Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение тохнических наук Академии наук Союза ССР

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

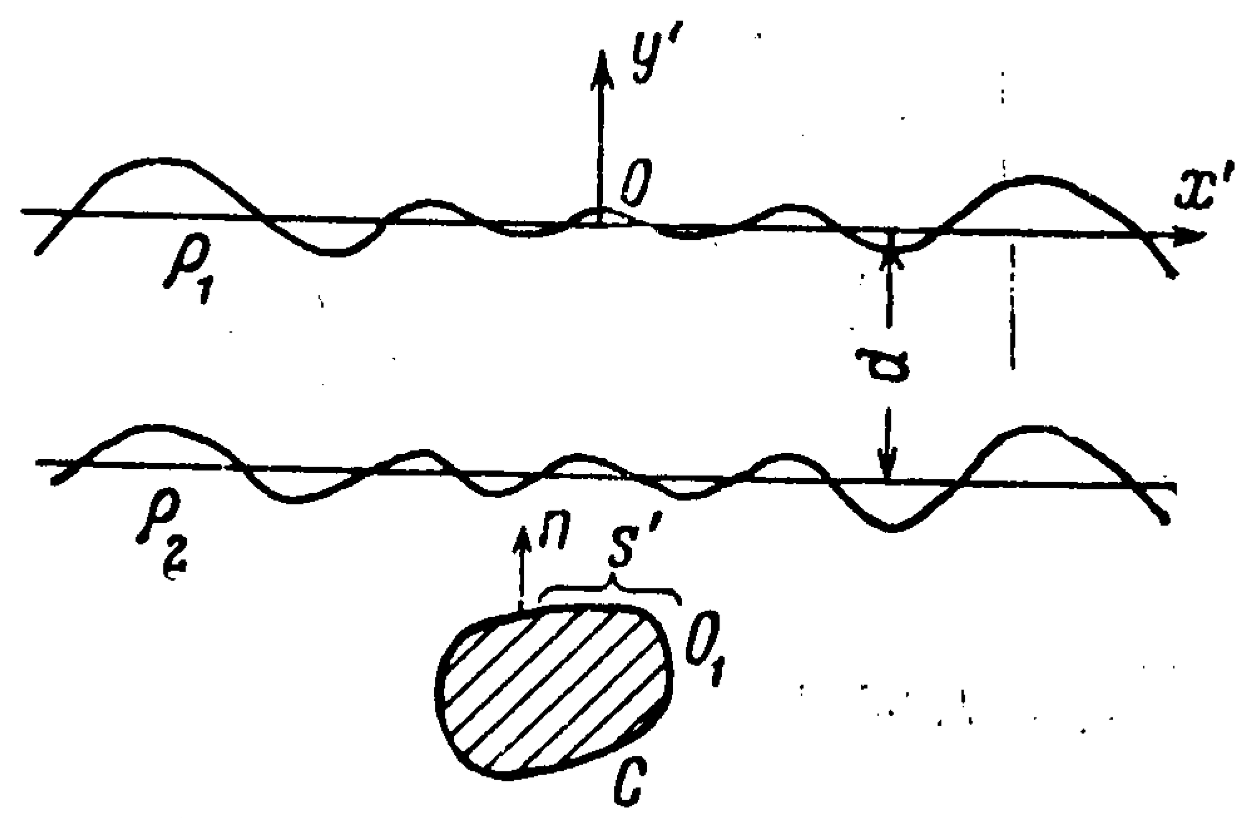
В. С. Войценя

(Ростов-на-Дону)

Н. Е. Кочиным [1] решена задача об установившихся колебаниях тела произвольной формы под свободной поверхностью тяжелой жидкости бесконечной глубины. Эту же задачу, но для случая конечной глубины, исследовал методом Кочина М. Д. Хаскинд [2].

В настоящей работе методом Кочина изучается плоская задача о волновых движениях, вызываемых колебаниями тела под поверхностью раздела двух жидкостей, причем слой более легкой верхней жидкости конечной толщины обладает свободной поверхностью, а нижняя жидкость имеет бесконечную глубину.

§ 1. Постановка задачи. Пусть тело совершает периодические колебания под границей раздела (фиг. 1). Делая обычные предположения линейной теории волн, рассмотрим бесконечно малые колебания тела. Предполагаем, что в обе стороны от тела расходятся волны, причем скорости жидкостей всюду ограничены и стремятся к нулю при $y' \to -\infty$. Граничные условия на свободной границе, на границе раздела и на контуре тела C переносим соответственно на прямые $y' = 0$, $y' = -d$ и на контур C, предполагаемый неподвижным.



Фиг. 1

Считая движение потенциальным, введем в рассмотрение потенциалы скорости $\Phi_j'(x', y', t')$, функции тока $\Psi_j'(x', y', t')$ и комплексные отенциалы

$$W_j'(z', t') = \Phi_j'(x', y', t') + i\Psi_j'(x', y', t') \tag{1.1}$$

где $z' = x' + iy'$, а индекс j равен 1 и 2 для верхней и нижней жидкостей соответственно.

Обычным путем получим условие на свободной границе

$$\left[\frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial t'^2} + g\,\frac{\partial\Phi_1'}{\partial y'}\right]_{y'=0} = 0 \tag{1.2}$$

и два условия на границе раздела

$$\left[\frac{\partial\Phi_1'}{\partial y'} - \frac{\partial\Phi_2'}{\partial y'}\right]_{y'=-d} = 0 \tag{1.3}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial t'^2} + g\,\frac{\partial\Phi_1'}{\partial y'}\right) - \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\partial^2\Phi_2'}{\partial t'^2} + g\,\frac{\partial\Phi_2'}{\partial y'}\right)\right]_{y'=-d} = 0 \tag{1.4}$$

Уравнения свободной границы и границы раздела имеют вид:

$$\delta_1'(x') = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial \Phi_1'}{\partial t'}\right]_{y'=0}, \qquad \delta_2'(x') = \frac{1}{g(\rho_2-\rho_1)}\left[\rho_1\frac{\partial \Phi_1'}{\partial t'} - \rho_2\frac{\partial \Phi_2'}{\partial t'}\right]_{y'=-d} \tag{1.5}$$

где $\delta_1'(x')$ отсчитывается от оси x', а $\delta_2'(x')$ — от прямой $y' = -d$.

В силу линейности граничных условий можем рассматривать лишь чисто гармонические колебания тела с частотой k, определяемые по формуле

$$v_n' = v_{n1}'(s')\cos kt' + v_{n2}'(s')\sin kt' = v_n'(s', t')$$

где v_n' — нормальная составляющая скорости одной из точек контура C, причем этой точке отвечает дуга s', отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на C.

Тогда для функции $\Phi_2'(x', y', t')$ имеем условие обтекания на C

$$\frac{\partial \Phi_2'}{\partial n} = v_n'(s', t') \tag{1.6}$$

Считая колебания жидкостей установившимися, положим

$$\Phi_j'(x', y', t') = \varphi_{j1}'(x', y')\cos kt' + \varphi_{j2}'(x', y')\sin kt' \tag{1.7}$$

где $\varphi_{jm}'(x', y') = \operatorname{Re} w_{jm}'(z')$, если m равно 1 и 2. Тогда будем иметь

$$W_j'(z', t') = w_{j1}'(z')\cos kt' + w_{j2}'(z')\sin kt' \tag{1.8}$$

Граничные условия (1.2), (1.3), (1.4), (1.6) перепишутся так:

$$\begin{gathered}\left[g\frac{\partial \varphi_{1m}'}{\partial y'} - k^2\varphi_{1m}'\right]_{y'=0} = 0, \qquad \left[\frac{\partial \varphi_{1m}'}{\partial y'} - \frac{\partial \varphi_{2m}'}{\partial y'}\right]_{y'=-d} = 0 \\ \left[\left(g\frac{\partial \varphi_{1m}'}{\partial y'} - k^2\varphi_{1m}'\right) - \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(g\frac{\partial \varphi_{2m}'}{\partial y'} - k^2\varphi_{2m}'\right)\right]_{y'=-d} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{2m}'}{\partial n} = v_{nm}'(s')\end{gathered} \tag{1.9}$$

Перейдем к безразмерным величинам, обозначая

$$\begin{gathered} z' = zd, \qquad W_j' = W_j k d^2, \qquad w_{jm}' = w_{jm} k d^2, \\ t' = \frac{t}{k}, \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho_2^\circ, \qquad \frac{k^2 d}{g} = \nu \end{gathered} \tag{1.10}$$

Обозначив через E_1 область, занимаемую верхней жидкостью, а через E_2 — область, занимаемую нижней жидкостью, можем задачу сформулировать следующим образом.

Найти функции $w_{1m}^\circ(z)$ и $w_{2m}^\circ(z)$, аналитические в областях E_1 и E_2 соответственно и удовлетворяющие условиям

$$1^\circ.\quad \frac{\partial \varphi_{1m}^\circ}{\partial y} - \nu\varphi_{1m}^\circ = 0 \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.11}$$

$$2^\circ.\quad \frac{\partial \varphi_{1m}^\circ}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{2m}^\circ}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = -1 \tag{1.12}$$

$$3^\circ.\quad \left(\frac{\partial \varphi_{1m}^\circ}{\partial y} - \nu\varphi_{1m}^\circ\right) - \rho_2^\circ\left(\frac{\partial \varphi_{2m}^\circ}{\partial y} - \nu\varphi_{2m}^\circ\right) = 0 \qquad \text{при } y = -1 \tag{1.13}$$

4°. На свободной границе и на границе раздела волны расходятся в обе стороны от контура тела C.

5°. В областях E_1 и E_2 вне контура C скорости ограничены и стремятся к нулю при $y \to -\infty$.

6°. $$\frac{\partial \varphi_{2m}{}^\circ}{\partial n} = v_{nm}(s) \quad \text{на} \quad C \tag{1.14}$$

Применяя соотношения (1.7), (1.11), (1.12) и (1.13), уравнения свободной границы и границы раздела запишем окончательно в виде

$$\delta_1(x) = -\operatorname{Im}\left[\frac{dw_{11}{}^\circ}{dz}\sin t - \frac{dw_{12}{}^\circ}{dz}\cos t\right]_{y=0} \tag{1.15}$$

$$\delta_2(x) = \operatorname{Im}\left[\frac{dw_{j1}{}^\circ}{dz}\sin t - \frac{dw_{j2}{}^\circ}{dz}\cos t\right]_{y=-1} \tag{1.16}$$

где j равно 1 или 2.

§ 2. Случай пульсирующего вихря и источника. 1. Пусть в некоторой точке $\zeta = \xi + i\eta$ области $-1 > \operatorname{Im} z > -\infty$ находится пульсирующий вихрь интенсивности $(\Gamma_1 \cos t + \Gamma_2 \sin t)$. Тогда из функций $w_{jm}{}^\circ(z)$ можно выделить особенности в точке ζ

$$w_{jm}{}^\circ(z) = w_{jm}(z) + F_m(z) \tag{2.1}$$

где $w_{1m}(z)$ и $w_{2m}(z)$ — функции, аналитические в областях $0 > \operatorname{Im} z > -1$ и $-1 > \operatorname{Im} z > -\infty$ соответственно, причем $w_{jm} = \varphi_{jm} + i\psi_{jm}$, а

$$F_m(z) = \frac{\Gamma_m}{2\pi i}\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta} \tag{2.2}$$

Дифференцируя по x равенства (1.11) и (1.13), перепишем первые три граничные условия из § 1 в виде

$$\left[\frac{\partial^2\varphi_{1m}}{\partial x\partial y} - \nu\frac{\partial\varphi_{1m}}{\partial x}\right]_{y=0} = f_{1m}(x) \tag{2.3}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_{1m}}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_{2m}}{\partial y}\right]_{y=-1} = 0 \tag{2.4}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_{1m}}{\partial x\partial y} - \nu\frac{\partial\varphi_{1m}}{\partial x}\right) - \rho_2{}^\circ\left(\frac{\partial^2\varphi_{2m}}{\partial x\partial y} - \nu\frac{\partial\varphi_{2m}}{\partial x}\right)\right]_{y=-1} = (1-\rho_2{}^\circ) f_{2m}(x) \tag{2.5}$$

где

$$f_{1m}(x) = \operatorname{Im}\left[\frac{d^2F_m}{dz^2} + i\nu\frac{dF_m}{dz}\right]_{y=0}, \qquad f_{2m}(x) = \operatorname{Im}\left[\frac{d^2F_m}{dz^2} + i\nu\frac{dF_m}{dz}\right]_{y=-1} \tag{2.6}$$

Подставив выражения для $F_m(z)$ в формулы (2.6) и пользуясь известными равенствами

$$\frac{|y|}{x^2+y^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda|y|}\cos\lambda x d\lambda, \qquad \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\int_0^\infty e^{-\lambda|y|}\lambda\cos\lambda x d\lambda$$

получаем

$$\begin{aligned} f_{1m}(x) &= -\frac{\Gamma_m}{\pi}\nu\int_0^\infty e^{\lambda\eta}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda \\ f_{2m}(x) &= \frac{\Gamma_m}{\pi}\int_0^\infty e^{\lambda\eta}(\lambda\operatorname{sh}\lambda + \nu\operatorname{ch}\lambda)\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отыскиваем решение в виде интегралов Фурье

$$w_{1m}(z)=\Gamma_m\int_0^\infty\{[A(\lambda)+iB(\lambda)]e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}+[C(\lambda)+iD(\lambda)]e^{i\lambda(z-\zeta)}\}\frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (2.8)$$

$$w_{2m}(z)=\Gamma_m\int_0^\infty[E(\lambda)+iG(\lambda)]e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

используя при этом условие 5° об ограниченности функций dw_{jm}°/dz.

Подставляя в условия (2.3), (2.4), (2.5) функции $w_{jm}(z)$ из (2.8) и используя соотношения (2.7), получим уравнения для определения коэффициентов, из которых найдем

$$A(\lambda)=0, \qquad B(\lambda)=\frac{1}{\pi\nu}\left\{\frac{L(\lambda)[2\nu-\varkappa(\lambda-\nu)]}{(\lambda-\nu)T(\lambda)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varkappa}{4}[(\lambda+\nu)e^{2\lambda}-(\lambda-\nu)]\right\}=B$$

$$C(\lambda)=0, \qquad D(\lambda)=\frac{\varkappa}{\pi\nu}\left\{\frac{L(\lambda)}{T(\lambda)}e^{-2\lambda}+\frac{1}{4}[(\lambda+\nu)-(\lambda-\nu)e^{-2\lambda}]\right\}=D$$

$$(2.9)$$

$$E(\lambda)=0, \qquad G(\lambda)=\frac{2L(\lambda)}{\pi(\lambda-\nu)T(\lambda)}=G$$

где

$$L(\lambda)=-\nu^2+\varkappa(\lambda^2\operatorname{sh}^2\lambda-\nu^2\operatorname{ch}^2\lambda)$$

$$T(\lambda)=2\nu+\varkappa[(\lambda+\nu)e^{-2\lambda}-(\lambda-\nu)] \qquad (\varkappa=\rho_2^\circ-1) \qquad (2.10)$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого $\nu>0$ уравнение $T(\lambda)=0$ имеет положительный корень $\lambda=\lambda_0$ и притом один. Поскольку подынтегральные выражения для функций dw_{jm}/dz имеют на вещественной положительной полуоси λ два простых полюса $\lambda=\nu$ и $\lambda=\lambda_0$, то под интегралами будем в дальнейшем понимать их главные значения в смысле Коши.

2. Чтобы найти общее решение, добавим к полученным функциям $w_{jm}(z)$ потенциалы свободных волн

$$w_{1m}^{\infty}(z)=A_m^\circ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})}+B_m^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}+C_m^\circ e^{i\lambda_0(z-\zeta)}$$

$$(2.11)$$

$$w_{2m}^{\infty}(z)=E_m^\circ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})}+G_m^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}$$

где A_m°, $B_m^\circ, \ldots, G_m^\circ$ — некоторые константы. Таким образом

$$w_{1m}^\circ(z)=\frac{\Gamma_m}{2\pi i}\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}+i\Gamma_m\int_0^\infty[Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}+$$

$$+De^{i\lambda(z-\zeta)}]\frac{d\lambda}{\lambda}+A_m^\circ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})}+B_m^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}+C_m^\circ e^{i\lambda_0(z-\zeta)} \qquad (2.12)$$

$$w_{2m}^\circ(z)=\frac{\Gamma_m}{2\pi i}\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}+i\Gamma_m\int_0^\infty Ge^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\frac{d\lambda}{\lambda}+E_m^\circ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})}+G_m^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}$$

Неизвестные постоянные найдем из условия 4°, по которому волны расходятся в обе стороны от вихря.

Для нахождения асимптотических значений функций dw_{2m}/dz при $x<0$ запишем их в виде

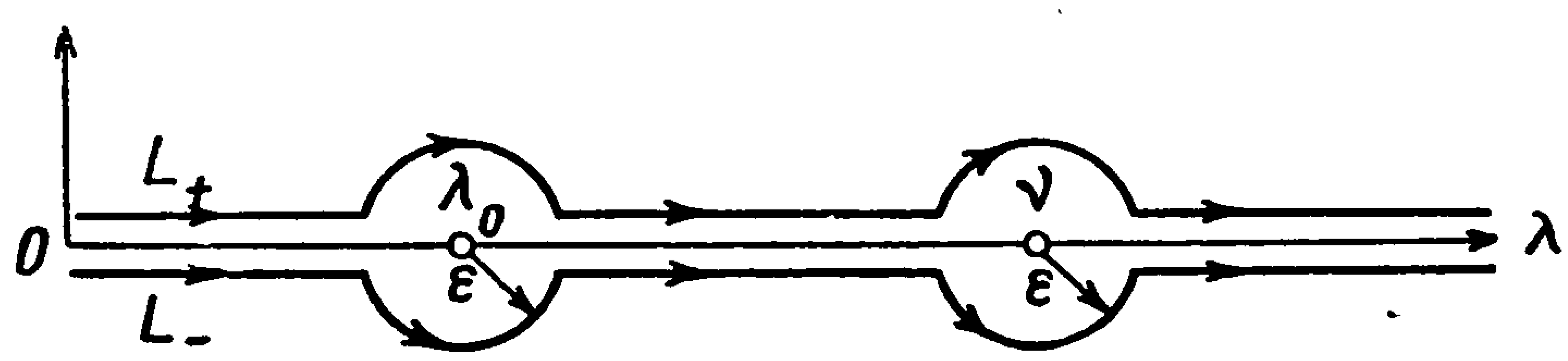
$$\frac{dw_{2m}}{dz} = \Gamma_m \int\limits_{L_+} G e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\, d\lambda + 2i\Gamma_m \frac{L(\nu)}{T(\nu)} e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} +$$

$$+ 2i\Gamma_m \frac{L(\lambda_0)}{(\lambda_0-\nu)\,T'(\lambda_0)} e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}, \qquad x<0$$

где L_+ — контур в плоскости комплексного переменного λ (фиг. 2), а

$$T'(\lambda_0) = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}$$

Интегрированием по частям можно показать, что интеграл по контуру,



Фиг. 2

L_+ стремится к нулю при $x\to-\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{dw_{2m}}{dz} - [i\Gamma_m E_0 e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} + i\Gamma_m G_0 e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}]\right\} = 0 \tag{2.13}$$

где

$$E_0 = \frac{2L(\nu)}{T(\nu)}, \qquad G_0 = \frac{2L(\lambda_0)}{(\lambda_0-\nu)\,T'(\lambda_0)} \tag{2.14}$$

Используя интеграл по L_-, получим аналогично

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{dw_{2m}}{dz} + [i\Gamma_m E_0 e^{-i\nu(z-\zeta)} + i\Gamma_m G_0 e^{-i\lambda_0(\widetilde{z-\zeta})}]\right\} = 0 \tag{2.15}$$

Поскольку волны расходятся в обе стороны от вихря, то асимптотические выражения для полной комплексной скорости можно записать в виде

$$\begin{gathered}\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{dW_2}{dz} - [E_-^\circ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})-it} + G_-^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})-it}]\right\} = 0\\ \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{dW_2}{dz} - [E_+^\circ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})+it} + G_+^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})+it}]\right\} = 0\end{gathered} \tag{2.16}$$

Учитывая формулу (1.8), будем иметь

$$\frac{dW_j}{dz} = \frac{dw_{j1}^\circ}{dz}\cos t + \frac{dw_{j2}^\circ}{dz}\sin t \tag{2.17}$$

Подставляя выражения (2.13) и (2.15) в формулу (2.17) и сравнивая затем с (2.16), получим окончательно

$$\begin{aligned} E_1^\circ &= -i\Gamma_2 \frac{E_0}{\nu}, & E_2^\circ &= i\Gamma_1 \frac{E_0}{\nu}\\ E_-^\circ &= (i\Gamma_1-\Gamma_2)E_0, & E_+^\circ &= -(i\Gamma_1+\Gamma_2)E_0\\ G_1^\circ &= -i\Gamma_2\frac{G_0}{\lambda_0}, & G_2^\circ &= i\Gamma_1\frac{G_0}{\lambda_0}\\ G_-^\circ &= (i\Gamma_1-\Gamma_2)G_0, & G_+^\circ &= -(i\Gamma_1+\Gamma_2)G_0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Аналогично можно найти асимптотические выражения для $\frac{dW_1}{dz}$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{dW_1}{dz}-[A_-^\circ e^{-i\nu(z-\bar\zeta)-it}+B_-^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)-it}+C_-^\circ e^{i\lambda_0(z-\zeta)+it}]\right\}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{dW_1}{dz}-[A_+^\circ e^{-i\nu(z-\bar\zeta)+it}+B_+^\circ e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)+it}+C_+^\circ e^{i\lambda_0(z-\zeta)-it}]\right\}=0 \quad (2.19)$$

а также значения неизвестных постоянных (2.20)

$$A_1^\circ=-i\Gamma_2\frac{A_0}{\nu},\quad A_2^\circ=i\Gamma_1\frac{A_0}{\nu},\quad A_-^\circ=(i\Gamma_1-\Gamma_2)A_0,\quad A_+^\circ=-(i\Gamma_1+\Gamma_2)A_0$$

$$B_1^\circ=-i\Gamma_2\frac{B_0}{\lambda_0},\quad B_2^\circ=i\Gamma_1\frac{B_0}{\lambda_0},\quad B_-^\circ=(i\Gamma_1-\Gamma_2)B_0,\quad B_+^\circ=-(i\Gamma_1+\Gamma_2)B_0$$

$$C_1^\circ=-i\Gamma_2\frac{C_0}{\lambda_0},\quad C_2^\circ=i\Gamma_1\frac{C_0}{\lambda_0},\quad C_-^\circ=(i\Gamma_1+\Gamma_2)C_0,\quad C_+^\circ=-(i\Gamma_1-\Gamma_2)C_0$$

где

$$A_0=\frac{2L(\nu)}{T(\nu)}=E_0,\qquad B_0=\frac{L(\lambda_0)[2\nu-\varkappa(\lambda_0-\nu)]}{\nu(\lambda_0-\nu)T'(\lambda_0)},\qquad C_0=\frac{\varkappa L(\lambda_0)}{\nu T'(\lambda_0)}e^{-2\lambda_0} \quad (2.21)$$

3. Для источника интенсивности $(Q_1\cos t+Q_2\sin t)$, находящегося в точке $\zeta=\xi+i\eta$, можно тем же методом получить комплексные потенциалы

$$w_{1m}^\circ(z)=\frac{Q_m}{2\pi}\ln(z-\zeta)(z-\bar\zeta)+Q_m\int_0^\infty[Be^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}-De^{i\lambda(z-\zeta)}]\frac{d\lambda}{\lambda}+$$

$$+A_m^{\circ\circ}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)}+B_m^{\circ\circ}e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)}+C_m^{\circ\circ}e^{i\lambda_0(z-\zeta)},\quad w_{2m}^\circ(z)=\frac{Q_m}{2\pi}\ln(z-\zeta)(z-\bar\zeta)+$$

$$+Q_m\int_0^\infty Ge^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}\frac{d\lambda}{\lambda}+E_m^{\circ\circ}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)}+G_m^{\circ\circ}e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)} \quad (2.22)$$

и асимптотические выражения полных комплексных скоростей

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{dW_1}{dz}-\left[A_-^{\circ\circ}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)-it}+B_-^{\circ\circ}e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)-it}+C_-^{\circ\circ}e^{i\lambda_0(z-\zeta)+it}\right]\right\}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{dW_1}{dz}-[A_+^{\circ\circ}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)+it}+B_+^{\circ}e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)+it}+C_+^{\circ}e^{i\lambda_0(z-\zeta)-it}]\right\}=0 \quad (2.23)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{dW_2}{dz}-[E_-^{\circ\circ}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)-it}+G_-^{\circ\circ}e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)-it}]\right\}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{dW_2}{dz}-[E_+^{\circ\circ}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)+it}+G_+^{\circ\circ}e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)+it}]\right\}=0 \quad (2.24)$$

где

$$A_1^{\circ\circ}=-Q_2\frac{A_0}{\nu},\qquad A_2^{\circ\circ}=Q_1\frac{A_0}{\nu},\qquad A_-^{\circ\circ}=(Q_1+iQ_2)A_0$$

$$B_1^{\circ\circ}=-Q_2\frac{B_0}{\lambda_0},\qquad B_2^{\circ\circ}=Q_1\frac{B_0}{\lambda_0},\qquad B_-^{\circ\circ}=(Q_1+iQ_2)B_0$$

$$C_1^{\circ\circ}=Q_2\frac{C_0}{\lambda_0},\qquad C_2^{\circ\circ}=-Q_1\frac{C_0}{\lambda_0},\qquad C_-^{\circ\circ}=-(Q_1-iQ_2)C_0$$

$$E_1^{\circ\circ}=-Q_2\frac{E_0}{\nu},\qquad E_2^{\circ\circ}=Q_1\frac{E_0}{\nu},\qquad E_-^{\circ\circ}=(Q_1+iQ_2)E_0$$

$$G_1^{\circ\circ}=-Q_2\frac{G_0}{\lambda_0},\qquad G_2^{\circ\circ}=Q_1\frac{G_0}{\lambda_0},\qquad G_-^{\circ\circ}=(Q_1+iQ_2)G_0 \quad (2.25)$$

$$A_+^{\circ\circ}=-(Q_1-iQ_2)A_0,\qquad E_+^{\circ\circ}=-(Q_1-iQ_2)E_0$$

$$B_+^{\circ\circ}=-(Q_1-iQ_2)B_0,\qquad G_+^{\circ\circ}=-(Q_1-iQ_2)G_0$$

$$C_+^{\circ\circ}=(Q_1+iQ_2)C_0$$

§ 3. О волнах, вызываемых колебаниями тела. 1. Выведем основные формулы для сформулированной в § 1 задачи, предполагая, что нам уже известно решение этой задачи, а самим решением займемся в § 4.

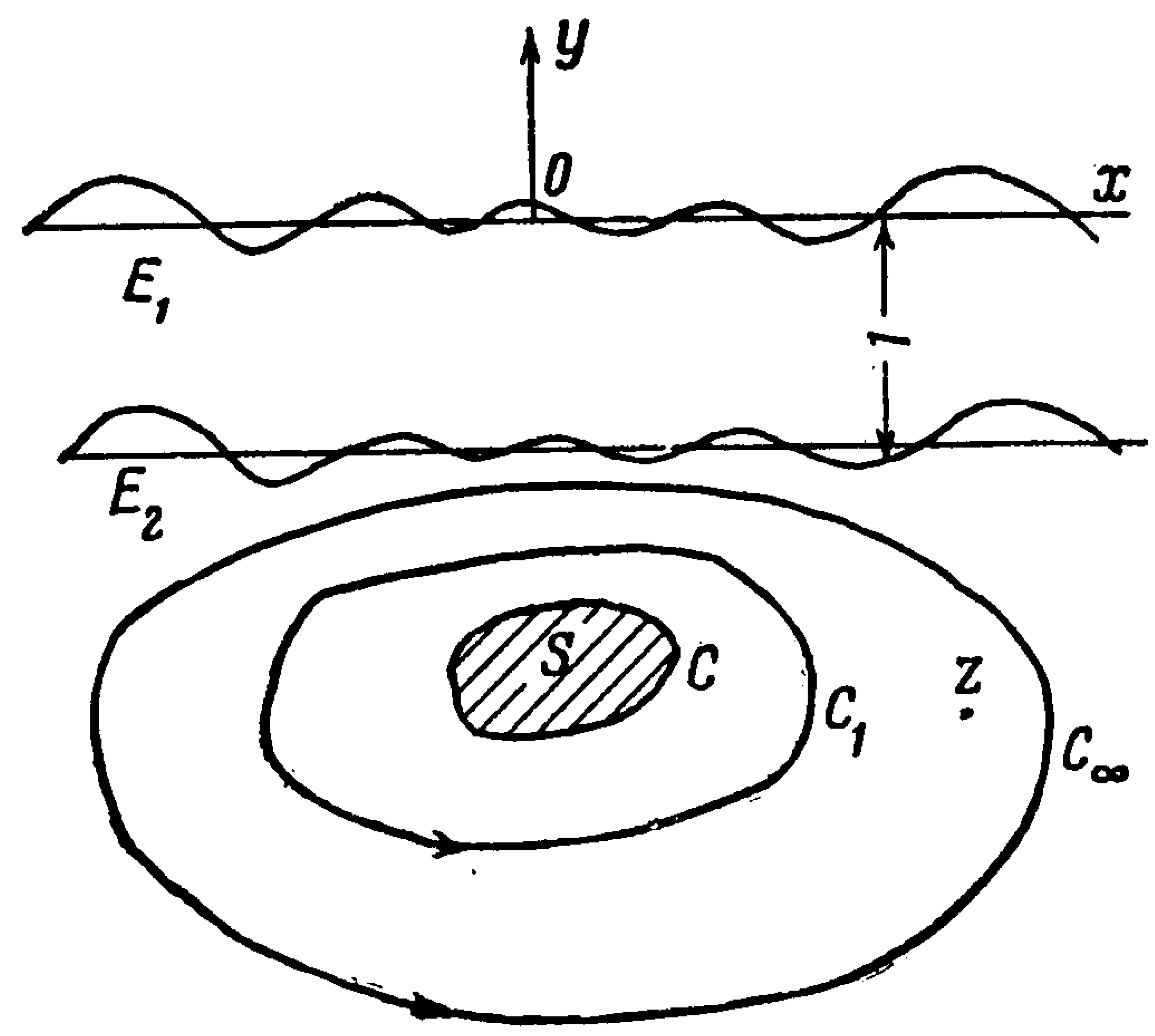
В области E_2 возьмем точку z и проведем два контура C_1 и C_∞ так, чтобы они целиком лежали в области E_2, причем C_1 охватывает контур тела C, но не содержит внутри себя точку z, а C_∞ охватывает и контур C_1 и точку z (фиг. 3). Для однозначных в области E_2 функций $dw_{2m}^\circ/dz = \bar{v}_{2m}(z)$ имеют место формулы Коши

$$\bar{v}_{2m}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{\bar{v}_{2m}(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty}\frac{\bar{v}_{2m}(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta \tag{3.1}$$

причем оба контура C_1 и C_∞ обходятся в положительном направлении, а черта над буквой означает, что берется комплексно сопряженное значение. Обозначим

$$V_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty}\frac{\bar{v}_{2m}(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta \tag{3.2}$$

$$U_m(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty}\frac{\bar{v}_{2m}(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta$$



Фиг. 3

Очевидно, что $V_m(z)$ — функции, аналитические во всей плоскости комплексного переменного z вне контура C_1, который можно провести сколь угодно близко к контуру тела C, и имеют порядок z^{-1} на бесконечности. Функции $U_m(z)$ — аналитические внутри контура C_∞, который можно взять сколь угодно близко к прямой $y = -1$.

Таким образом, можно считать, что движение жидкостей вызвано распределенными по контуру C_1 вихреисточниками с плотностями $\bar{v}_{2m}(\zeta)$.

Воспользуемся этим для нахождения функций $\bar{v}_{1m}(z) = dw_{1m}^\circ/dz$, а также для того, чтобы функции $U_m(z)$ представить в ином виде.

Пользуясь формулами (2.12) и (2.22), получим комплексные скорости для вихреисточника интенсивности $N_m = \Gamma_m + iQ_m$:

$$U_{1m}(z) = \frac{N_m}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} - \frac{\bar{N}_m}{2\pi i}\frac{1}{z-\bar{\zeta}} + \bar{N}_m\int\limits_0^\infty Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}d\lambda - N_m\int\limits_0^\infty De^{i\lambda(z-\zeta)}d\lambda -$$
$$- i[\nu A_m^* e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} + \lambda_0 B_m^* e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}] + i\lambda_0 C_m^* e^{i\lambda_0(z-\zeta)} \tag{3.3}$$

$$U_{2m}(z) = \frac{N_m}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} - \frac{\bar{N}_m}{2\pi i}\frac{1}{z-\bar{\zeta}} + \bar{N}_m\int\limits_0^\infty Ge^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}d\lambda - i[\nu E_m^* e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} +$$
$$+ \lambda_0 G_m^* e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}] \tag{3.4}$$

где

$$A_1^* = -i\bar{N}_2\frac{A_0}{\nu},\quad A_2^* = i\bar{N}_1\frac{A_0}{\nu},\quad B_1^* = -i\bar{N}_2\frac{B_0}{\lambda_0},\quad B_2^* = i\bar{N}_1\frac{B_0}{\lambda_0}$$
$$C_1^* = -iN_2\frac{C_0}{\lambda_0},\quad C_2^* = iN_1\frac{C_0}{\lambda_0},\quad E_1^* = -i\bar{N}_2\frac{E_0}{\nu}$$
$$E_2^* = i\bar{N}_1\frac{E_0}{\nu},\quad G_1^* = -i\bar{N}_2\frac{G_0}{\lambda_0},\quad G_2^* = i\bar{N}_1\frac{G_0}{\lambda_0} \tag{3.5}$$

Учитывая равенство

$$\frac{1}{z-\bar{\zeta}} = i\int_0^\infty e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda$$

справедливое при $y+\eta>0$, полагая в формулах (3.3) и (3.4) $N_m = \bar{v}_{2m}(\zeta)\,d\zeta$ и интегрируя по контуру C_1, получаем комплексные скорости в областях E_1 и E_2:

$$\bar{v}_{11}(z) = V_1(z) + \int_{C_1} v_{21}(\zeta)\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda + \int_0^\infty Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda\right]d\bar{\zeta} -$$

$$-\int_{C_1}\bar{v}_{21}(\zeta)\left[\int_0^\infty De^{i\lambda(z-\zeta)}\,d\lambda\right]d\zeta - \int_{C_1} v_{22}(\zeta)\,[A_0e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} + B_0e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}]\,d\bar{\zeta} +$$

$$+ C_0\int_{C_1}\bar{v}_{22}(\zeta)\,e^{i\lambda_0(z-\zeta)}\,d\zeta \tag{3.6}$$

$$\bar{v}_{12}(z) = V_2(z) + \int_{C_1} v_{22}(\zeta)\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda + \int_0^\infty Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda\right]d\bar{\zeta} -$$

$$-\int_{C_1}\bar{v}_{22}(\zeta)\left[\int_0^\infty De^{i\lambda(z-\zeta)}\,d\lambda\right]d\zeta + \int_{C_1} v_{21}(\zeta)\,[A_0e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} + B_0e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}]\,d\bar{\zeta} -$$

$$- C_0\int_{C_1}\bar{v}_{21}(\zeta)\,e^{i\lambda_0(z-\zeta)}\,d\zeta$$

$$\bar{v}_{21}(z) = V_1(z) + \int_{C_1} v_{21}(\zeta)\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda + \int_0^\infty Ge^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda\right]d\bar{\zeta} -$$

$$-\int_{C_1} v_{22}(\zeta)\,[E_0e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} + G_0e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}]\,d\bar{\zeta}$$

$$\bar{v}_{22}(z) = V_2(z) + \int_{C_1} v_{22}(\zeta)\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda +\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty Ge^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\,d\lambda\right]d\bar{\zeta} + \int_{C_1} v_{21}(\zeta)\,[E_0e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} + G_0e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}]\,d\bar{\zeta} \tag{3.7}$$

Введем комплексно сопряженные при вещественном λ функции

$$H_m(\lambda) = \int_{C_1}\bar{v}_{2m}(\zeta)\,e^{-i\lambda\zeta}\,d\zeta, \quad \overline{H_m}(\lambda) = \int_{C_1} v_{2m}(\zeta)\,e^{i\lambda\bar{\zeta}}\,d\bar{\zeta} \tag{3.8}$$

Меняя в (3.6) и (3.7) порядок интегрирования, получим

$$\bar{v}_{11}(z) = V_1(z) + \int_0^\infty\left[\overline{H_1}(\lambda)\,e^{-i\lambda z}\left(-\frac{1}{2\pi}+B\right) - H_1(\lambda)\,e^{i\lambda z}D\right]d\lambda - A_0\overline{H_2}(\nu)\,e^{-i\nu z} -$$

$$- B_0\overline{H_2}(\lambda_0)\,e^{-i\lambda_0 z} + C_0H_2(\lambda_0)\,e^{i\lambda_0 z} \tag{3.9}$$

$$\bar{v}_{12}(z) = V_2(z) + \int_0^\infty\left[\overline{H_2}(\lambda)\,e^{-i\lambda z}\left(-\frac{1}{2\pi}+B\right) - H_2(\lambda)\,e^{i\lambda z}D\right]d\lambda +$$

$$A_0\overline{H_1}(\nu) + e^{-i\nu z} + B_0\overline{H_1}(\lambda_0)\,e^{-i\lambda_0 z} - C_0H_1(\lambda_0)\,e^{i\lambda_0 z}$$

$$\bar{v}_{21}(z) = V_1 + \int_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\, e^{-i\lambda z}\left(G - \frac{1}{2\pi}\right) d\lambda - E_0\overline{H}_2(\nu)\, e^{-i\nu z} - G_0\overline{H}_2(\lambda_0)\, e^{-i\lambda_0 z}$$

$$\bar{v}_{22}(z) = V_2 + \int_0^\infty \overline{H}_2(\lambda)\, e^{-i\lambda z}\left(G - \frac{1}{2\pi}\right) d\lambda + E_0\overline{H}_1(\nu)\, e^{-i\nu z} + G_0\overline{H}_1(\lambda_0)\, e^{-i\lambda_0 z}$$

причем (3.10)

$$V_1 = V_1(z) = \int_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\, e^{-i\lambda z}\left(-\frac{1}{2\pi} + G\right) d\lambda - E_0\overline{H}_2(\nu)\, e^{-i\nu z} - G_0\overline{H}_2(\lambda_0)\, e^{-i\lambda_0 z}$$

$$V_2 = V_2(z) = \int_0^\infty \overline{H}_2(\lambda)^{-i\lambda z}\left(-\frac{1}{2\pi} + G\right) d\lambda + E_0\overline{H}_1(\nu)^{-i\nu z} + G_0\overline{H}_1(\lambda_0)\, e^{-i\lambda_0 z} \quad (3.11)$$

2. Определим волны на свободной границе и границе раздела далеко от тела. На основании формул (2.16), (2.19), (2.23) и (2.24) можем записать асимптотические выражения полных комплексных скоростей для вихреисточника интенсивности $N_1 \cos t + N_2 \sin t$, (где $N_m = \Gamma_m + iQ_m$):

$$\lim_{x\to-\infty} \{u_1(z) - [A_- e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})-it} + B_- e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})-it} + C_- e^{i\lambda_0(z-\zeta)+it}]\} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \{u_1(z) - [A_+ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})+it} + B_+ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})+it} + C_+ e^{i\lambda_0(z-\zeta)-it}]\} = 0 \quad (3.12)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \{u_2(z) - [E_- e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})-it} + G_- e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})-it}]\} = 0 \quad (3.13)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \{u_2(z) - [E_+ e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})+it} + G_+ e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})+it}]\} = 0$$

Здесь

$$A_- = (i\overline{N}_1 - \overline{N}_2)\, A_0, \quad A_+ = -(i\overline{N}_1 + \overline{N}_2)\, A_0, \quad B_+ = -(i\overline{N}_1 + \overline{N}_2)\, B_0$$

$$B_- = (i\overline{N}_1 - \overline{N}_2)\, B_0$$

$$C_- = (iN_1 + N_2)\, C_0, \quad C_+ = -(iN_1 - N_2)\, C_0, \quad E_+ = -(i\overline{N}_1 + \overline{N}_2)\, E_0$$

$$E_- = (i\overline{N}_1 - \overline{N}_2)\, E_0$$

$$G_- = (i\overline{N}_1 - \overline{N}_2)\, G_0, \quad G_+ = -(i\overline{N}_1 + \overline{N}_2)\, G_0$$

Полагая $N_m = \bar{v}_{2m}(\zeta)\, d\zeta$, интегрируя выражения (3.12) и (3.13) по контуру C_1 и используя формулы (3.8), получим

$$\lim_{x\to-\infty} \left\{\frac{dW_1}{dz} - iA_0[\overline{H}_1(\nu) + i\overline{H}_2(\nu)]\, e^{-i(\nu z+t)} - iB_0[\overline{H}_1(\lambda_0) + i\overline{H}_2(\lambda_0)]\, e^{-i(\lambda_0 z+t)} - \right.$$
$$\left. - iC_0[H_1(\lambda_0) - iH_2(\lambda_0)]\, e^{i(\lambda_0 z+t)}\right\} = 0 \quad (3.14)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{dW_1}{dz} + iA_0[\overline{H}_1(\nu) - i\overline{H}_2(\nu)]\, e^{-i(\nu z-t)} + iB_0[\overline{H}_1(\lambda_0) - i\overline{H}_2(\lambda_0)]\, e^{-i(\lambda_0 z-t)} + \right.$$
$$\left. + iC_0[H_1(\lambda_0) + iH_2(\lambda_0)]\, e^{i(\lambda_0 z-t)}\right\} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left\{\frac{dW_2}{dz} - iE_0[\overline{H}_1(\nu) + i\overline{H}_2(\nu)]\, e^{-i(\nu z+t)} - \right.$$
$$\left. - iG_0[\overline{H}_1(\lambda_0) + i\overline{H}_2(\lambda_0)]\, e^{-i(\lambda_0 z+t)}\right\} = 0 \quad (3.15)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{dW_2}{dz} + iE_0[\overline{H}_1(\nu) - i\overline{H}_2(\nu)]\, e^{-i(\nu z-t)} + \right.$$
$$\left. + iG_0[\overline{H}_1(\lambda_0) - i\overline{H}_2(\lambda_0)]\, e^{-i(\lambda_0 z-t)}\right\} = 0$$

Принимая во внимание формулу (2.17), можно из (3.14) и (3.15) найти асимптотические выражения для функций $d\overset{\circ}{w}_{jm}/dz$, подстановка которых в формулы (1.15) и (1.16) дает возможность определить профили волн на свободной границе и границе раздела далеко от тела:

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &\approx \operatorname{Im}\{A_0[\overline{H}_1(\nu)+i\overline{H}_2(\nu)]\,e^{-i(\nu x+t)}+\\ &\quad+(B_0+C_0)[\overline{H}_1(\lambda_0)+i\overline{H}_2(\lambda_0)]\,e^{-i(\lambda_0 x+t)}\}, \quad x\to-\infty\\ \delta_1(x) &\approx \operatorname{Im}\{A_0[\overline{H}_1(\nu)-i\overline{H}_2(\nu)]\,e^{-i(\nu x-t)}+\\ &\quad+(B_0+C_0)[\overline{H}_1(\lambda_0)-i\overline{H}_2(\lambda_0)]\,e^{-i(\lambda_0 x-t)}\}, \quad x\to+\infty \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \delta_2(x) &\approx \operatorname{Im}\{E_0e^{-\nu}[\overline{H}_1(\nu)+i\overline{H}_2(\nu)]\,e^{-i(\nu x+t)}+\\ &\quad+G_0e^{-\lambda_0}[\overline{H}_1(\lambda_0)+i\overline{H}_2(\lambda_0)]\,e^{-i(\lambda_0 x+t)}\}, \quad x\to-\infty\\ \delta_2(x) &\approx \operatorname{Im}\{E_0e^{-\nu}[\overline{H}_1(\nu)-i\overline{H}_2(\nu)]\,e^{-i(\nu x-t)}+\\ &\quad+G_0e^{-\lambda_0}[\overline{H}_1(\lambda_0)-i\overline{H}_2(\lambda_0)]\,e^{-i(\lambda_0 x-t)}\}, \quad x\to+\infty \end{aligned} \tag{3.17}$$

Обозначив (3.18)

$$\begin{aligned} \alpha_{1-} &= |A_0|\,|\overline{H}_1(\nu)+i\overline{H}_2(\nu)|, & \beta_{1-} &= |B_0+C_0|\,|\overline{H}_1(\lambda_0)+i\overline{H}_2(\lambda_0)|\\ \alpha_{1+} &= |A_0|\,|\overline{H}_1(\nu)-i\overline{H}_2(\nu)|, & \beta_{1+} &= |B_0+C_0|\,|\overline{H}_1(\lambda_0)-i\overline{H}_2(\lambda)|\\ \alpha_{2-} &= e^{-\nu}\,|E_0|\,|\overline{H}_1(\nu)+i\overline{H}_2(\nu)|, & \beta_{2-} &= e^{-\lambda_0}|G_0|\,|\overline{H}_1(\lambda_0)+i\overline{H}_2(\lambda_0)|\\ \alpha_{2+} &= e^{-\nu}\,|E_0|\,|\overline{H}_1(\nu)-i\overline{H}_2(\nu)|, & \beta_{2+} &= e^{-\lambda_0}|G_0|\,|\overline{H}_1(\lambda_0)-i\overline{H}_2(\lambda_0)| \end{aligned}$$

можем констатировать следующее. На свободной границе и границе раздела в обе стороны от колеблющегося тела расходятся волны, причем волновые профили представляют собой результат наложения двух видов волн с длинами $2\pi/\nu$ и $2\pi/\lambda_0$. Амплитуды волн, уходящих в сторону убывающих и возрастающих x, соответственно равны α_{j-} и α_{j+} для волн длины $2\pi/\nu$ и равны β_{j-} и β_{j+} для волн длины $2\pi/\lambda_0$, где $j=1$ для свободной границы и $j=2$ для границы раздела.

Зная величину

$$B_0+C_0=-\frac{2\varkappa L(\lambda_0)}{(\lambda_0-\nu)\,T'(\lambda_0)}\,e^{-2\lambda_0}$$

можем записать отношения амплитуд:

$$\frac{\alpha_{2-}}{\alpha_{1-}}=e^{-\nu},\qquad \frac{\alpha_{2+}}{\alpha_{1+}}=e^{-\nu},\qquad \frac{\beta_{2-}}{\beta_{1-}}=\frac{e^{\lambda_0}}{\varkappa},\qquad \frac{\beta_{2+}}{\beta_{1+}}=\frac{e^{\lambda_0}}{\varkappa} \tag{3.19}$$

откуда следует, что волны первого вида перемещаются главным образом вдоль свободной границы, а волны второго вида — вдоль границы раздела.

3. Обозначим через X и Y проекции главного вектора сил давлений, приложенных к контуру тела C, а через M — главный момент этих сил давлений относительно начала координат. Для определения средних значений величин X, Y и M за один период колебания используем формулы Н. Е. Кочина [1]

$$\begin{aligned} Y_{\text{ср}}+iX_{\text{ср}} &= \overset{\circ}{\rho}_2 S_{\text{ср}}-\frac{\overset{\circ}{\rho}_2}{4}\int\limits_{C_2}\left[\left(\frac{d\overset{\circ}{w}_{21}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\overset{\circ}{w}_{22}}{dz}\right)^2\right]dz\\ M_{\text{ср}} &= \overset{\circ}{\rho}_2\,[x_cS]_{\text{ср}}-\frac{\overset{\circ}{\rho}_2}{4}\operatorname{Re}\left\{\int\limits_{C_2}\left[\left(\frac{d\overset{\circ}{w}_{21}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\overset{\circ}{w}_{22}}{dz}\right)^2\right]z\,dz\right\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

где S — площадь, ограниченная контуром тела C, x_c — абсцисса центра тяжести этой площади, а C_2 — любой контур, лежащий в области $-1 > \operatorname{Im} z > -\infty$ и охватывающий контур C_1. Первые слагаемые правых частей зависят, очевидно, от подъемной силы Архимеда.

Поскольку

$$\frac{dw_{2m}^{\circ}}{dz} = \bar{v}_{2m}(z) = V_m(z) + U_m(z) \tag{3.21}$$

и

$$\int_{C_2} V_m^2(z)\,dz = 0, \qquad \int_{C_2} U_m^2(z)\,dz = 0$$

то

$$\int_{C_2} \left(\frac{dw_{2m}^{\circ}}{dz}\right)^2 dz = 2\int_{C_2} \bar{v}_{2m}(z)\,U_m(z)\,dz$$

Отсюда, учитывая формулы (3.11) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{gathered}\int_{C_2} \left(\frac{d\overset{\circ}{w}_{21}}{dz}\right)^2 dz = \\ =2\int_0^\infty H_1(\lambda)\,\overline{H_1}(\lambda)\left(-\frac{1}{2\pi}+G\right)d\lambda - 2E_0H_1(\nu)\,\overline{H_2}(\nu) - 2G_0H_1(\lambda_0)\,\overline{H_2}(\lambda_0) \\ \int_{C_2} \left(\frac{d\overset{\circ}{w}_{22}}{dz}\right)^2 dz = \\ =2\int_0^\infty H_2(\lambda)\,\overline{H_2}(\lambda)\left(-\frac{1}{2\pi}+G\right)d\lambda + 2E_0H_2(\nu)\,\overline{H_1}(\nu) + 2G_0H_2(\lambda_0)\,\overline{H_1}(\lambda_0)\end{gathered} \tag{3.22}$$

Подставив выражения (3.22) в первую формулу (3.20), найдем

$$\begin{gathered}Y_{\text{ср}} = \rho_2^{\circ}S_{\text{ср}} + \frac{\rho_2^{\circ}}{4\pi}\int_0^\infty \left[\,|H_1(\lambda)|^2 + |H_2(\lambda)|^2\right]d\lambda - \frac{\rho_2^{\circ}}{2}\int_0^\infty \left[\,|H_1(\lambda)|^2 + \right. \\ \left. +\,|H_2(\lambda)|^2\right]G\,d\lambda\end{gathered} \tag{3.23}$$

$$X_{\text{ср}} = \rho_2^{\circ}E_0 \operatorname{Im}[H_1(\nu)\,\overline{H}_2(\nu)] + \rho_2^{\circ}G_0 \operatorname{Im}[H_1(\lambda_0)\,\overline{H}_2(\lambda_0)] \tag{3.24}$$

Момент M вычисляем аналогично. В окрестности бесконечно удаленной точки функции $V_m(z)$ имеют разложение:

$$V_m(z) = \frac{1}{2\pi i z}\int_{C_1} \bar{v}_{2m}(\zeta)\,d\zeta + \ldots = \frac{H_m(0)}{2\pi i z} + \ldots$$

вследствие чего

$$\operatorname{Re}\left[\int_{C_2} zV_m^2(z)\,dz\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{H_m^2(0)}{2\pi i}\right] = 0$$

Кроме того,

$$\int_{C_2} zU_m^2(z)\,dz = 0$$

Поэтому

$$M_{\text{ср}} = \rho_2^{\circ}[x_cS]_{\text{ср}} - \frac{\rho_2^{\circ}}{2}\operatorname{Re}\left\{\int_{C_2}[zV_1(z)\,U_1(z) + zV_2(z)\,U_2(z)]\,dz\right\} \tag{3.25}$$

или после вычислений

$$M_{\text{ср}} = \rho_2{}^\circ\Big[x_c S\Big]_{\text{ср}} + \frac{\rho_2{}^\circ}{2}\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty \Big[\overline{H}_1(\lambda)\frac{dH_1}{d\lambda} + \overline{H}_2(\lambda)\frac{dH_2}{d\lambda}\Big]\Big(-\frac{1}{2\pi} + G\Big)d\lambda\right\} +$$
$$+ \frac{\rho_2{}^\circ}{2}E_0\,\mathrm{Im}\left[\overline{H}_1(\nu)\Big(\frac{dH_2}{d\lambda}\Big)_\nu - \overline{H}_2(\nu)\Big(\frac{dH_1}{d\lambda}\Big)_\nu\right] + \frac{\rho_2{}^\circ}{2}G_0\,\mathrm{Im}\left[\overline{H}_1(\lambda_0)\Big(\frac{dH_2}{d\lambda}\Big)_{\lambda_0} -\right.$$
$$\left. - \overline{H}_2(\lambda_0)\Big(\frac{dH_1}{d\lambda}\Big)_{\lambda_0}\right] \tag{3.26}$$

При отсутствии верхнего слоя жидкости можно положить $\varkappa = 0$. В этом случае формулы (3.10), (3.16), (3.23), (3.24) и (3.26) совпадут с соответствующими формулами Н. Е. Кочина [1].

Для вычисления функций $H_m(\lambda)$, через которые выражены все основные результаты решения задачи, требуется знать выражения функций $\bar{v}_{2m}(z)$ на контуре тела C. Однако в случае большой относительной глубины погружения можно получить сравнительно хорошее приближение, если подставить в формулы (3.8) вместо функций $\bar{v}_{2m}(z)$ их значения $\bar{v}_{2m\infty}(z)$, соответствующие колебаниям тела в безграничной жидкости. Можно рассмотреть ряд примеров, подобных тем, которые разобраны у Н. Е. Кочина [1].

§ 4. Решение задачи при помощи интегральных уравнений. 1. По выведенным в § 3 формулам можно получить точные значения искомых величин, если известно решение задачи, поставленной в § 1. Применяя граничное условие на контуре тела C, сведем эту задачу к решению интегральных уравнений.

Предполагая, что контур C — простой, с непрерывной кривизной, распределим вдоль C пульсирующие источники с некоторой плотностью $[\gamma_1(\sigma)\cos t + \gamma_2(\sigma)\sin t]$, где σ — длина дуги контура C, отвечающая точке $\zeta(\sigma)$ этого контура.

Тогда комплексные потенциалы $w_{2m}{}^\circ(z)$ можно искать в виде

$$w_{2m}{}^\circ(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \gamma_m(\sigma)\ln[z - \zeta(\sigma)]\,d\sigma + w_{2m}{}^*(z) \tag{4.1}$$

где $w_{2m}{}^*(z)$ — функции, аналитические в области E_2. Используя формулы (2.22), получим

$$w_{2m}{}^*(z) = \int_C \left\{\gamma_m(\sigma)\Big[\frac{1}{2\pi}\ln(z - \bar{\zeta}) + \int_0^\infty G e^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\frac{d\lambda}{\lambda}\Big] + E_m{}'(\nu)e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} +\right.$$
$$\left. + E_m{}'(\lambda_0)\,e^{-i\lambda_0(z-\bar{\zeta})}\right\}d\sigma \tag{4.2}$$

где

$$E_1{}'(\nu) = -\gamma_2(\sigma)\frac{E_0(\nu)}{\nu}, \qquad E_2{}'(\nu) = \gamma_1(\sigma)\frac{E_0(\nu)}{\nu}$$

$$E_1{}'(\lambda_0) = -\gamma_2(\sigma)\frac{E_0(\lambda_0)}{\lambda_0}, \qquad E_2{}'(\lambda_0) = \gamma_1(\sigma)\frac{E_0(\lambda_0)}{\lambda_0}$$

причем обозначили $E_0(\nu) = E_0$, $E_0(\lambda_0) = G_0$.

Очевидно, что условия 1° — 5° из § 1 удовлетворяются при этом.

Подставляя выражения dw_{2m}° / dz из (4.1) в формулы (3.8), получим

$$H_m(\lambda) = i \int\limits_C \gamma_m(\sigma) e^{-i\lambda\zeta} d\sigma \tag{4.3}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^\infty Ge^{-i\lambda(z-\bar\zeta)} d\lambda = \int\limits_{L-} Ge^{-i\lambda(z-\bar\zeta)} d\lambda - iE_0(\nu) e^{-i\nu(z-\bar\zeta)} - iE_0(\lambda_0) e^{-i\lambda_0(z-\bar\zeta)}$$

(фиг. 2) и используя формулы (4.3), получим после вычислений

$$\frac{dw_{2m}^\circ}{dz} = \int\limits_C \gamma_m(\sigma) \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar\zeta} \right] - i \int\limits_{L-} Ge^{-i\lambda(z-\bar\zeta)} d\lambda \right\} d\sigma +$$
$$+ E_m(\nu) e^{-i\nu z} + E_m(\lambda_0) e^{-i\lambda_0 z} \tag{4.4}$$

где для значений ν и λ_0, принимаемых величиной Λ, обозначим

$$E_1(\Lambda) = -iE_0(\Lambda)[\bar H_1(\Lambda) - i\bar H_2(\Lambda)], \quad E_2(\Lambda), iE_1(\Lambda) \tag{4.5}$$

Функции $\gamma_m(\sigma)$ отыскиваем из условий 6° на контуре тела C, которые можно записать так:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dw_{2m}^\circ}{dz} e^{i\vartheta}\right] = v_{nm}(s) \tag{4.6}$$

где ϑ — угол между внешней нормалью к контуру C и осью x.

Применяя формулы для предельных значений интеграла типа Коши на контуре C, из условий (4.6) получим интегральные уравнения

$$\gamma_m(s) = -\int\limits_C K(s, \sigma) \gamma_m(\sigma) d\sigma + f_m(s) \tag{4.7}$$

где

$$K(s, \sigma) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{i\vartheta}}{z-\zeta} + \frac{e^{i\vartheta}}{z-\bar\zeta} \right] - 2ie^{i\vartheta} \int\limits_{L-} Ge^{-i\lambda(z-\bar\zeta)} d\lambda \right\} \tag{4.8}$$

$$f_m(s) = 2v_{nm}(s) - 2\operatorname{Re}\{E_m(\nu) e^{i(\vartheta-\nu z)} + E_m(\lambda_0) e^{i(\vartheta-\lambda_0 z)}\} \tag{4.9}$$

2. Итак, задача свелась к интегральному уравнению

$$\gamma(s) = \mu \int\limits_C K(s, \sigma) \gamma(\sigma) d\sigma + f(s) \tag{4.10}$$

при $\mu = -1$. Будем искать его решение для достаточно малых значений ν. Переходя к пределу при $\nu \to 0$, получим уравнение

$$\gamma(s) = \mu \int\limits_C K_0(s, \sigma) \gamma(\sigma) d\sigma + f_0(s) \tag{4.11}$$

где

$$K_0(s, \sigma) = \lim_{\nu\to 0} K(s, \sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\vartheta}}{z-\zeta} + \frac{e^{i\vartheta}}{z-(\bar\zeta-2i)} \right] = \frac{\cos(n, r)}{\pi r} + \frac{\cos(n, r')}{\pi r'}$$

$$f_0(s) = \lim_{\nu\to 0} f(s)$$

$$r = |z-\zeta|, \qquad r' = |z-(\bar\zeta-2i)|$$

Вводя контур C', симметричный с контуром C относительно прямой $y = -1$, перепишем уравнение (4.11) в виде

$$\gamma(s) = \mu \int\limits_{C+C'} \frac{\cos(n, r)}{\pi r} \gamma(\sigma) d\sigma + f_0(s) \tag{4.12}$$

считая, что функции $\gamma(s)$ и $f_0(s)$ имеют равные значения в симметричных относительно прямой $y = -1$ точках.

Но известно, что уравнение (4.12) имеет простое характеристическое число $\mu = 1$, а все остальные характеристические числа μ_k таковы, что $|\mu_k| > 1$. Так как однородное сопряженное к (4.12) уравнение имеет при $\mu = 1$ единственное независимое решение $\gamma(\sigma) \equiv 1$, то условием существования решения уравнения (4.12) при $\mu = 1$ будет удовлетворение равенству

$$\int_C f_0(s)\, ds = 0$$

которое выполняется, если считать, что контур C не деформируется при колебаниях. Поэтому решение уравнения (4.12) будет мероморфной функцией μ, причем полюсы этой функции лежат вне круга $|\mu| \leqslant 1$. Но тогда для достаточно малых значений ν решение уравнения (4.10) будет иметь внутри круга $|\mu| \leqslant R$, где $R > 1$, лишь одно характеристическое число. Покажем, что оно равно единице. Действительно, имеем

$$\int_C K(s, \sigma)\, ds = \int_C \frac{\cos(n, r)}{\pi r}\, ds + \operatorname{Re}\Big[\int_C g(z)\, dz\Big] = \int_C \frac{\cos(n, r)}{\pi r}\, ds = 1 \tag{4.13}$$

где $g(z)$ — аналитическая в области E_2 функция. Вследствие этого однородное сопряженное к (4.10) уравнение имеет при $\mu = 1$ решение $\gamma(\sigma) \equiv 1$, т. е. число $\mu = 1$ является характеристическим.

Условие разрешимости уравнения (4.10) при $\mu = 1$, имеющее вид:

$$\int_C f(s)\, ds = 0 \tag{4.14}$$

выполняется, поскольку

$$\int_C v_{nm}(s)\, ds = 0, \qquad \operatorname{Re}\Big[\int_C e^{i(\vartheta - \lambda z)}\, ds\Big] = \operatorname{Re}\Big[\int_C e^{-i\lambda z}\, dz\Big] = 0$$

Таким образом, для достаточно малого ν решение уравнения (4.10) существует и является мероморфной функцией от μ, причем характеристическое число $\mu = 1$ не является полюсом этой функции. Поскольку для достаточно малых значений ν все полюсы функции $\gamma(s)$ лежат вне круга $\mu| \leqslant 1$, то решение уравнения (4.10) можно взять в виде ряда по степеням μ, который сходится в круге $|\mu| \leqslant 1$.

Итак,

$$\gamma(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l q_l(s) \tag{4.15}$$

Для $\mu = -1$ получаем решения наших уравнений (4.7):

$$\gamma_m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l q_{ml}(s) \tag{4.16}$$

где

$$q_{m0}(s) = f_m(s), \qquad q_{ml}(s) = \int_C K(s, \sigma)\, q_{m,\, l-1}(\sigma)\, d\sigma \tag{4.17}$$

3. Найдем постоянные $E_m(\nu)$ и $E_m(\lambda_0)$, через которые выражаются функции $f_m(s)$, а следовательно, и решения (4.16). Последние можно представить в виде

$$\gamma_m(s) = \gamma_m^\circ(s) + \operatorname{Re}[E_m(\nu)\, \gamma(s, \nu)] + \operatorname{Re}[E_m(\lambda_0)\, \gamma(s, \lambda_0)] \tag{4.18}$$

где $\gamma_m^\circ(s)$ и $\gamma(s, \lambda)$ являются решениями уравнений

$$\gamma_m^\circ(s) = -\int_C K(s, \sigma)\gamma_m^\circ(\sigma)\,d\sigma + 2v_{nm}(s) \tag{4.19}$$

$$\gamma(s, \lambda) = -\int_C K(s, \sigma)\gamma(\sigma, \lambda)\,d\sigma - 2e^{i\vartheta - i\lambda z} \tag{4.20}$$

причем λ принимает значения ν и λ_0.

Подставляя выражения (4.18) в формулы (4.3) и применяя очевидное равенство $\operatorname{Re}[a\cdot b] + i\operatorname{Re}[ia\cdot b] = \bar{a}\cdot\bar{b}$, найдем, что

$$H_1(\Lambda) + iH_2(\Lambda) = H_1^\circ(\Lambda) + iH_2^\circ(\Lambda) + \overline{E_1(\nu)}\,H(\nu, \Lambda) + \overline{E_1(\lambda_0)}\,H(\lambda_0, \Lambda) \tag{4.21}$$

где для величин λ и Λ, принимающих значения ν и λ_0, обозначим

$$H_m^\circ(\Lambda) = i\int_C \gamma_m^\circ(\sigma)e^{-\Lambda\zeta}\,d\sigma, \qquad H(\lambda, \Lambda) = i\int_C \overline{\gamma(\sigma, \lambda)}\,e^{-i\Lambda\zeta}\,d\sigma \tag{4.22}$$

Подставив в формулы (4.5) выражения (4.21) при $\Lambda = \nu$ и $\Lambda = \lambda_0$, получим для отыскания величин $E_1(\nu)$ и $E_1(\lambda_0)$ два уравнения, из которых найдем

$$E_1(\nu) = -\frac{\alpha_1}{\beta}, \qquad E_1(\lambda_0) = -\frac{\alpha_2}{\beta}, \qquad E_2(\nu) = iE_1(\nu), \qquad E_2(\lambda_0) = iE_1(\lambda_0) \tag{4.23}$$

где

$$\alpha_1 = E_0(\nu)E_0(\lambda_0)\overline{H(\lambda_0, \nu)}\,[\overline{H_1^\circ(\lambda_0)} - \overline{iH_2^\circ(\lambda_0)}] + iE_0(\nu)\,[1 + iE_0(\lambda_0)\overline{H(\lambda_0, \lambda_0)}]\,[\overline{H_1^\circ(\nu)} - \overline{iH_2^\circ(\nu)}]$$

$$\alpha_2 = E_0(\nu)E_0(\lambda_0)\overline{H(\nu, \lambda_0)}\,[\overline{H_1^\circ(\nu)} - \overline{iH_2^\circ(\nu)}] + iE_0(\lambda_0)\,[1 + iE_0(\nu)\overline{H(\nu, \nu)}]\,[\overline{H_1^\circ(\lambda_0)} - \overline{iH_2^\circ(\lambda_0)}]$$

$$\beta = E_0(\nu)E_0(\lambda_0)\overline{H(\nu, \lambda_0)}\,\overline{H(\lambda_0, \nu)} + [1 + iE_0(\nu)\overline{H(\nu, \nu)}]\,[1 + iE_0(\lambda_0)\overline{H(\lambda_0, \lambda_0)}] \tag{4.24}$$

Пользуясь уравнениями (4.7) и равенствами (4.13) и (4.14), нетрудно доказать равенства

$$\int_C \gamma_m(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{4.25}$$

Используя (4.25), получим из (4.22) при $\nu = 0$

$$[H_m^\circ(\Lambda)]_{\Lambda=0} = 0, \qquad [H(\lambda, \Lambda)]_{\lambda=\Lambda=0} = 0$$

откуда следует, что для достаточно малых значений ν входящий в формулы (4.23) знаменатель β отличен от нуля.

Определяя величины $E_m(\nu)$ и $E_m(\lambda_0)$ по формулам (4.23), можем затем из (4.18) найти функции $\gamma_m(s)$. Подставив последние в формулы (4.3), отыщем функции $H_m(\lambda)$, которые дают возможность найти основные величины задачи по формулам § 3. Рассматривая случай, достаточно малой (по сравнению с единицей) длины контура C, при помощи принципа сжатых отображений можно доказать сходимость процесса последовательных приближений при любых значениях параметра ν.

Поступила 14 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. К о ч и н Н. Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Собр. соч., т. II, 1949.
2. Х а с к и н д М. Д. Плоская задача о колебаниях тела под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. ПММ, т. VIII, вып. 4, 1944.