ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В. С. Рогожин

(Ростов-на-Дону)

§ 1. При решении обратной задачи гидромеханики, состоящей в нахождении профиля в плоско-параллельном потоке идеальной жидкости по заданному вдоль него распределению величины скорости [1], возникает вопрос об однолистности искомого профиля. Так как многолистные решения в этой задаче не имеют смысла, то условия однолистности по существу являются условиями разрешимости задачи.

Известно, что однолистность решения рассматриваемой задачи равносильна однолистности функции

$$z = z(\zeta) = a_0\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}$$

производная которой имеет вид:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}d\theta\right] \qquad (|\zeta|>1) \tag{1}$$

где $p(\theta)$ выражается через заданную на профиле величину скорости.

Будем через $l(\zeta_1, \zeta_2)$ обозначать нижнюю грань длин гладких дуг, принадлежащих данной области и соединяющих две ее точки ζ_1 и ζ_2.

Лемма. Если $f(\zeta)$ регулярна в бесконечной области G, для которой

$$\sup \frac{l(\zeta_1, \zeta_2)}{|\zeta_1-\zeta_2|} = \lambda_0 \neq \infty \qquad \text{в обл. } G$$

за исключением простого полюса в $\zeta=\infty$, и область значений $f'(\zeta)$ лежит внутри круга с центром в некоторой точке $\zeta=a$, радиус которого равен $|a|/\lambda_0$, то она однолистна.

Доказательство. Имеем

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)| \geqslant |\zeta_1-\zeta_2|\,[|a| - \max|f'(\zeta)-a|]\left|\frac{l(\zeta_1, \zeta_2)}{|\zeta_1-\zeta_2|}\right|$$

а так как

$$\sup\frac{l(\zeta_1, \zeta_2)}{|\zeta_1-\zeta_2|} = \lambda_0, \qquad |f'(\zeta)-a| < \frac{|a|}{\lambda_0}$$

то выражение в квадратной скобке больше нуля и тогда

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|>0$$

Замечание. Для внешности круга $\lambda_0 = {}^1/_2\,\pi$.

Теорема 1. Если:

1) $$p(\theta) = p_1(\theta) + \ln|e^{i\theta}-1|^{\alpha}$$

2) $$|p_1(\theta_1)-p_1(\theta_2)| < k|\theta_1-\theta_2|$$

3) $$\max|e^{i\theta}-1|^{\alpha}e^{p_1(\theta)} < \frac{(\pi\cos\beta+\sqrt{4-\pi^2\sin^2\beta})^2}{\pi^2-4}$$

$$\left(\beta = 2k\ln 2 + \frac{1}{2}\alpha\pi\right)$$

то функция $z(\zeta)$, производная которой имеет вид (1), однолистна вне единичного круга.

Доказательство. Из условий 1 и 2 вытекает, что

$$|\arg f'(\zeta)| \leqslant \alpha\frac{\pi-\theta}{2} + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_1(\theta^\circ)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta^\circ}{2}d\theta^\circ\right| < \alpha\frac{\pi}{2} + 2k\ln 2 = \beta$$

Отсюда следует, что значения $w=f'(\zeta)$ лежат внутри криволинейной трапеции:

$$|\arg f'(\zeta)| < 2k\ln 2, \qquad \exp P_{\min} < |f'(\zeta)| < \exp P_{\max}$$

которая, как можно показать, используя условие 3, будет принадлежать некоторому кругу с центром в точке $a>0$ и радиусом $2a/\pi$. Справедливость теоремы вытекает теперь из леммы и замечания.

Используя эту теорему, можно вывести условия, которым следует подчинить задаваемую на искомом профиле в функции дуги s скорость потока, чтобы профиль оказался однолистным. Для этого введем вспомогательный поток, обтекающий единичную окружность L_0 с той же скоростью на бесконечности и той же циркуляцией, что и при обтекании искомого профиля L, и поставим в соответствие друг другу точки L_0 и L, обладающие равными значениями потенциала. Отношение v_0 / v, где v_0 — скорость на окружности, а v — скорость на профиле, можно теперь подсчитать в функции полярного угла на L_0.

Известно, что область, занятую потоком в плоскости z, обтекающим искомый профиль, можно получить, отображая внешность единичного круга в плоскости ζ аналитической функцией $z(\zeta)$, производная которой имеет вид (1) при $p(\theta) = \ln(v_0 / v)$. Теорема 1 дает теперь достаточные условия однолистности решения обратной задачи. Ясно, что для использования теоремы 1 при $\alpha = 0$ необходимо, чтобы v_0 / v было конечной и отличной от нуля функцией θ. Можно показать, что это свойство будет выполнено, если скорость $v(s)$, задаваемая на профиле, имеет вид: $v(s) = s(s - s_B)\, v_1(s)$, где $v_1(s)$ отлична от нуля при $s = 0$ и $s = s_B$ ($s = 0$ — точка разветвления потока, а s_B — точка схода).

Известно [1], что в этом случае искомый профиль будет гладким. При других предложениях относительно вида функции $v(s)$ искомый профиль может иметь угловые точки, а отношение (v_0 / v) может обращаться в нуль.

Пусть, например, ищется профиль, гладкий в точке разветвления, в точке схода которого касательные образуют угол $\delta\pi$. В этом случае скорость v представима в виде

$$v = | e^{i\theta} - 1 |^{\delta} \, | e^{i\theta} + 1 | \, f_0(\theta)$$

где $f_0(\theta)$ — конечная и отличная от нуля функция.

Для $p(\theta) = \ln(v_0 / v)$ получается выражение

$$\ln v_0 \mid v = \ln | {}^{i\theta} - 1\, e^{1-\delta} + p_1(\theta)$$

где $p_1(\theta)$ непрерывна и при некоторых дополнительных условиях будет удовлетворять условию Липшица. Теорема 1 даст достаточное условие однолистности искомого профиля в этом случае при $\alpha = 1 - \delta$.

Выведенные условия однолистности особенно удобно применять, если скорость в точках искомого профиля задана не в функции его дуги s, а в функции точек вспомогательной окружности L_0, как это предложено Пиблсом [2].

Рассмотрим теперь вопрос об улучшении свойств данного профиля с сохранением однолистности. Итак, пусть задан профиль S_0, гладкий, в точке схода которого B касательные образуют угол $\alpha\pi$ ($\alpha \neq 0$). Распределение скорости $v = f_0(s)$ вдоль S_0 заменяется некоторым новым $v = f(s)$; требуется определить условия, которые обеспечили бы однолистность нового профиля S. Длину профиля считаем неизменной, а функции $f_0(s)$ и $f(s)$ совпадающими в точках разветвления $s = 0$ и схода $s = s_B$. Пусть данный профиль S_0 находится в плоскости Z, а искомый S в плоскости z. Расположим еще в плоскости ζ окружность $|\zeta| = 1$.

Тогда

$$\frac{dz}{dZ} = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta \tag{1}$$

где $p(\theta) = \ln | dz / dZ | = \ln(v_0 / v)$ считается функцией полярного угла на единичной окружности. Очевидно, что искомый профиль будет однолистным, если однолистна функция $z = z(Z)$.

Предположим, что для внешности S_0 выполнено неравенство

$$\sup \frac{l(z_1, z_2)}{| z_1 - z_2 |} = \lambda_0 \neq \infty \quad \text{для } z_1, z_2 \text{ в обл. } G$$

тогда имеет место утверждение

Теорема 2. Если

$$1) \ |p(\theta_1) - p(\theta_2)| < k\,|\theta_1 - \theta_2|$$

$$2) \ \max \frac{v_0}{v} \Big/ \min \frac{v_0}{v} < \frac{(\lambda_0 \cos\beta + \sqrt{1 - \lambda_0^2 \sin^2\beta})^2}{\lambda_0^2 - 1}$$

$$(\beta = 2k \ln 2)$$

то функция $z(Z)$ однолистна вне S_0.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

§ 2. Однолистность решения обратной задачи теории фильтрации [1] равносильна однолистности аналитической в нижней полуплоскости функции $z = z(t)$, производная которой имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \exp\left[-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1} p(\tau)\,\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau - t)}\right] \tag{2}$$

где функция $p(\tau)$ определяется данными задачи.

Теорема 3. Если

$$p(\tau) = -p_1(\tau) - \ln(1-\tau)^p - \ln(1+\tau)^q$$

$$|p_1(\tau_1) - p_1(\tau_2)| < \frac{1}{2}\pi(1 - p - q)$$

то функция $z(t)$, производная которой представляется в виде (2), однолистна.

Доказательство. Учитывая формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1-\tau)^p(1+\tau)^q}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-\xi)}\,d\tau = \frac{p+q}{\sqrt{1-\xi^2}}\arccos\xi - \frac{p\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

можно показать, что колебание контурного значения аргумента функции dz/dt меньше π, а это, как известно, является условием, достаточным для однолистности $z(t)$ [3]

Если заданная в функции дуги s по условию обратной задачи скорость $v(s)$ имеет представление

$$v(s) = s^{n_1}(l-s)^{n_2} f_*(s) \tag{3}$$

где $f_*(s)$ отлична от нуля для $0 \leqslant s \leqslant l$, то углы, образованные искомым контуром с горизонталью в точках $s = 0$ и $s = l$, будут

$$\alpha_1 = \frac{1}{2(1+n_1)}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2(1+n_2)} \tag{4}$$

соответственно, а для $v(s)$ можно еще получить представление

$$v(s) = f_0(s)\left[1 + \sin\frac{\pi\varphi(s)}{kH}\right]^{1/2-\alpha_1}\left[1 - \sin\frac{\pi\varphi(s)}{kH}\right]^{1/2-\alpha_2}$$

Здесь $f_0(s) \neq 0$, а потенциал $\varphi(s)$ находится интегрированием:

$$\varphi(s) = \int_0^s v(s)\,ds - \frac{kH}{2} \qquad \left(\begin{matrix} H \text{ — напор, } k \text{ — коэффи-} \\ \text{циент фильтрации} \end{matrix}\right)$$

Функция, отображающая область плоскости комплексного потенциала w, отвечающую искомому потоку, на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, имеет вид:

$$w = \frac{kH}{\pi}\arcsin t \tag{5}$$

Тогда

$$p(t) = \ln\left|\frac{dw}{d\tau}\,\frac{dz}{dw}\right| = -\ln f_0 - (1-\alpha_1)\ln(1+t) - (1-\alpha_2)\ln(1-t)$$

Условие однолистности решения обратной задачи теории фильтрации получим, положив в условиях теоремы 3

$$p = 1 - \alpha_1, \qquad q = 1 - \alpha_2, \qquad p_1(t) = -\ln f_0[s(t)]$$

Это условие можно записать и в несколько ином виде, если учесть, что $t = \sin[\pi\varphi(s)/kH]$.

Любопытно отметить физический смысл полученного критерия однолистности. Введем в рассмотрение вспомогательный поток под плоским флютбетом $-1 < t < 1$ с тем же напором, что и в рассматриваемой задаче, тогда $p(t)$ может рассматриваться как логарифм отношения скорости на вспомогательном плоском флютбете и на искомом при условии, что соответствующими считаются точки с одинаковым потенциалом.

Тогда условие однолистности в теореме 3 может быть истолковано как требование, чтобы задаваемая скорость и скорость на плоском флютбете были в известном смысле сравнимы между собой.

Обратимся теперь к задаче об улучшении свойств уже известного контура.

Предварительно введем несколько определений. Пусть B — область, ограниченная кусочно-гладкой кривой, δ_{z_1,z_2} — нижняя грань колебания аргумента dz на всевозможных гладких кривых, принадлежащих B и соединяющих z_1 и z_2, а $\delta_B = \sup \delta_{z_1,z_2}$, где верхняя грань взята по всевозможным парам точек, принадлежащих B.

Теорема 4. Если функция $f(z)$, регулярная в области B, для которой $\delta_B < \pi$, имеет в замкнутой области $\overline{B}$ производную, колебание аргумента которой $\Delta \arg f'(t)$ удовлетворяет на контуре области неравенству

$$\Delta_L \arg f'(t) \leqslant \rho < \pi - \delta$$

то $f(z)$ однолистна в B.

Доказательство. Подобрав соответствующим образом линию интегрирования, можно доказать, что для любой пары точек z_1 и z_2

$$\operatorname{Im} \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\, dz = \operatorname{Im}\left[f(z_1) - f(z_2)\right] \neq 0 \tag{6}$$

что и требовалось.

Пусть L_0 — данный контур в плоскости Z, свойства которого улучшаются, а L — улучшенный контур в плоскости z. Область, занятую потоком в плоскости Z, обозначим B_0, а в плоскости z обозначим B и предположим, что $\delta_{B_0} < \pi$.

В силу теоремы 4 для однолистности искомой области B достаточно, чтобы колебание аргумента функции dz / dZ не превышало $\pi - \delta$ в $\overline{B}_0$.

На L_0 имеем

$$|dz / dZ| = v / v_0$$

где v — скорость на искомом контуре, а v_0 — на данном.

Будем считать dz / dZ функцией переменной t, меняющейся в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$; тогда, используя формулу Келдыша — Седова:

$$\frac{dz}{dZ} = \exp \chi(t) \qquad \left(\chi(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i} \int_{-1}^{1} \ln \frac{v}{v_0} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)}\right)$$

Будем считать, что изменение скорости происходит лишь во внутренних точках L_0, причем v и v_0 отличны от нуля для $0 < s < l$; тогда функция $\ln(v / v_0)$ будет непрерывной, если были непрерывными v и v_0.

Пусть теперь для функции $p(t) = \ln(v / v_0)$ выполнено условие

$$|p(t_1) - p(t_2)| < \frac{1}{2}(\pi - \delta)\, |t_1 - t_2|$$

тогда для колебания функции $\arg dz / dt = Q(t)$ получается на контуре оценка

$$\Delta_z Q(t) < \pi - \delta$$

По принципу максимума такая же оценка будет иметь место и внутри области, что и обеспечит однолистность искомой области.

Поступила 18 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные задачи. Уч. зап. КГУ, т. 115, кн. 6, 1955.
2. Peebles G. A method for calculating airfoil sections from specifications on the pressure distributions. Jorn. of the aeron. scien., vol. 14, No 8, 1947.
3. Красновидова И. С., Рогожин В. С. Достаточное условие однолистности решения обратной краевой задачи. УМН, т. VIII, вып. 1 (53), 151—153, 1953.