

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Б. М. Булах

(Саратов)

В работе Гиза и Кона [1] производится сведение уравнения безвихревых установившихся конических течений газа в пространстве годографа к канонической системе трех уравнений для компонент скорости u, v, w , содержащих старшие производные от u, v, w в виде лапласианов, а положение луча, определяемого $\xi = x/z, \eta = y/z$ и соответствующего u, v, w , находится через производные от u, v, w по введенным авторами независимым переменным. При использовании этих уравнений для получения приближенных решений возникает ряд трудностей. Во-первых, неясно, как выглядит линеаризованная теория в переменных авторов; во-вторых, ξ, η должны определяться через производные от приближенного решения; в третьих, неясно, будет ли всякое коническое течение иметь однолиственную область в переменных u, v . По этим причинам в настоящей работе предлагается другой метод. Дифференциальное квазилинейное уравнение второго порядка $AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = D$, где A, B, C, D — произвольные функции, зависящие от $\xi, \eta, F, F_{\xi}, F_{\eta}, AC - B^2 > 0$, приводится к канонической системе уравнений

$$\Delta\xi = \Phi_1, \quad \Delta\eta = \Phi_2, \quad \Delta u = \Phi_3, \quad \Delta v = \Phi_4, \quad \Delta w = \Phi_5$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}, \quad u = F_{\xi}, \quad v = F_{\eta}, \quad w = F - \xi u - \eta v$$

Здесь функции Φ зависят от ξ, η, u, v, w и их первых производных по ρ, σ .

Дается метод получения второго приближения в теории нелинеаризованных безвихревых установившихся конических течений газа. Производится проверка точности метода на примере осесимметричного обтекания круглого конуса.

§ 1. Дифференциальное уравнение, описывающее безвихревые конические движения газа, имеет вид:

$$AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь

$$A = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2$$

$$a^2 = a_0^2 - \frac{1}{2}(\kappa - 1)(u^2 + v^2 + w^2 - W_0^2) \quad (u = F_{\xi})$$

$$B = (a^2 - w^2)\xi\eta + (u\eta + v\xi)w - uv \quad (w = F - \xi u - \eta v)$$

$$C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2 \quad \left(\xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z}\right) \quad (v = F_{\eta})$$

a^2 — скорость звука, κ — отношение удельных теплоемкостей, a_0, W_0 — соответственно скорость звука и скорость в некоторой точке потока, u, v, w — составляющие скорости, величины ξ, η — соответственно координаты x и y точек плоскости $z = 1$ в пространстве xuz .

Уравнение (1.1) эллиптического типа, если проекция скорости на плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору точки в пространстве xuz , меньше скорости звука. Коэффициенты A, B, C в (1.1) зависят от искомой функции F , что делает невозможным сведение (1.1) к системе двух уравнений первого порядка с последующим приведением ее к каноническому виду по методу С. А. Христиановича [2]. Ниже излагается способ приведения уравнений типа (1.1) к канонической системе, так как, по-видимому, в общем виде это сделано не было (см., например, [3]).

Эти результаты дополняют результаты С. А. Христиановича.

Рассмотрим уравнение

$$AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = D \quad (1.2)$$

где A, B, C, D — произвольные функции $\xi, \eta, F, F_{\xi}, F_{\eta}$. Уравнение (1.2) эквивалентно системе

$$Au_{\xi} + B(u_{\eta} + v_{\xi}) + Cv_{\eta} = D \quad dF = ud\xi + vd\eta \quad (1.3)$$

Здесь сделаем замену $w = F - \xi u - \eta v$ (все нижеследующее проходит и без этой замены без существенных изменений); получим

$$Au_{\xi} + B(u_{\eta} + v_{\xi}) + Cv_{\eta} = D, \quad dw + \eta dv + \xi du = 0 \quad (1.4)$$

Вводим новые независимые переменные ρ, σ по формулам

$$N = A\eta_{\rho} - B\xi_{\rho} + \sqrt{AC - B^2} \xi_{\sigma} = 0, \quad R = A\eta_{\sigma} - B\xi_{\sigma} - \sqrt{AC - B^2} \xi_{\rho} = 0 \quad (1.5)$$

Величины u, v, w, ξ, η рассматриваются теперь как функции ρ, σ . Переменные ρ, σ те же самые, что имеются у Куранта и Гильберта [3], по автору удалось выделить из записанных там соотношений для ξ, η линейные, относительно производных, множители N и R . Отметим, что ρ, σ имеют тот же смысл «комплексных характеристик» [2], т. е. записывая формально уравнения характеристик (1.2) в виде

$$A \frac{d\eta}{d\tau} - (B^2 + i\sqrt{AC - B^2}) \frac{d\xi}{d\tau} = 0$$

и переходя от $\tau = \rho + i\sigma, \bar{\tau} = \rho - i\sigma$ к ρ, σ , после отделения действительной и мнимой частей получим (1.5). Легко проверить, что равенства (1.5) будут инвариантны относительно конформного преобразования плоскости независимых переменных $\rho + i\sigma = f(\rho^* + i\sigma^*)$, где f — аналитическая функция, ρ^*, σ^* — новые переменные. Из (1.5) следует, что якобиан

$$\xi_{\rho}\eta_{\sigma} - \xi_{\sigma}\eta_{\rho} = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} (\xi_{\rho}^2 + \xi_{\sigma}^2) \quad (1.6)$$

и может обращаться в нуль только в изолированных точках. Переходя в (1.4) к переменным ρ, σ и используя (1.5), а также соотношения

$$\begin{aligned} X &= -\frac{B}{A}N - \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}R = C\xi_{\rho} - B\eta_{\rho} - \sqrt{AC - B^2}\eta_{\sigma} = 0 \\ Y &= \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}N - \frac{B}{A}R = C\xi_{\sigma} - B\eta_{\sigma} + \sqrt{AC - B^2}\eta_{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

получим систему, эквивалентную (1.2):

$$\begin{aligned} K &= \xi_{\rho}u_{\rho} + \xi_{\sigma}u_{\sigma} + \eta_{\rho}v_{\rho} + \eta_{\sigma}v_{\sigma} - \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}}(\xi_{\rho}\eta_{\sigma} - \xi_{\sigma}\eta_{\rho}) = 0 \\ L &= w_{\rho} + \eta v_{\rho} + \xi u_{\rho} = 0, \quad N = A\eta_{\rho} - B\xi_{\rho} + \sqrt{AC - B^2} \xi_{\sigma} = 0 \\ M &= w_{\sigma} + \eta v_{\sigma} + \xi u_{\sigma} = 0, \quad R = A\eta_{\sigma} - B\xi_{\sigma} - \sqrt{AC - B^2} \xi_{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Составляем соотношения

$$S = L_{\rho} + M_{\sigma} = \Delta w + \eta \Delta v + \xi \Delta u + \xi_{\rho}u_{\rho} + \xi_{\sigma}u_{\sigma} + \eta_{\rho}v_{\rho} + \eta_{\sigma}v_{\sigma} = 0 \quad (1.9)$$

$$T = L_{\sigma} - M_{\rho} = \xi_{\sigma}u_{\rho} - \xi_{\rho}u_{\sigma} + \eta_{\sigma}v_{\rho} - \eta_{\rho}v_{\sigma} = 0$$

Соотношения $S = T = 0$ будут эквивалентны $L = M = 0$, если потребовать, чтобы на границе области, в которой ищется решение, выполнялось условие $Ld\rho + Md\sigma = dw + \eta dv + \xi du = 0$.

Заменяя в (1.8) уравнения $L = M = 0$ на $S = T = 0$ и в $S = 0$ производя замену членов с первыми производными на член с D из $K = 0$, получим систему

$$S = \Delta w + \eta \Delta v + \xi \Delta u + \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} (\xi_\rho \eta_\sigma - \xi_\sigma \eta_\rho) = 0, \quad K = T = N = R = 0 \quad (1.10)$$

Используя (1.6), образуем комбинации

$$K + iT = (\xi_\rho + i\xi_\sigma)(u_\rho - iu_\sigma) + (\eta_\rho + i\eta_\sigma)(v_\rho - iv_\sigma) - \frac{D}{A} (\xi_\rho + i\xi_\sigma)(\xi_\rho - i\xi_\sigma) = 0$$

$$N + iR = A(\eta_\rho + i\eta_\sigma) - (B + i\sqrt{AC - B^2})(\xi_\rho + i\xi_\sigma) = 0 \quad (1.12)$$

Заменяя в соотношении (1.11) величину $\eta_\rho + i\eta_\sigma / (\xi_\rho + i\xi_\sigma)$ на $(B + i\sqrt{AC - B^2})/A$ из (1.12) и отделяя действительную и мнимую части в получившемся соотношении, находим два уравнения: $P = 0, Q = 0$, эквивалентные $K = 0, T = 0$; присоединяя остальные уравнения (1.10) имеем

$$\begin{aligned} P &= Au_\rho + Bv_\rho + \sqrt{AC - B^2}v_\sigma - D\xi_\rho = 0 \\ Q &= Au_\sigma + Bv_\sigma - \sqrt{AC - B^2}v_\rho - D\xi_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$N = A\eta_\rho - B\xi_\rho + \sqrt{AC - B^2}\xi_\sigma = 0, \quad R = A\eta_\sigma - B\xi_\sigma - \sqrt{AC - B^2}\xi_\rho = 0$$

$$S = \Delta w + \eta \Delta v + \xi \Delta u + \frac{D}{\sqrt{AC - B^2}} (\xi_\rho \eta_\sigma - \xi_\sigma \eta_\rho) = 0$$

плюс граничное условие $dw + \eta dv + \xi du = 0$.

От системы (1.13) легко перейти к системе, содержащей вторые производные в виде лапласианов. Составляем

$$P_\rho + Q_\sigma = B\Delta v + A\Delta u - D\Delta\xi + \dots = 0, \quad N_\rho + R_\sigma = A\Delta\eta - B\Delta\xi + \dots = 0 \quad (1.14)$$

$$P_\sigma - Q_\rho = \sqrt{AC - B^2}\Delta v + \dots = 0, \quad N_\sigma - R_\rho = \sqrt{AC - B^2}\Delta\xi + \dots = 0$$

Точками обозначены члены, не содержащие вторых производных. Из (1.14) и $S = 0$, учитывая, что $AC - B^2 \neq 0, A \neq 0$, найдем

$$\Delta u = \Phi_1, \quad \Delta v = \Phi_2, \quad \Delta w = \Phi_3, \quad \Delta\xi = \Phi_4, \quad \Delta\eta = \Phi_5 \quad (1.15)$$

где Φ зависят от ξ, η, u, v, w и их первых производных по ρ, σ . Система (1.15) эквивалентна (1.13), если потребовать, чтобы на границе выполнялись условия

$$\begin{aligned} Pd\rho + Qd\sigma &= Adu + Bdv + \sqrt{AC - B^2}(v_\sigma d\rho - v_\rho d\sigma) - Dd\xi = 0 \\ Nd\rho + Rd\sigma &= Ad\eta - Bd\xi + \sqrt{AC - B^2}(\xi_\sigma d\rho - \xi_\rho d\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$dw + \eta dv + \xi du = 0$$

так как равенства (1.14) для функции $P + iQ, N + iR$ представляют собой условия Коши — Римана.

Для случая $D \equiv 0$ система (1.14) может быть получена в более симметричной форме. Покажем, как это сделать, на примере ξ, η . Обозначим через N', R', X', Y' величины N, R, X, Y [см. (1.5), (1.7)], деленные на $\sqrt{AC - B^2}$. Составим

$$N'_\sigma - R'_\rho = 0, \quad Y'_\rho - X'_\sigma = N'_\rho + R'_\sigma + EN' + FR' = 0 \quad (1.17)$$

где E, F — функции, ограниченные внутри любой замкнутой подобласти области, где ищется решение. Тогда, если потребовать выполнения на

границе условия $N'd\rho + R'd\sigma = 0$, то равенства (1.17) эквивалентны: $N' = R' = 0$. Но $N'_\sigma - R'_\rho = \Delta\xi + \dots = 0$, $Y'_\rho - X'_\sigma = \Delta\eta + \dots = 0$.

Система (1.15) для $D \equiv 0$ имеет вид: (1.18)

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma \xi_\rho - \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho \xi_\sigma + \left(\frac{A}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho \eta_\sigma - \left(\frac{A}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma \eta_\rho \\ \Delta\eta &= \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho \eta_\sigma - \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma \eta_\rho + \left(\frac{C}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma \xi_\rho - \left(\frac{C}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho \xi_\sigma \\ \Delta u &= \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma u_\rho - \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho u_\sigma + \left(\frac{C}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma v_\rho - \left(\frac{C}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho v_\sigma \\ \Delta v &= \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho v_\sigma - \left(\frac{B}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma v_\rho + \left(\frac{A}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\rho u_\sigma - \left(\frac{A}{V\sqrt{AC-B^2}}\right)_\sigma u_\rho \\ \Delta w &= -\eta\Delta v - \xi\Delta u\end{aligned}$$

плюс граничные условия (1.16). Эта система инварианта относительно конформного преобразования плоскости независимых переменных.

Заметим для дальнейшего, что система (1.8) эквивалентна системе

$$S = 0, \quad L = M = N = R = 0 \quad (1.19)$$

где $S = 0$ взято в форме системы (1.10)

§ 2. Применим метод последовательных приближений к уравнению конических течений газа (1.1), приведенного к системе (1.8*). Подставляя в правые части (1.18) и коэффициенты при производных в граничных условиях (1.16) величины, соответствующие первому приближению, за которое мы возьмем обычную линеаризованную теорию обтекания конических тел, получим систему уравнений Пуассона для второго приближения и т. д.

Найдем решение (1.18) или эквивалентной ей системы (1.13), соответствующее однородному потоку $u = v = 0$, $w = w_0$ (ось Oz направлена по потоку). Подставляя $u = v = 0$, $w = w_0$ в (1.13), получаем, что $P = Q = S = 0$ удовлетворяются, а $N = R = 0$ после перехода к полярным координатам в плоскостях ξ , η и ρ , σ по формулам

$$\sqrt{M_0^2 - 1}\xi = r \cos \theta, \quad \sqrt{M_0^2 - 1}\eta = r \sin \theta, \quad \rho = \alpha \cos \beta, \quad \sigma = \alpha \sin \beta \quad (2.1)$$

где M_0 — число Маха однородного потока, имеют решение

$$r = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \theta = \beta$$

Линеаризованная теория получится, если в системе (1.18) в правые части подставить в A , B , C , ξ , η и их производные величины

$$r_{(0)} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \theta_{(0)} = \beta, \quad u = v = 0, \quad w = w_0 \quad (2.2)$$

а первые производные от u , v , выписанные явно, принадлежат искомым функциям, т. е. уравнения для u , v , соответствующих линеаризованной теории, содержат, кроме лапласианов, еще и первые производные искомым функций.

Действительно, подставим только в A , B , C значения (2.2) как в (1.18), так и в (1.16). Тогда, двигаясь в направлении, обратном тому, которое привело к (1.18), т. е. переходя от (1.18) к (1.13)... (1.8) и, наконец, к (1.19), установим, что $u_{(1)}$, $v_{(1)}$, $w_{(1)}$, $\xi_{(1)}$, $\eta_{(1)}$ удовлетворяют

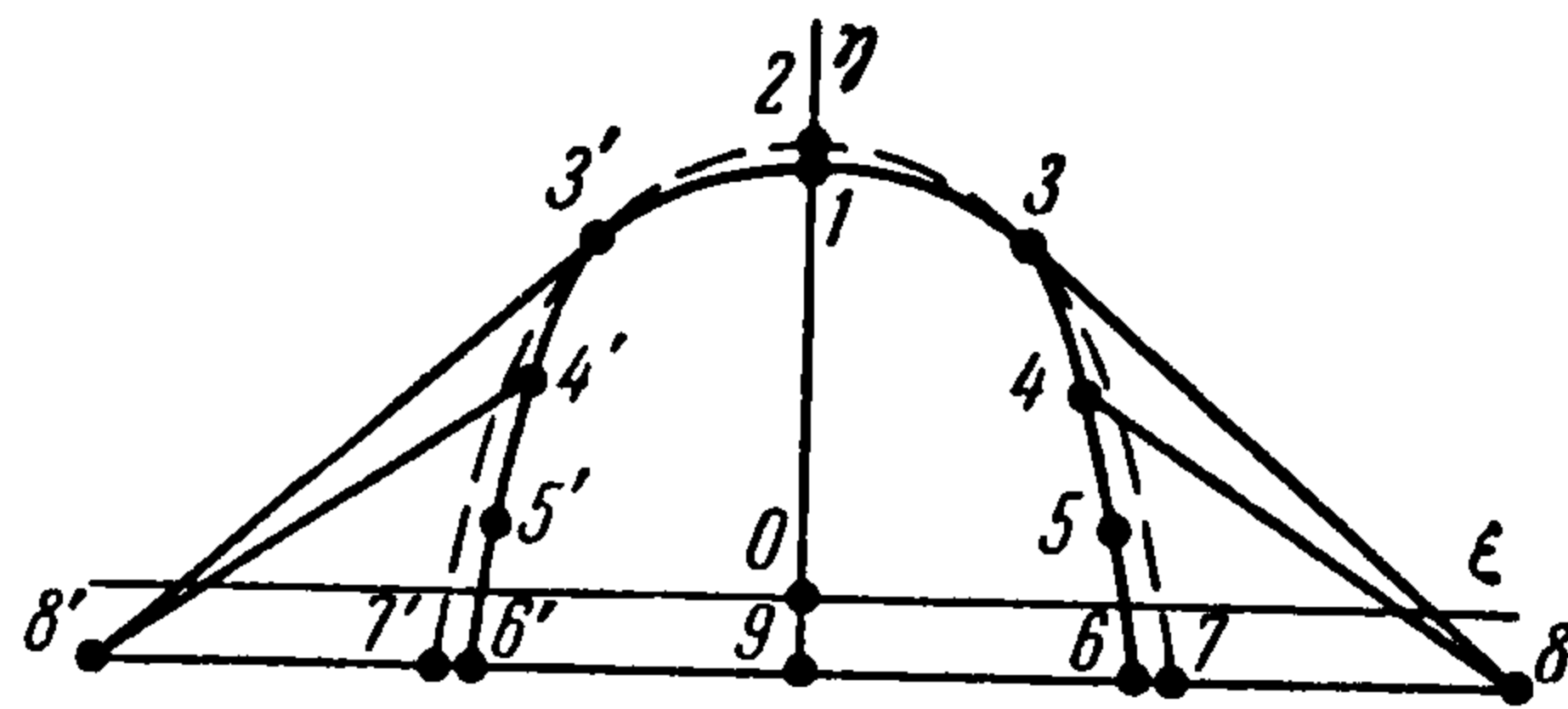
(1.19) при A, B, C , соответствующих (2.2). Поскольку в линеаризованной теории внешней границей конического течения является конус Маха, то решением уравнений $N = 0, R = 0$ вновь можно взять $r_{(1)} = 2\alpha / (1 + \alpha^2), \theta_{(1)} = \beta$, которые им удовлетворяют.

В (1.19) остаются уравнения

$$S = \Delta w_{(1)} + \eta_{(1)} \Delta v_{(1)} + \xi_{(1)} \Delta u_{(1)} = 0$$

$$L = w_{(1)\rho} + \eta_{(1)} v_{(1)\rho} + \xi_{(1)} u_{(1)\rho} = 0$$

$$M = w_{(1)\sigma} + \eta_{(1)} v_{(1)\sigma} + \xi_{(1)} u_{(1)\sigma} = 0$$



Фиг. 1

Легко проверить, что решением этой системы являются три гармонические функции, связанные соотношением

$$d[u_{(1)} + iv_{(1)}] = -\frac{1}{2} \left[\tau df_{(1)} + \frac{1}{\bar{\tau}} \overline{df_{(1)}} \right] \quad (2.3)$$

где $\tau = \alpha e^{i\beta}, \bar{\tau} = \alpha e^{-i\beta}, f_{(1)} = m[w_{(1)} + is]$ — аналитическая функция τ , $m = \sqrt{M_0^2 - 1}$. Действительно, $S = 0$ удовлетворяется $\Delta u_{(1)} = \Delta v_{(1)} = \Delta w_{(1)} = 0$, а $dw_{(1)} + \eta_{(1)} dv_{(1)} + \xi_{(1)} du_{(1)} = 0$, эквивалентное $L = M = 0$ с учетом значений $r_{(1)}, \theta_{(1)}$, является действительной частью равенства (2.3), умноженного на $e^{-i\beta}$. Поскольку $r_{(1)} = r_{(0)}, \theta_{(1)} = \theta_0$, то, заменяя в (1.18) и (1.16) всюду, где возможно, величины с индексом (1) на величины с индексом (0), получим, что линеаризованная теория является решением (1.18) с указанной правой частью, а плоскость τ является плоскостью, введенной А. Буземаном [4].

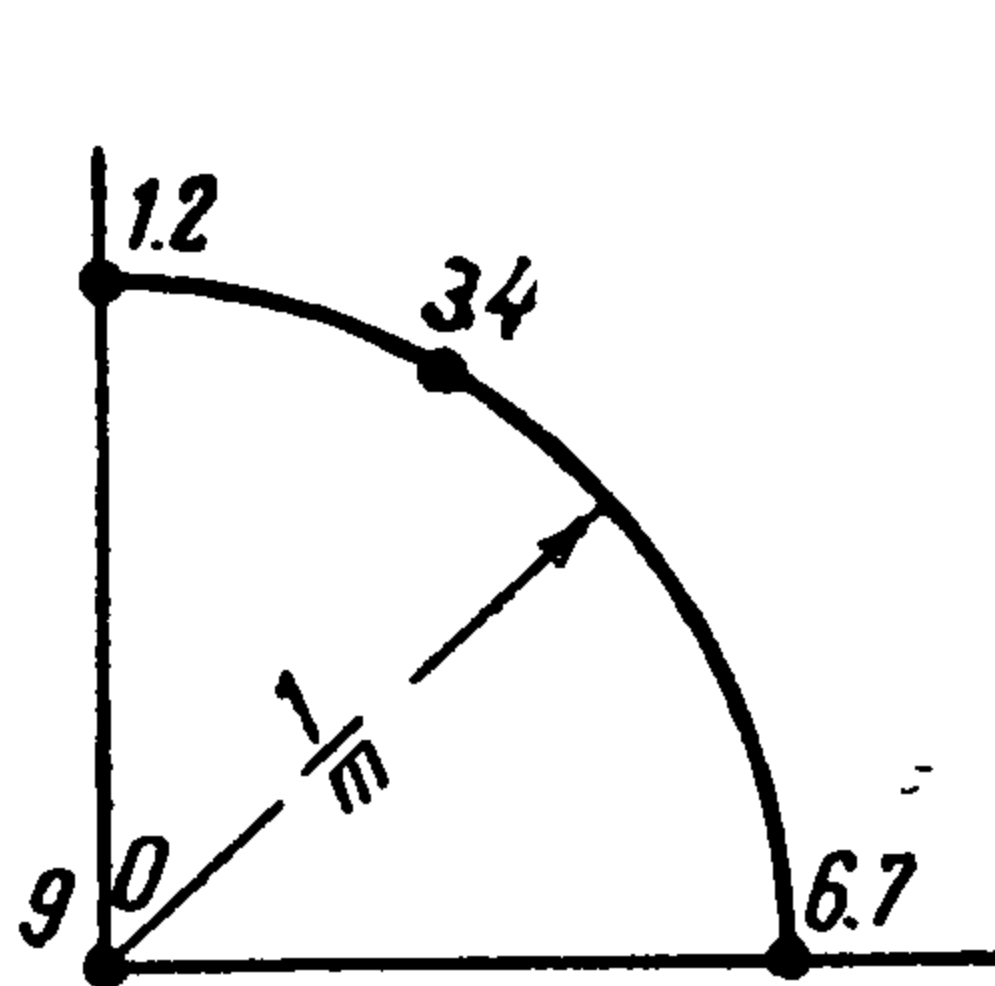
Инвариантность (1.18) относительно конформного преобразования (плоскости независимых переменных) позволяет искать решение в любой удобной для этого области на плоскости $\rho\sigma$. Рассмотрим отдельно случаи, когда область, занимаемая коническим течением на плоскости ξ, η , односвязна и двусвязна. Случай односвязной области рассмотрим на примере обтекания верхней части плоского треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками при угле атаки δ (см. [5]).

Огибающей конусов Маха с вершинами в точках передней кромки служат плоскости $8-3, 8'-3'$ и дуга конуса Маха $3-1-3$ (фиг. 1). За прямыми $3-8, 3'-8'$ идут косые течения Прандтля — Майера, за которыми следуют однородные потоки. Область конического потока ограничена слабым сплошным скачком $7-3-2-3'-7'$ и плоскостью крыла $8-7-7'-8'$. Этот скачок идет вблизи дуги конуса Маха $3-1-3'$, дуг криволинейных характеристик течений Прандтля — Майера $3-4, 3'-4'$, прямолинейных характеристик $4-5, 4'-5'$ и дуг конусов Маха для расширившегося потока $5-6, 5'-6'$. Автор предполагает, что $AC - B^2 > 0$ для этой области (в тех случаях, когда угол при вершине крыла существенно отличается от π). В линеаризованной постановке область конического течения для $\xi > 0$ имеет вид, изображенный на фиг. 2.

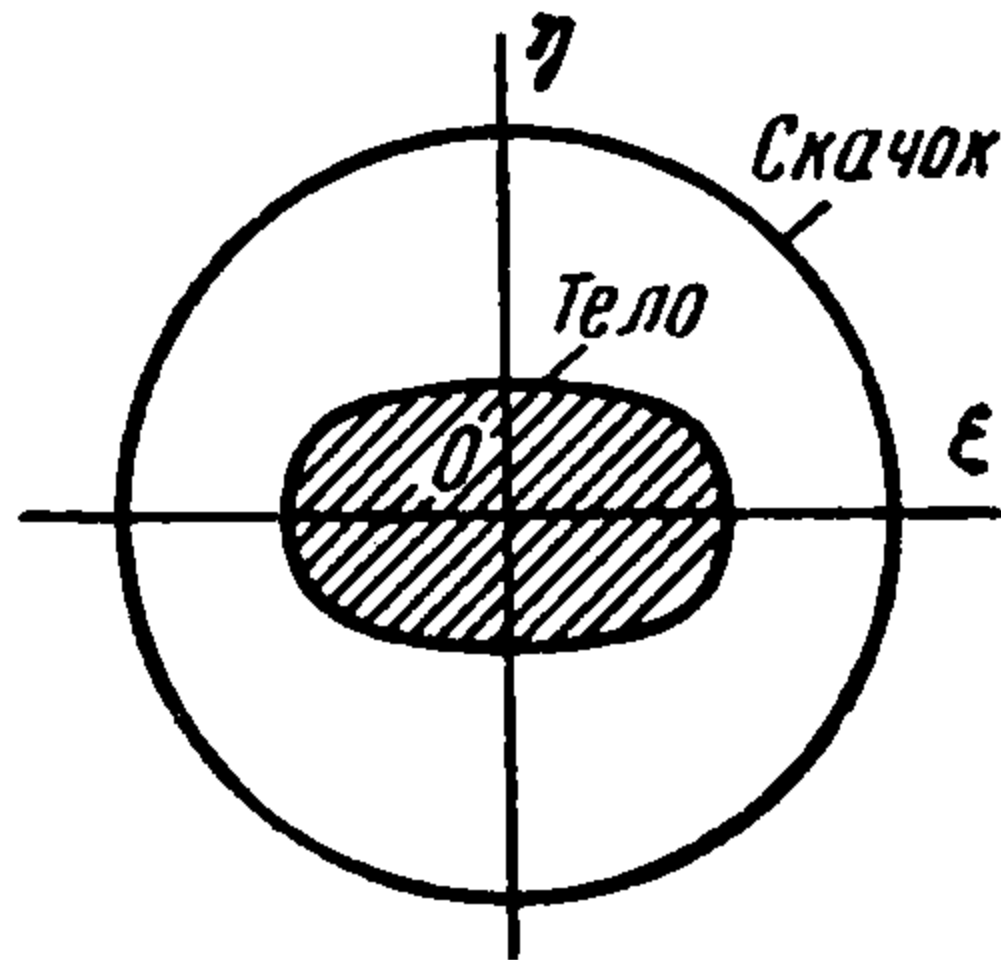
За область переменных $\rho\sigma$ в точном решении принимаем область, получающуюся от отображения области ξ, η в линеаризованной задаче на плоскость ρ, σ по формулам $r = 2\alpha / (1 + \alpha^2), \theta = \beta$. Второе приближение ищется также в этой области. (Для фактического нахождения

второго приближения эту конкретную область можно отобразить на круг или на другую область, для которой функция Грина известна). В нашем примере областью на плоскости ρ, σ является четверть единичного круга.

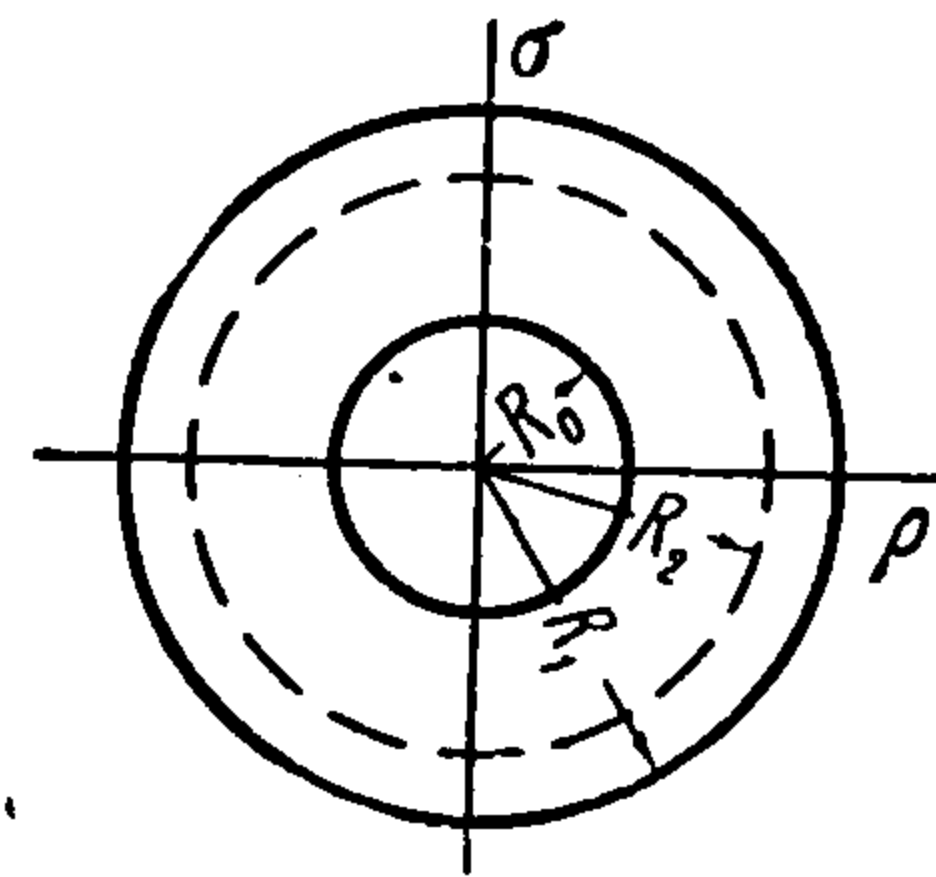
Для нахождения второго приближения в случае двусвязной области (тело, целиком окруженное скачком) область линеаризованной задачи (фиг. 3) на плоскости $\xi\eta$ также переводится на плоскость ρ, σ по формулам $r = 2\alpha / (1 + \alpha^2)$, $\theta = \beta$, а затем эта конкретная область переводится на кольцо, внутренний радиус которого мы зафиксируем. Соответственно



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

линеаризованное решение переводится в новые переменные. Второе приближение будем искать в кольце, внутренний радиус которого совпадает с таковым для первого приближения, а внешний радиус, который заранее неизвестен, найдется при решении задачи о втором приближении. Различие этих радиусов для круглого конуса $O(\epsilon)$, где ϵ — угол полураствора конуса, дано на фиг. 4, где R_0 — фиксированный радиус, R_1 — радиус в первом приближении, R_2 — радиус во втором приближении.

Граничные условия на ударной волне, выражающие непрерывность составляющей скорости, касательной к поверхности скачка, и условие для нормальных составляющих в случае косога скачка имеют вид:

$$w - w_0 + \eta v + \xi u = 0$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \left[1 + \frac{w_0 - w}{a_0} M_0 \frac{\kappa + 1}{2}\right] = r^2 \left[r^2 - 1 - \left(1 + \frac{r^2}{m^2}\right) \frac{w_0 - w}{a_0} M_0 \frac{\kappa + 1}{2}\right] \quad (2.4)$$

где $0, 0, w_0; u, v, w$ — составляющие скорости до и после скачка, ξ, η — координаты поверхности скачка, $r = m \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\operatorname{tg} \theta = \eta / \xi$, κ — адиабатический индекс, $m = \sqrt{M_0^2 - 1}$, M_0, a_0 — число Маха и скорость звука до скачка.

В случае тел, полностью окруженных скачком, пренебрегая $(dr/dt)^2$ и полагая $r = 1$ (конус Маха), для второго приближения получаем

$$w_{(2)} - w_0 + \eta_{(1)} v_{(2)} + \xi_{(1)} u_{(2)} = 0, \quad r_{(2)} - 1 + \frac{M_0^4}{m^2} \frac{\kappa + 1}{4} \frac{w_{(2)} - w_c}{w_0} = 0 \quad (2.5)$$

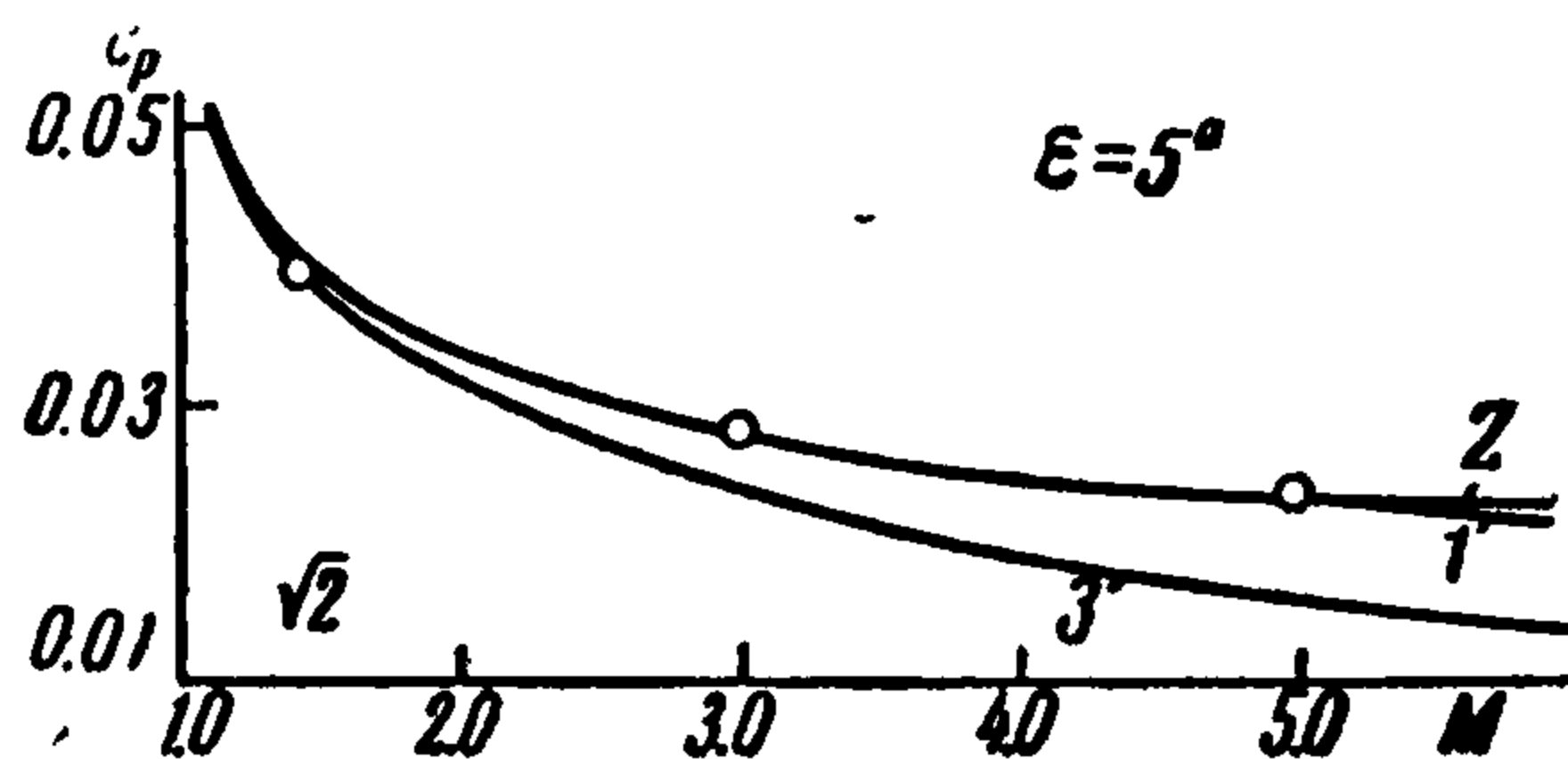
В случае тел, выходящих из конуса Маха, также можно сделать подходящую к конкретной задаче линеаризацию (2.4). Условие обтекания, выражающее равенство нулю составляющей скорости, нормальной к поверхности обтекаемого тела, имеющее вид:

$$Z_\xi (u - \xi w) + Z_\eta (v - \eta w) = 0 \quad (2.6)$$

где $Z(\xi, \eta) = 0$ — уравнение контура тела, можно линеаризовать, если все входящие сюда величины представить как первое приближение плюс

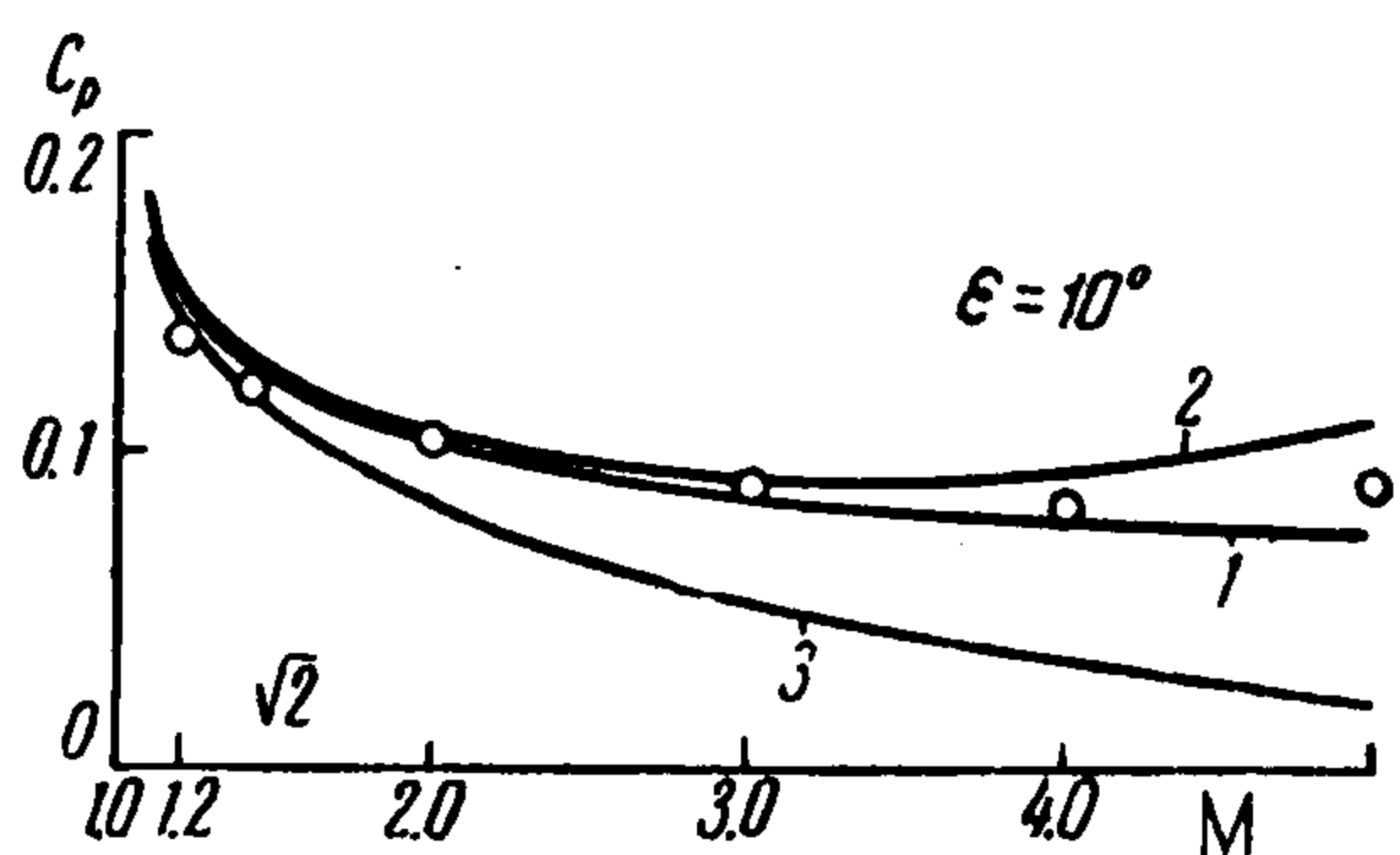
поправка и члены, содержащие квадраты и высшие степени поправок, отбросить.

На конусе Маха $(AC - B^2)_{(1)}$ обращается в нуль и его поверхность является особенной при получении второго приближения, однако это обстоятельство не потребует применения специальных методов (см., например, [6], так как автор считает, что уже $(AC - B^2)_{(2)} \neq 0$. Автор не останавливается на ряде технических трудностей, которые могут встретиться при нахождении второго приближения, например, $(AC - B^2)_{(1)} < 0$ на 3—6 (фиг. 2); это происходит оттого, что граничные условия сносятся на конус Маха невозмущенного потока. Эта трудность устраняется, если снести условия на конус Маха расширившегося потока, что можно сделать, не выходя из пределов точности линеаризованной теории.



Фиг. 5

§ 3. Для оценки точности второго приближения было найдено второе приближение при осесимметричном обтекании круглого конуса. Можно показать, что решение для конуса зависит только от α [см. (2.1)].



Фиг. 6

Если обозначить через λ радиальную составляющую скорости, то система (1.19) перейдет в

$$w'' + \frac{1}{\alpha} w' + \frac{r}{m} \left(\lambda'' + \frac{1}{\alpha} \lambda' - \frac{1}{\alpha^2} \lambda \right) = 0$$

$$w' + \frac{r}{m} \lambda' = 0 \quad (3.1)$$

$$\alpha r' - r \left[1 + \frac{r^2}{m^2} - \frac{(\lambda - wr/m)^2}{a^2} \right]^{1/2} = 0$$

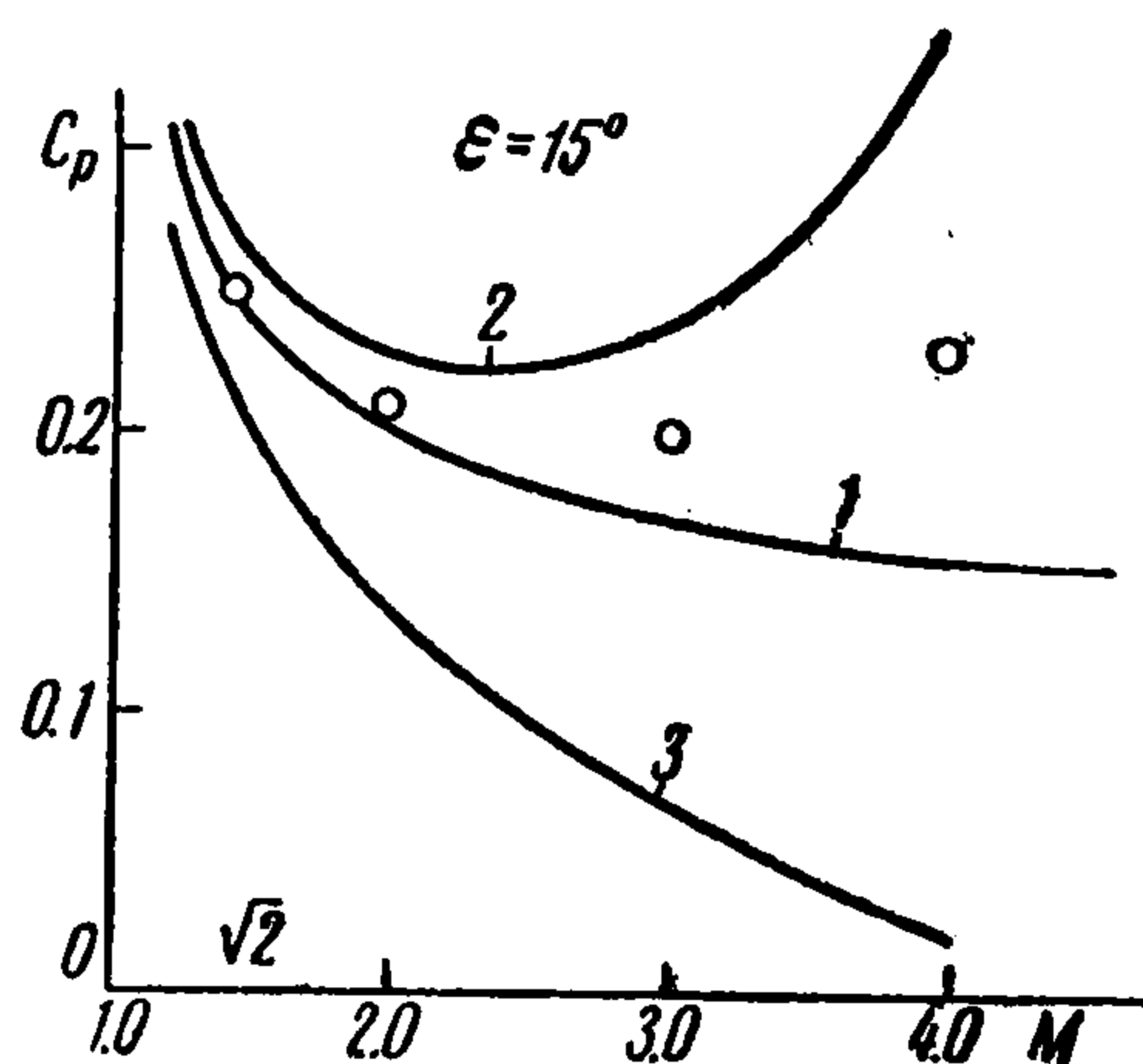
Подставляя w' из второго уравнения (3.1) в первое и используя третье уравнение, получим

$$\alpha w' = \frac{r}{m} \left[1 + \frac{r^2}{m^2} - \frac{(\lambda - wr/m)^2}{a^2} \right]^{-1/2} \lambda$$

$$\alpha \lambda' = - \left[1 + \frac{r^2}{m^2} - \frac{(\lambda - wr/m)^2}{a^2} \right]^{-1/2} \lambda \quad (3.2)$$

$$\alpha r' = r \left[1 + \frac{r^2}{m^2} - \frac{(\lambda - wr/m)^2}{a^2} \right]^{1/2}$$

Система (3.2) по существу эквивалентна (1.18), так как линеаризованное решение получается, если квадратную скобку и r в правых частях (3.2) заменить на их значения, соответствующие однородному потоку $u = v = 0, w = w_0, r = 2\alpha / (1 + \alpha^2)$.



Фиг. 7

Подставляя в правые части (3.2) значения, соответствующие теории тонких тел, а не линеаризованной теории, что делается для простоты вычислений:

$$r_{(1)} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \lambda_{(1)} = w_0 \frac{m\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right), \quad w_{(1)} = w_0 (\epsilon^2 \ln \alpha + 1) \quad (3.3)$$

получаем систему второго приближения, которая решается интегрированием. Выполнение условий обтекания на теле при $\alpha_0 = 1/2 m\varepsilon$, $\lambda_{(2)} = w_{(2)} \operatorname{tg} \varepsilon$, условий на скачке (2.5) дает, что α_1 , определяющее радиус внешней окружности кольца, равно

$$\alpha_1 = 1 - k\varepsilon - l\varepsilon^2 \ln \frac{m\varepsilon}{2} - \dots \quad (3.4)$$

где

$$k = 2M_0 \left[\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{m^2} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2 \right) \int_0^1 \frac{\alpha^2 \ln \alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)(1-\alpha^2)} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

$$l = - \frac{\kappa+1}{4} \frac{M_0^4}{m^3} \frac{1}{k}$$

Член с l учитывает положение скачка; на скачке $r_{(2)} = 1 + O(\varepsilon^3 \ln 1/2 m\varepsilon)$, и не является правильным, однако влияние скачка на компоненты скорости на теле оказывается по предлагаемой теории $O(\varepsilon^6 \ln \varepsilon)$ и при решении других задач его учитывать не надо.

Коэффициент давления на поверхности конуса C_p выражается по формуле

$$C_p = -\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \ln \frac{m\varepsilon}{2} + \frac{2}{m} \varepsilon^3 \ln \frac{m\varepsilon}{2} + 2 \left(\frac{1}{3m} - \frac{1}{3} + \frac{m}{4} + \frac{5}{6} \frac{M_0^2}{m} \right) \varepsilon^3 +$$

$$+ m^2 \varepsilon^4 \ln^2 \frac{m\varepsilon}{2} + 2 \left(M_0^2 - \frac{1}{m^2} - 1 \right) \varepsilon^4 \ln \frac{m\varepsilon}{2} +$$

$$+ \left\{ \frac{M_0^2}{4} - \frac{2}{3m^2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} \frac{M_0^2}{m^2} + M_0^2 \left[\frac{2 \ln 2}{m^2} (2 + (\kappa-1) M_0^2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\pi-1-\ln 2}{2} \right] \right\} \varepsilon^4 + O\left(\varepsilon^5 \ln^2 \frac{m\varepsilon}{2}\right) \quad (3.6)$$

Это выражение не совпадает с формулой, имеющейся у Бродерика [7], что легко объяснить, так как приближения получались различными путями. Расчеты, проведенные по формуле (3.6), показали, что она дает несколько более точные результаты, чем формула Бродерика для второго приближения.

Фиг. 5, 6, 7 для угла конуса $\varepsilon = 5, 10, 15^\circ$ взяты из работы Бродерика [7], на них кривые 1 соответствуют численному решению, кривые 2 — второму приближению по Бродерику, кривые 3 — теории тонких тел; точками нанесены результаты вычислений C_p по формуле (3.6).

Автор благодарит С. В. Фальковича за ценные указания.

Поступила 8 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Giese J. H., Sohn H. Canonical Equations for Non-Linearized Steady Irrotational Canonical Flow. Quart. Appl. Math, vol., 4, pp. 351—360, 1955. Перевод. Сб. «Механика», № 1, стр. 22—32, 1956.
2. Христьянович С. А. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, вып. 481, стр. 4—7, 1940.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. II, ГИТТЛ, стр. 126—129, 1951.
4. Буземан А. Линеаризированные конические сверхзвуковые течения. Сб. «Газовая динамика», стр. 219—238. ИЛ, 1950.
5. Булах Б. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, т. XIX, вып. 4, стр. 393—409, 1955.
6. Lighthill M. J. The Shock Strength in Supersonic, Canonical Fields. Phil. Mag., vol. 40, 7, No 311, 1949.
7. Broderick J. B. Supersonic Flow Round Pointed Bodies. Quart. Journ. Mech. Appl. Math., vol. 11, p. 1, 1949.