ВИБРАЦИЯ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КРЫЛА БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Г. И. Копзон

(Ленинград)

§ 1. Рассматривается движение прямоугольного крыла большого удлинения в сверхзвуковом потоке, так что влиянием концов с достаточной степенью точности можно пренебречь.

Полагая крыло тонким, а возмущения, явно зависящие от времени, малыми, воспользуемся выражением потенциала скоростей, выведенным в [1].

Ниже решается задача о крутильно-изгибном флаттере такого крыла; при решении не делаются обычные допущения о квазистационарности потока и об экспоненциальном характере зависимостей от времени искомых параметров. Расположение крыла в связанной системе координат показано на фигуре.

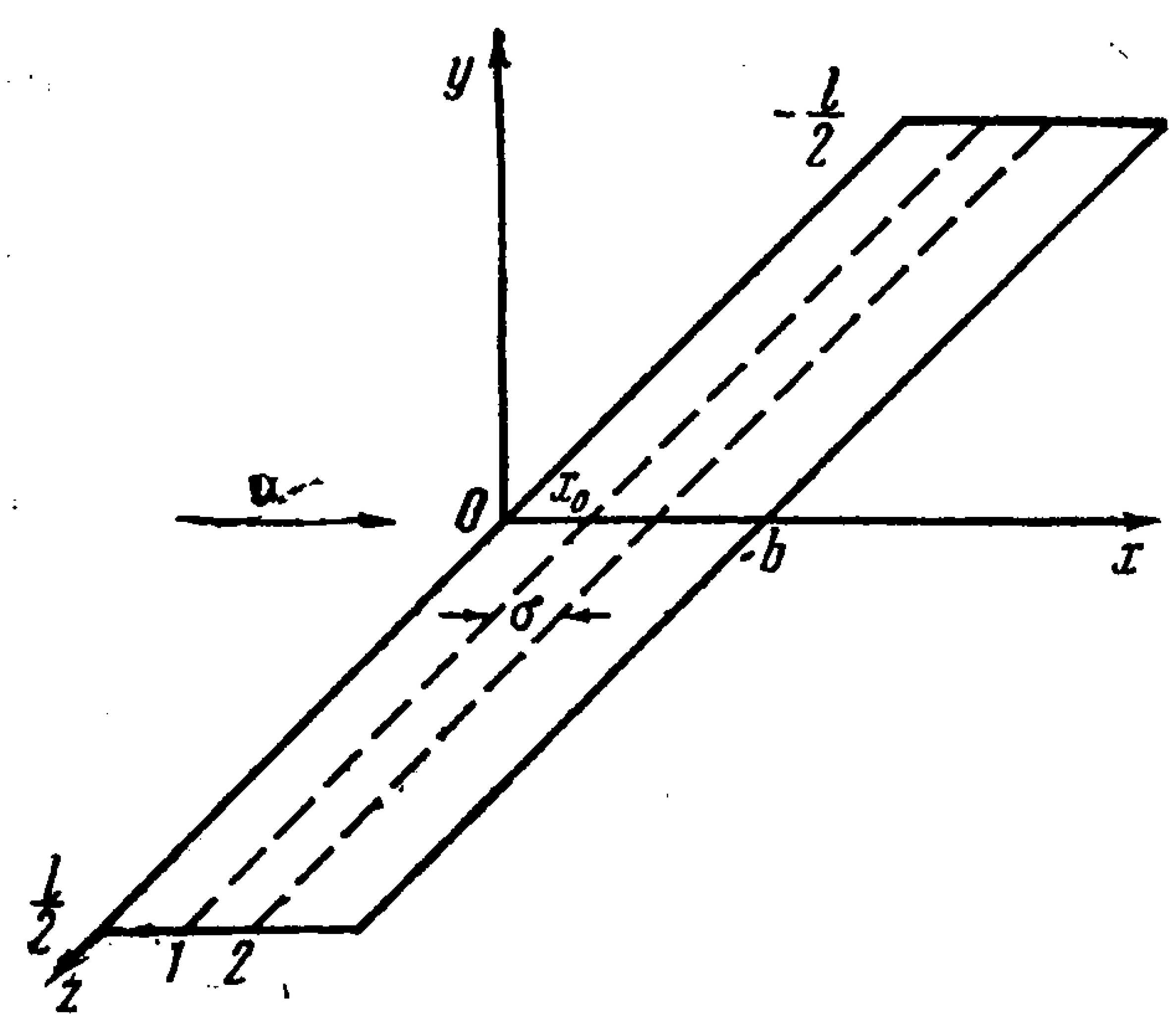
Уравнения крутильно-изгибных деформаций крыла, изображенного на фигуре, в потоке могут быть записаны в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - \mu_{11}\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - \mu_{12}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \varepsilon_p p(z, \tau)$$
$$-\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \mu_{21}\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \mu_{22}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \varepsilon_m M(z, \tau) \qquad (1.1)$$

Здесь

$$\mu_{11} = \frac{mb^4\omega^2}{EI}, \qquad \mu_{21} = \frac{m\sigma b^4\omega^2}{GI_p}, \qquad \varepsilon_p = \frac{\rho u^2}{E}\frac{b^4}{I}$$
$$\mu_{12} = \frac{m\sigma b^3\omega^2}{EI}, \qquad \mu_{22} = \frac{I_m b^2\omega^2}{GI_p}, \qquad \varepsilon_m = \frac{\rho u^2}{G}\frac{b^4}{I_p}$$

Обозначения заимствованы из работы[2]; при этом введены следующие безразмерные величины:



$$y_1 = \frac{y}{b}, \qquad z_1 = \frac{z}{b}, \qquad p_1 = \frac{p}{\rho u^2 b}$$
$$M_1 = \frac{M}{\rho u^2 b^2}, \qquad \tau = \omega t$$

(в (1.1) и ниже индекс 1 опущен).

Очевидно, $[\omega] = 1$ / сек (величина ω определится ниже).

Применяя разложение прогиба $y(z, t)$, угла закручивания $\theta(z, t)$ и нормальной к поверхности крыла скорости $v_N(x, z, t)$ в ряды по z, будем иметь

$$y(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{i\alpha_n z}$$

$$\theta(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(t) e^{i\alpha_n z}, \qquad v_N(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(x, t), e^{i\alpha_n z} \qquad (1.2)$$

Здесь $\alpha_n = 2\pi n / l$, при этом l — размах крыла. Очевидно,

$$v_n(x, t) = \dot{a}_n(t) + (x - x_0)\dot{b}_n(t) - ub_n(t) \qquad (1.3)$$

§ 2. В соответствии с результатами[1] получим в плоскости Лапласа s выражения для безразмерных силы и момента, фигурирующих в (1.1). При этом для n-х гармоник разложений по размаху будем иметь

$$P_n(s)=[sT_0(s)+s^2T_1(s)]\,A_n(s)-[(\zeta s+1)\,T_0(s)+\zeta s^2T_1(s)-s^2T_2(s)]\,B_n(s)-$$
$$-[sT_0(s)+s^2T_1(s)]\,a_n(0)+[\zeta sT_0(s)+s(\zeta s-1)\,T_1(s)-s^2T_2(s)]\,b_n(0) \qquad (2.1)$$

$$M_n(s)=[\beta sT_0(s)+s(\beta s-1)\,T_1(s)-s^2T_2(s)]\,A_n(s)-[\beta(\zeta s+1)\,T_0(s)+ \qquad (2.2)$$
$$+(\beta\zeta s^2-\zeta s-1)\,T_1(s)-s^2T_2(s)+s^2T_3(s)]\,B_n(s)-[\beta sT_0(s)+s(\beta s-1)\,T_1(s)-$$
$$-s^2T_2(s)]\,a_n(0)+[\beta\zeta sT_0(s)+s(\beta\zeta s-1)\,T_1(s)-s(s-1)\,T_2(s)+s^2T_3(s)]\,b_n(0)$$

(2.1), (2.2) получены при помощи формул

$$p_n(s)=\int_0^b \Delta p_n(x,s)\,dx, \qquad M_n(s)=\int_0^b (x-x_0)\,\Delta p_n(x,s)\,dx$$

$$\Delta p_n(x,s)=-\rho\left[s\Phi_n(x,0,s)+u\frac{\partial}{\partial x}\Phi_n(x,0,s)\right]$$

Нормальная скорость на крыле в выражении потенциала $\Phi_n(x, 0, s)$ берется по формуле (1.3) (см. также [1]).

Приняты нижеследующие обозначения

$$\zeta=\frac{x_0}{b}, \qquad \beta=1-\zeta, \qquad T_k(s)=\int_0^1 dx\int_0^x\cdots\int_0^x e^{\nu x}I_0(\lambda_n x)\,(dx) \qquad (2.3)$$

Дополнительно к ранее принятым безразмерным величинам в выражениях (2.1) (2.2), (2.3) имеем (индекс 1, как и выше, в дальнейшем опускается) (2.4)

$$s_1=\frac{s}{\omega}, \qquad \nu_1=\frac{M}{\sqrt{M^2-1}}\frac{bs}{a}, \qquad \lambda_{n1}{}^2=\alpha_{n1}^2-\frac{1}{M^2-1}\left(\frac{bs}{a}\right)^2, \qquad x_1=\frac{x}{b}, \qquad \alpha_{n1}=ba_n$$

Кроме того, в ходе выкладок оказывается удобным полагать $\omega=u/b$; далее в формулах (2.1), (2.2) имеем $A_n(s)$, $B_n(s)$ — изображения $a_n(t)$, $b_n(t)$ в плоскости Лапласа, $a_n(0)$, $b_n(0)$ — начальные значения $a_n(t)$, $b_n(t)$. Применяя преобразование Лапласа к системе (1.1) и учитывая формулы (2.1), (2.2), для неизвестных величин $A_n(s)$, $B_n(s)$ получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$[1+\nu_{11}s^2-\varepsilon_p's(T_0+sT_1)]\,A_n(s)+\{-\nu_{12}s^2+\varepsilon_p'[(\zeta s+1)\,T_0+\zeta s^2T_1-s^2T_2]\}\,B_n(s)=$$
$$=[\nu_{11}s^2-\varepsilon_p's(T_0+sT_1)]\,a_n(0)+\nu_{11}s\dot a_n(0)+\{-\nu_{12}s^2+\varepsilon_p'[\zeta sT_0+s(\zeta s-1)\,T_1-$$
$$-s^2T_2]\}\,b_n(0)-\nu_{12}s\dot b_n(0) \qquad (2.5)$$

$$\{\nu_{21}s^2-\varepsilon_m'[\beta sT_0+s(\beta s-1)\,T_1-s^2T_2]\}\,A_n(s)+\{1+\nu_{22}s^2+\varepsilon_m'[\beta(\zeta s+1)\,T_0+$$
$$+(\beta\zeta s^2-\zeta s-1)\,T_1-s^2T_2+s^2T_3]\}\,B_n(s)=-\{\nu_{21}s^2+\varepsilon_m'[\beta sT_0+$$
$$+s(\beta s-1)\,T_1-s^2T_2]\}\,a_n(0)-\nu_{21}s\dot a_n(0)+\{\nu_{22}s^2+\varepsilon_m'[\beta\zeta sT_0+s(\beta\zeta s-1)\,T_1-$$
$$-s(s-1)\,T_2+s^2T_3]\}\,b_n(0)+\nu_{22}s^2\dot b_n(0) \qquad (2.6)$$

Здесь $T_k=T_k(s)$ ($k=0, 1, 2, 3$); из (2.3), (2.4) следует, что это есть голоморфные на плоскости s функции.

В уравнениях (2.5), (2.6) приняты обозначения

$$\nu_{11}=\frac{\mu_{11}}{\alpha_n{}^4}, \qquad \nu_{12}=\frac{\mu_{12}}{\alpha_n{}^4}, \qquad \nu_{21}=\frac{\mu_{21}}{\alpha_n{}^2}, \qquad \nu_{22}=\frac{\mu_{22}}{\alpha_n{}^2} \qquad (2.7)$$
$$\varepsilon_p'=\frac{\varepsilon_p}{\alpha_n{}^4}=\frac{\rho u^2}{E}\frac{l^4}{(2\pi n)^4 I}, \qquad \varepsilon_m'=\frac{\varepsilon_m}{\alpha_n{}^2}=\frac{\rho u^2}{G}\frac{b^2l^2}{(2\pi n)^2 I_p}$$

Ниже нам потребуется зависимость $\varepsilon_p'=g\varepsilon_m'$, где

$$g=\frac{1}{(2\pi n)^2}\left(\frac{l}{b}\right)^2\frac{I_p}{I}\frac{G}{E} \qquad (2.8)$$

Для получения искомых функций $a_n(t)$, $b_n(t)$ необходимо найти из (2.5), (2.6) изображения $A_n(s)$, $B_n(s)$ и затем перейти к их оригиналам по формуле обращения Римана — Меллина.

Эта операция является довольно громоздкой, однако некоторые качественные выводы могут быть сделаны и без непосредственного вычисления $a_n(t)$, $b_n(t)$. Так, на основании рассмотрения (2.5), (2.6) можно заключить, что:

а) судя по характеру зависимости T_k от s, интегралы Римана — Меллина для a_n, b_n определяются по одним только вычетам (см. ниже характеристическое уравнение частот). Следовательно, в точном решении зависимость от времени при наших ограничениях будет носить экспоненциальный характер;

б) ε_p', ε_m' [см. (2.7)] показывают, что влияние потока существенно лишь для низких тонов. Для высоких тонов в силу $\varepsilon_p' \sim 1/n^4$, $\varepsilon_m' \sim 1/n^2$ влияние потока становится ничтожно малым. Очевидно, достаточно производить проверку устойчивости в потоке лишь для низшего тона разложений (1.2).

Нетрудно написать уравнение для определения вычетов системы (2.5), (2.6).

$$\begin{aligned}\Delta(s) = [1 + \nu_{11}s^2 - g\varepsilon s(T_0 + sT_1)]\{1 + \nu_{22}s^2 + \varepsilon[\beta(\zeta s + 1)T_0 + \\ + (\beta\zeta s^2 - \zeta s - 1)T_1 - s^2T_2 + s^2T_3]\} + \{\nu_{21}s^2\varepsilon[\beta sT_0 + s(\beta s - 1)T_1 - \\ - s^2T_2]\}\{-\nu_{12}s^2 + g\varepsilon[(\zeta s + 1)T_0 + \zeta s^2T_1 - s^2T_2]\} = 0\end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_m'$. В предельном случае $\varepsilon = 0$ получим

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) = (1 + \nu_{11}s^2)(1 + \nu_{22}s^2) - \nu_{21}\nu_{12}s^4 = 0 \tag{2.10}$$

Последнее, очевидно, является уравнением частот в случае колебаний крыла в пустоте. По аналогии с ним назовем и (2.9) характеристическим уравнением частот колебаний крыла в сверхзвуковом потоке.

§ 3. Уравнение (2.9) можно записать следующим образом:

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) + \varepsilon K_1(s) + \varepsilon^2 K_2(s) = 0 \tag{3.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= (1 + \nu_{11}s^2)D_2(s) - (1 + \nu_{22}s^2)D_1(s) + s^2[\nu_{21}D_4(s) - \nu_{12}D_3(s)]\\
K_2(s) &= D_3(s)D_4(s) - D_1(s)D_2(s)\\
D_1(s) &= gs(T_0 + sT_1)\\
D_2(s) &= \beta(\zeta s + 1)T_0 + (\beta\zeta s^2 - \zeta s - 1)T_1 - s^2T_2 + s^2T_3\\
D_3(s) &= \beta sT_0 + s(\beta s - 1)T_1 - s^2T_2\\
D_4(s) &= g[(\zeta s + 1)T_0 + \zeta s^2T_1 - s^2T_2]
\end{aligned}$$

Ограничиваясь практически интересным случаем весьма жесткого крыла, т. е. пренебрегая ε^2 по сравнению с ε, получим приближенное уравнение частот в виде [1]

$$\Delta_0(s) + \varepsilon K_1(s) = 0 \tag{3.2}$$

Если теперь искать решения (3.2) в виде

$$s_j = s_j^\circ + \varepsilon s_j' \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{3.3}$$

то для добавков s_j', пренебрегая членами, пропорциональными ε^2, получим формулу

$$s_j' = -\frac{K_1(s_j^\circ)}{[\partial\Delta_0(s)/\partial s]\, s = s_j^\circ} \tag{3.4}$$

Здесь s_j° — частоты, соответствующие случаю колебаний крыла в пустоте: $\Delta_0(s_j^\circ) = 0$. Вычисляя, окончательно придем к следующим выражениям:

$$s_{1,2}^{0} = \pm i\omega_1, \qquad s_{3,4}^{0} = \pm i\omega_2 \tag{3.5}$$

$$s_{1,2}' = \pm\frac{i}{2\omega_1}\frac{\Omega(\omega_1)}{D}, \qquad s_{3,4}' = \mp\frac{i}{2\omega_2}\frac{\Omega(\omega_2)}{D} \tag{3.6}$$

$$\Omega(\omega) = (1 - \nu_{11}\omega^2)D_2(\pm i\omega) - (1 - \nu_{22}\omega^2)D_1(\pm i\omega) - \omega^2[\nu_{21}D_4(\pm i\omega) - \nu_{12}D_3(\pm i\omega)]$$

$$\omega_{1,2} = \left(\frac{1}{2\delta}[\nu_{11} + \nu_{22} \pm D]\right)^{1/2}, \qquad D = \sqrt{(\nu_{11} - \nu_{22})^2 + 4\nu_{21}\nu_{12}}$$

$$\delta = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{21}\nu_{12} > 0 \qquad \text{(условие устойчивости)}$$

[1] В данной работе не производится оценка значений ε, при которых излагаемый ниже приближенный метод решения задачи справедлив.

В большинстве случаев можно ограничиться только исследованием полученных решений с точки зрения их устойчивости по времени. Поскольку величины s_j° являются чисто мнимыми, условия устойчивости в первом приближении ($\varepsilon^2 \approx 0$) принимают вид:

$$\operatorname{Re} s_j' \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{3.7}$$

Путем элементарных преобразований нетрудно убедиться в том, что (3.7) в конечном счете могут быть приведены к следующим двум условиям:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \{[A(\nu_{ik}, \omega_1) + iB(\nu_{ik}, \omega_1)]\, T_0(i\omega_1) + [C(\nu_{ik}, \omega_1) + iD(\nu_{ik}, \omega_1)]\, T_1(i\omega_1) + \\ + E(\nu_{ik}, \omega_1)\, T_2(i\omega_1) - G(\nu_{ik}, \omega_1)\, T_3(i\omega_1)\} \geqslant 0\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \{[A(\nu_{ik}, \omega_2) - iB(\nu_{ik}, \omega_2)]\, T_0(-i\omega_2) + [C(\nu_{ik}, \omega_2) - iD(\nu_{ik}, \omega_2)]\, T_1(-i\omega_2) + \\ + E(\nu_{ik}, \omega_2)\, T_2(-i\omega_2) - G(\nu_{ik}, \omega_2)\, T_3(-i\omega_2)\} \geqslant 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

В (3.8), (3.9) приняты следующие обозначения:

$$A(\nu_{ik}, \omega) = \beta(1 - \nu_{11}\omega^2) - g\nu_{21}\omega^2$$

$$B(\nu_{ik}, \omega) = -\omega g(1 - \nu_{22}\omega^2) + \beta\omega\zeta(1 - \nu_{11}\omega^2) + \omega^3\beta\nu_{12} - g\nu_{21}\omega^2$$

$$C(\nu_{ik}, \omega) = \omega^2 g(1 - \nu_{22}\omega^2) - (\beta\zeta\omega^2 + 1)(1 - \nu_{11}\omega^2) - \omega^4\beta\nu_{12}$$

$$D(\nu_{ik}, \omega) = -\omega\zeta(1 - \nu_{11}\omega^2) - \omega^3\nu_{12}$$

$$E(\nu_{ik}, \omega) = \omega^2(1 - \nu_{11}\omega^2) + \omega^4(\nu_{12} - \nu_{21})$$

$$G(\nu_{ik}, \omega) = \omega^2(1 - \nu_{11}\omega^2)$$

Интересно отметить, что в выражения, стоящие в (3.8) и (3.9) слева, входят механические характеристики конструкции крыла (величины ν_{ik}, $\omega_{1,2}$) и параметры невозмущенного потока (через T_k). Таким образом, условия (3.8) и (3.9) могут служить для проверки устойчивости заданной конструкции крыла в сверхзвуковом потоке. При вычислениях могут быть использованы таблицы функций

$$T(a, b) = \int_0^a \exp i\sigma I_0(b\sigma)\, d\sigma$$

имеющиеся, например, в работе [3]. По ним легко вычислить интересующие нас функции $T_k(\pm i\omega_{1,2})$.

§ 4. Условия (3.8), (3.9) пригодны для проверки устойчивости в потоке заданной конструкции крыла. Для предварительного анализа конструктивных параметров они, по-видимому, неприменимы, поскольку содержат в себе величины, определенные табличным способом. Напишем приближенные выражения функций $T_k(i\omega)$ в явной аналитической форме. При этом будем исходить из последней формулы (2.3) и интегрального представления нулевой функции Бесселя в виде

$$I_0(\lambda x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda x \sin\theta}\, d\theta \tag{4.1}$$

Подставив (4.1) в (2.3), в окончательном виде будем иметь

$$T_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} (\nu + i\lambda\sin\theta)^n\, d\theta \tag{4.2}$$

Учитывая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2r}\theta\, d\theta = \frac{2\pi\,(2r-1)!!}{2^r r!}$$

получим следующее выражение:

$$T_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(s)}{(n+k+1)!}\,\nu^n, \qquad C_n(s) = 2\pi \sum_{r=0}^{r \leqslant {}^1/_2 n} (-1)^r \frac{(2r-1)!!}{r!} \binom{n}{2r} \left(\frac{\lambda^2}{2\nu^2}\right)^r \tag{4.3}$$

Выражения $\lambda = \lambda_n$, ν даны формулами (2.4). Подставляя в (4.3) $s = i\omega$, получим

$$C_n(i\omega) = 2\pi \sum_{r=0}^{r\leqslant {}^1/_2 n} \binom{n}{2r} \frac{(2r-1)!!}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^{2r}, \qquad \xi = \sqrt{\frac{(M^2-1)a^2\alpha^2+\omega^2}{M^2\omega^2}} > 0 \qquad (4.4)$$

Очевидно, можем написать

$$\frac{(2r-1)!!}{r!} = \prod_{k=1}^{r} \frac{2(r-k)+1}{r-k+1}, \qquad 1 \leqslant \frac{2(r-k)+1}{(r-k)+1} < 2$$

так что

$$1 \leqslant \frac{(2r-1)!!}{r!} < 2^r$$

Подставляя последнее неравенство в выражение (4.4) и производя суммирование по r, получим, учитывая положительность всех слагаемых (4.4), следующие оценки

$$\min[C_n(i\omega)] = \pi\left[\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1-\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$$

$$\max[C_n(i\omega)] = \pi[(1+\xi)^n - (1-\xi)^n] \qquad (4.5)$$

Полагая

$$C_n(i\omega) = \pi[(1+\zeta)^n - (1-\zeta)^n] \qquad \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \leqslant \zeta < \xi\right)$$

будем иметь

$$T_k(i\omega) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)!} \{[i\omega(1+\zeta)]^n - [i\omega(1-\zeta)]^n\}$$

В последней формуле произведем выделение конечных сумм, после чего в окончательном виде получим

$$T_k(i\omega) = \frac{\pi}{[i\omega(1+\zeta)]^{k+1}} \left\{e^{i\omega(1+\zeta)} - \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}[i\omega(1+\zeta)]^q\right\} - $$
$$- \frac{\pi}{[i\omega(1-\zeta)]^{k+1}} \left\{e^{i\omega(1-\zeta)} - \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}[i\omega(1-\zeta)]^q\right\} \qquad (4.6)$$

Ввиду того, что $\varepsilon_{\max} = \sqrt{2}\,\xi_{\min} \approx 1.41\,\xi_{\min}$, можно воспользоваться выражением (4.6), полагая в нем $\zeta \approx \xi_{\text{ср}} \approx 1.2\,\xi_{\min}$.

Ввиду того, что интересующие нас значения k невелики ($k = 0, 1, 2, 3$), приближенные выражения (4.6) будут не очень громоздки при использовании их в условиях (3.8), (3.9).

После окончательного выбора всех параметров крыла лучше всего произвести проверку устойчивости при помощи табличных значений функций $T_k(i\omega)$.

Поступила 9 VI 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Копзон Г. И. Нестационарные движения крыла в сверхзвуковом потоке. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Гроссман Е. П. Флаттер. Труды ЦАГИ, вып. 284, 1937.
3. Schwarz L. Untersuchung einiger mit den Zylinderfunktionen nullter Ordnung verwandter Funktionen Luftfahrtforschung, Bd. 20, S. 340—372, 1944.