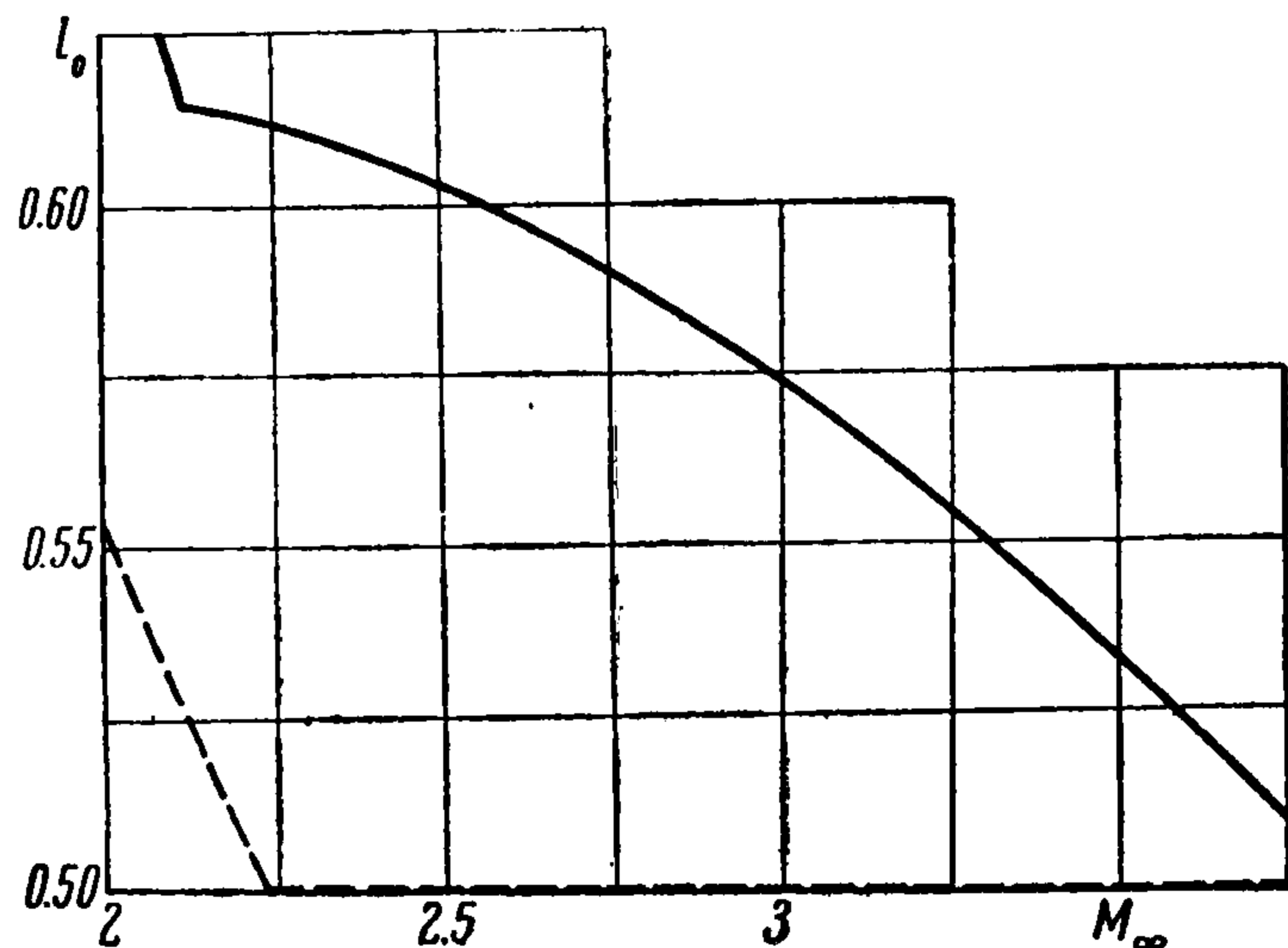
$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[ \theta(t_0) + 2 \sum_{k=1}^n \theta(t_k) \right] \quad (25)$$

Если же произвести линеаризацию уравнений (1) и (2), то придем к тем же выражениям (24) и (25) (см., например, [7]).

На фиг. 3—5 представлены зависимости  $c_p$ ,  $c_m$  и  $l_0 = c_m/c_p$  от  $M_\infty$  при  $\theta = 0.1$  радиан,  $\zeta_1 = b_1/L = 0.25$  и  $\zeta_2 = b_2/L = 0.3$ , рассчитанные по формулам (23) (сплошные линии) и по линеаризованной теории (пунктирные линии).



Фиг. 4



Фиг. 5

В рассматриваемом примере нижняя граница для  $M$  представлена штрих-пунктирной линией на фиг. 1. Начиная с этих значений, имеем хорошее соответствие между формулами (2) и (8). Из сопоставления значений на фиг. 3—5 видно, что решение задачи обладает большой чувствительностью к нелинейным эффектам в стесненном потоке и значения  $c_p$  и  $c_m$  нелинейной теории значительно превосходят эти же значения для линейной теории даже при малых углах атаки.

Изложенный метод позволяет рассчитать аэродинамические характеристики профиля в сверхзвуковом потоке вблизи поверхности земли.

Поступила 28 III 1958

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христанович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа. ПММ, т. 11, вып. 2, 1947.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
3. Валландер С. В. Об интегрировании гиперболической системы двух уравнений при двух независимых переменных. ДАН СССР, т. 83, вып. 5, 1952.
4. Домбровский Г. А. О приближенном интегрировании сверхзвукового течения газа. Сборник статей «Теоретическая гидродинамика» под редакцией Л. И. Седова, № 11, вып. 3. Оборонгиз, 1953.
5. Домбровский Г. А. Приближенное аналитическое решение плоской задачи сверхзвуковой газовой динамики. Сборник статей «Теоретическая гидродинамика» под редакцией акад. Л. И. Седова, № 12, вып. 4. Оборонгиз, 1954.
6. Руднев Ю. В. О приближенном интегрировании уравнений газовой динамики. Сборник статей «Теоретическая гидродинамика» под редакцией акад. Л. И. Седова, № 16, вып. 6. Оборонгиз, 1955.
7. Хоменко В. С. Движение судна в мелководном канале. Известия АН СССР. ОТН, № 10, 1957.