ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА

И. А. Биргер

(Москва)

В технических задачах часто встречается необходимость решения неоднородного интегрального уравнения

$$y = \lambda K y + f \tag{1}$$

при значениях параметра λ, существенно превышающих (по абсолютной величине первое собственное значение. Будем предполагать, что функция f может быть разложена в ряд по собственным функциям однородного уравнения:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \qquad \left(c_n = (f,\, y_n) = \int_a^b f y_n h dx\right) \tag{2}$$

Собственные функции y_n в интервале a, b удовлетворяют условиям ортогональности и нормирования с «весом» $h(x)$:

$$(y_n,\, y_m) = \int_a^b y_n y_m h dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

Решение уравнения (1) при помощи разложения в ряд по собственным функциям

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n y_n}{1 - \lambda/\lambda_n} \tag{3}$$

требует предварительного определения очень большого числа собственных функций y_n и соответствующих им собственных значений λ_n, что представляет значительные трудности.

В связи с этим широкое применение получили методы последовательных приближений.

Процесс простой итерации для уравнения (1) сходится только при $|\lambda| < |\lambda_1|$. При больших значениях λ приходится применять более сложные итеративные процессы[1], которые, однако, становятся недостаточно эффективными, если $|\lambda| \gg |\lambda_1|$ (практически при $|\lambda| > 10\,|\lambda_1|$).

Ниже указывается способ решения уравнения (1), который позволяет после определения некоторого конечного числа собственных функций и собственных значений применить сходящийся процесс простой итерации[1].

Для пояснения идеи метода допустим сначала, что параметр λ меньше второго собственного значения ($|\lambda_1| < |\lambda| < |\lambda_2|$). Вместо уравнения (1) рассмотрим преобразованное уравнение[1]

$$y = \lambda K_2 y + f \tag{4}$$

где

$$K_2 y = K y - y_1 \int_a^b K y y_1 h dx = K y - y_1 (K y,\, y_1)$$

Будем решать это уравнение методом простой итерации по схеме

$$y_{(i)} = \lambda K_2 y_{(i-1)} + f \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

---

[1] Независимо от автора близкий по идее метод в задаче о колебании валов был применен А. Ф. Гуровым в диссертации, защищенной в 1957 г.

Допустим, что исходное приближение $y_{(0)}$ представлено в виде

$$y_{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n y_n \tag{6}$$

Внося это равенство в уравнение (5), получим

$$y_{(1)} = c_1 y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n y_n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n} e_n y_n$$

и далее

$$y_{(2)} = c_1 y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) y_n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} e_n y_n$$

$$y_{(3)} = c_1 y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) y_n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^3}{\lambda_n^3} e_n y_n, \ldots$$

При возрастании i приближения сходятся к функции

$$y^* = c_1 y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n y_n}{1 - \lambda/\lambda_n} \tag{7}$$

которая отличается от точного решения лишь первым членом.

Точное решение уравнения (1) теперь можно получить в виде

$$y = y^* + \frac{c_1 y_1}{\lambda_1/\lambda - 1} \tag{8}$$

Учитывая равенство (3), будем иметь

$$y = y^* + \frac{y_1}{\lambda_1/\lambda - 1} \int_a^b f y_1 h dx \tag{9}$$

В том случае, когда λ лежит между собственными значениями λ_{j-1} и λ_j $(|\lambda_{j-1}| < |\lambda| < |\lambda_j|)$, решается методом простой итерации уравнение

$$y = \lambda K_j y + f \qquad \left(K_j y = Ky - \sum_{n=1}^{j-1} y_n (Ky,\ y_n)\right) \tag{10}$$

Если y^* — решение уравнения (10), то решение основного интегрального уравнения будет таким:

$$y = y^* + \sum_{n=1}^{j-1} \frac{y_n}{\lambda_n/\lambda - 1} \int_a^b f y_n h dx \tag{11}$$

Практически решение задачи следует начинать с последовательного определения собственных функций и собственных значений до тех пор, пока будет найдено $|\lambda_j| > |\lambda|$; далее решается уравнение (10) обычным методом итерации.

Изложенный метод легко распространяется на матричные интегральные уравнения[1]

$$[y] = \lambda [K^{(\nu)}] [y] + [f]$$

для которых условие ортогональности и нормирования имеет вид:

$$([y_n],\ [y_m])^{(\nu)} = \int_a^b \sum_{r=0}^{\nu} y_n^{(r)} y_m^{(r)} h_r dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

где $y_n^{(r)}$ и $y_m^{(r)}$ — производные порядка r собственных функций y_n и y_m.

Поступила 18 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, 1956.