Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер

(Москва)

Исследуется устойчивость периодического решения $z = z^\circ(t)$ с периодом τ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \qquad (f(z, t + \tau) \equiv f(z, t)) \tag{0.1}$$

в обыкновенных (неособенных) случаях (z — n-мерный вектор-столбец).

В известных работах Ляпунова и Пуанкаре и многочисленных последующих работах предполагается, что правые части уравнений (0.1) являются непрерывными и могут быть представлены в форме суммы линейного члена и нелинейного остатка. Здесь рассматривается более общий «разрывный» случай, когда заданы поверхности разрыва

$$F_\alpha(z, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{0.2}$$

и предполагается, что правые части $f(z, t)$ уравнений (0.1) могут иметь разрывы на этих поверхностях. Ограничения, накладываемые на функции $f(z, t)$ и $F_\alpha(z, t)$, такие же, как и в работах [1,2].

В настоящей работе показывается, что теорема Ляпунова о линейном приближении и теорема Андронова и Витта о возможности не учитывать единичный корень характеристического уравнения при исследовании устойчивости в автономном случае могут быть обобщены на рассматриваемые здесь системы более общего вида. При этом вместо прямого метода Ляпунова используется метод точечных преобразований, а вместо представления функций $f(z,t)$ суммой линейного члена и нелинейного остатка используются уравнения в вариациях.

В классическом непрерывном случае линейное приближение и уравнения в вариациях совпадают. В рассматриваемом «разрывном» случае подсчет вариации, включая ее разрывы, приводит к линейным соотношениям, дифференциальным и алгебраическим, которые играют в разрывном случае роль линейного приближения. Соответствующая теорема — аналог теоремы Ляпунова — была доказана прямым методом Ляпунова [2]. Однако непосредственно не видно, каким образом этим же методом можно доказать теорему, аналогичную теореме Андронова и Витта для разрывного случая. Использование метода точечных преобразований позволило избежать этого затруднения и дало возможность ниже изложить всю теорию устойчивости периодических процессов применительно к разрывным системам как в неавтономном, так и в автономном случае.

Мысль о возможности использовать метод точечных преобразований для этой цели возникла у нас после ознакомления с рукописью работы Ю. И. Неймарка, которая теперь опубликована [3]. Эта работа содержит обстоятельное исследование задач устойчивости методом точечных преобразований, но она не содержит уравнения линейного приближения для системы (0.1) в разрывном случае (см. далее уравнения (3.1) + (3.4)) и поэтому в ней не доказаны для этого случая теоремы Ляпунова и Андронова—Витта в той форме, в какой эти теоремы сформулированы и доказаны для непрерывного случая.

§ 1. Связь с точечным преобразованием. Периодическое решение $z^\circ(t)$ в z-пространстве определяет замкнутую кривую — цикл. Начальную точку $z^\circ(0)$ на этом цикле примем за начало координат O, т. е. положим $z^\circ(0) = 0$. Тогда и $z^\circ(\tau) = 0$. Пусть $y = z(0)$ — начальное отклонение[1], а $z = \varphi(t, y)$ — соответствующее решение системы (0.1). Тогда интегральные кривые $z = \varphi(t, y)$ определяют точечное преобразование

$$y^* = g(y) \qquad (g(y) \equiv \varphi(\tau, y)) \tag{1.1}$$

при котором начальное отклонение y преобразуется в отклонение y^*, соответствующее моменту $t = \tau$.

Преобразование (1.1) имеет точку $y = 0$ своей неподвижной точкой и преобразует некоторую окрестность этой точки снова в окрестность той же точки. Наряду с преобразованием (1.1) будем рассматривать итерации этого преобразования $y^*_m = g_m(y)$, где $g_m(y) = g[g_{m-1}(y)]$ $(m = 1, 2, \ldots$ $g_0(y) \equiv y)$.

Введем определения. Неподвижная точка $y = 0$ преобразования $y^* =$; $= g(y)$ называется устойчивой, если при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство[2] $|g_m(y)| < \varepsilon$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots,$ коль скоро $|y| < \delta = \delta(\varepsilon)$. Если же дополнительно $\lim g_m(y) = 0$ при $m \to \infty$, коль скоро $|y| < \delta_0$ (δ_0—некоторое фиксированное число), то неподвижная точка $y = 0$ преобразования $y^* = g(y)$ называется асимптотически устойчивой[3]

Заметим, что из неравенств

$$|\varphi(t, y) - \varphi(t, 0)| < \varepsilon \qquad (t \geqslant 0,\ |y| < \delta(\varepsilon))$$

выражающих устойчивость периодического решения $z^\circ(t) = \varphi(t, 0)$, если ограничиться в них дискретными моментами $t = m\tau$, сразу следует устойчивость неподвижной точки $y = 0$. Однако, и обратно, из устойчивости неподвижной точки следует устойчивость периодического решения системы (0.1) Это легко усмотреть из тождества[4]

$$\varphi(t, y) = \varphi(t', g_m(y)) \qquad (g_m(y) = \varphi(m\tau, y), \quad t' = t - m\tau) \tag{1.2}$$

в котором m — целое неотрицательное число. Если определить m из неравенств $m\tau \leqslant t < (m + 1)\tau$, то t' изменяется в конечном интервале $0 \leqslant t' < \tau$ и устойчивость немедленно вытекает из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий на конечном отрезке времени. Так же обстоит дело и с асимптотической устойчивостью. Таким образом, периодическое решение $z^\circ(t)$ системы дифференциальных уравнений (0.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову в том только случае, когда неподвижная точка $y = 0$ точечного преобразования $y^* = \varphi(\tau, y)$ устойчива (соответственно асимптотически устойчива).

---

[1] Начальный момент времени $t = 0$ выбираем отличным от моментов t_α, в которые интегральная кривая $z = z^\circ(t)$ пересекает поверхности разрыва $F_\alpha(z, t) = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$.

[2] Для n-мерного вектора $y(y_1, \ldots, y_n)$ модуль $|y|$ определяем как «эвклидову длину»

$$|y| = \sqrt{|y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2}$$

[3] Предельный переход $m \to \infty$ выполняется равномерно относительно y $(|y| < \delta_0)$. Это вытекает из устойчивости неподвижной точки $y = 0$.

[4] Тождество (1.2) вытекает из периодичности правых частей системы (0.1) относительно t (с периодом τ).

§ 2. Линеаризация точечного преобразования. Точечное преобразование $y^* = g(y)$, где $g(y) = \varphi(\tau, y)$, дифференцируемо[1] при $y = 0$, т. е. существует якобиева матрица $J = (\partial g / \partial y)_{y=0}$ и

$$g(y) = Jy + o(|y|) \qquad \left(\frac{o(|y|)}{|y|} \to 0 \text{ при } y \to 0\right) \tag{2.1}$$

Пусть $\mu = \min|\lambda(J)|$ и $\nu = \max\ |\lambda(J)|$ — наименьший и наибольший из модулей характеристических чисел матрицы [2] J. Тогда:

1. Если в некоторой окрестности неподвижной точки $y = 0$ все $g_m(y)$ имеют смысл [3], то в достаточно малой окрестности этой точки выполняются неравенства

$$K(\mu - \varepsilon)^m |y| \leqslant |g_m(y)| \leqslant L(\nu + \varepsilon)^m |y| \qquad (m = 1,\ 2, \ldots) \tag{2.2}$$

и для двух фиксированных точек $y' \neq 0$ и $y'' \neq 0$

$$|g_m(y')| \leqslant K_1(\mu + \varepsilon)^m |y'|, \qquad |g_m(y'')| \geqslant L_1(\nu - \varepsilon)^m |y''| \qquad (m = 1,\ 2, \ldots) \tag{2.3}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, а K, L, K_1, L_1 — не зависящие от m положительные константы.

2. Если $\nu < 1$, то в некоторой окрестности неподвижной точки $y = 0$ все $g_m(y)$ имеют смысл и потому выполняются неравенства (2.2) и (2.3).

Для доказательства п. п. 1 и 2 используем лемму.

Лемма. Если A есть $n \times n$-матрица и

$$|\lambda_i(A)| < k \ (i = 1, \ldots, n) \qquad \left(\text{или } |\lambda_i(A)| > k \quad (i = 1, \ldots, n)\right)$$

то существует подобная матрица $B = T^{-1}AT$, для которой «норма»

$$\|B\| = \max_{x \neq 0} \frac{|Bx|}{|x|} < k \qquad \left(\text{или } \|\Gamma\|^- = \min_{x \neq 0} \frac{|Bx|}{|x|} > k\right)$$

Если A — вещественная матрица, то и матрицу B можно выбрать вещественной.

Действительно, пусть $B = T^{-1}AT$ — треугольная матрица с характеристическими числами λ_i на главной диагонали и с малыми недиагональными элементами γ_{ij}, т. е. все $|\gamma_{ij}| < \eta$, где η сколь угодно мало. Тогда для произвольного столбца z

$$|Bz| \leqslant [\max|\lambda_i| + (n-1)\eta]\,|z| < (k - \eta)\,|z|$$

Отсюда

$$\|B\| < k$$

Если B — комплексная треугольная матрица, то ее можно заменить подобной вещественной матрицей $U^{-1}BU$, так как базис в пространстве, к которому относится

---

[1] Действительно, в (z, t)-пространстве малая область Q в плоскости $t = 0$, содержащая внутри себя точку $y = 0$, преобразуется при помощи интегральных кривых в область Q^* в плоскости $t = \tau$. Между плоскостями $t = 0$ и $t = \tau$ интегральные кривые пересекают поверхности разрыва $F_\alpha(z, t) = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, s)$, отображая область Q на лежащие на этих поверхностях области $Q_\alpha (\alpha = 1, \ldots, s)$. Тогда преобразование $Q \to Q^*$ распадается на преобразования $Q \to Q_1$, $Q_1 \to Q_2, \ldots$, $Q_s \to Q^*$. Каждое из этих преобразований дифференцируемо в точке, лежащей на кривой $z^\circ(t)$. Поэтому и преобразование $Q \to Q^*$, т. е. $y^* = g(y)$, дифференцируемо при $y = 0$. При этом существенно используется гладкость поверхности разрыва $F_\alpha(z, t) = 0$ в точке пересечения M_α интегральной кривой $z = z^\circ(t)$ с поверхностью разрыва $F_\alpha(z, t) = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$.

[2] Преобразование $y^* = \varphi(\tau, y)$ обратимо; поэтому якобиан $|J| \neq 0$ и, следовательно, $\mu > 0$.

[3] Это условие всегда выполняется, если неподвижная точка устойчива, т. е. при последовательных итерациях все $g_m(y)$ лежат в области определения функции $g(y)$.

матрица B, может быть выбран так, чтобы в нем наряду с комплексным вектором $e = (1/\sqrt{2})(p+iq)$ фигурировал и комплексно-сопряженный вектор $e' = (1/\sqrt{2})(p-iq)$. Тогда переход от комплексного базиса e, e' к вещественному $p, q, \ldots$ осуществляется унитарной матрицей U. При этом $\|U^{-1}BU\| = \|B\| < k$. Аналогично исследуется случай, когда все $|\lambda_i| > k$. Лемма доказана.

Пусть теперь все $g_m(y)$ имеют смысл. В соответствии с леммой (при $k = \nu + \varepsilon$) выберем $B = T^{-1}JT$ и сделаем преобразование переменных $y = Tz$. Тогда

$$z^* = f(z), \qquad f(z) = Bz + o\,(|z|)$$

и, следовательно, поскольку $\|B\| < k$, для малых $|z|$

$$|f(z)| \leqslant k|z| \quad \text{и} \quad |f_m(z)| \leqslant k^m\,|z| \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Но $g(y) = Tf\,(T^{-1}y)$ и вообще $g_m(y) = Tf_m(T^{-1}y)$. Поэтому

$$|g_m(y)| \leqslant \|T\|\,\|T^{-1}\|\,k^m|y|$$

т. е. имеют место правые неравенства (2.2) при $L = \|T\|\,\|T^{-1}\|$ и $k = \nu + \varepsilon$. В частности, если $\nu < 1$, то при малом $\varepsilon > 0$ и $k = \nu + \varepsilon < 1$. Тогда из $|f(z)| \leqslant k|z|$ следует, что все $f_m(z)$, а значит, все $g_m(y)$ имеют смысл в малой окрестности неподвижной точки.

Пусть теперь при $\nu > 0$

$$A = T^{-1}BT, \qquad B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

где все модули характеристических чисел у матрицы C равны ν, а у матрицы D меньше ν. Согласно лемме можно принять, что $\|C\|^- > \nu - \varepsilon$ и $\|D\| < \nu - 3\varepsilon$ при малом $\varepsilon > 0$. Тогда после преобразования переменных $y = Tz$ имеем $z^* = f(z)$, где

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = Bz + o\,(|z|), \qquad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$f_1(z) = Cu + o(|z|), \qquad f_2(z) = Dv + o(|z|)$$

Введем обозначения

$$\{z\} = |u| - |v|, \qquad \{f(z)\} = |f_1(z)| - |f_2(z)|$$

Тогда поскольку $|z| \geqslant |u| \geqslant \{z\}$:

$$\{f(z)\} - (\nu - 2\varepsilon)\,\{z\} \geqslant [\,|Cu| - (\nu - \varepsilon)\,|u|] - [\,|Dv| - (\nu - 3\varepsilon)\,|v|]$$

Отсюда на основании неравенств $\|D\|^- > \nu - \varepsilon$, $\|D\| < \nu - 3\varepsilon$ следует, что в малой окрестности неподвижной точки $z = 0$ правая часть последнего неравенства неотрицательна, поэтому

$$|f(z)| \geqslant \{f(z)\} \geqslant (\nu - 2\varepsilon)\,\{z\}$$

и вообще

$$|f_m(z)| \geqslant \{f_m(z)\} \geqslant (\nu - 2\varepsilon)^m\,\{z\} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Пусть теперь $z'' = u'' \neq 0$, $v'' = 0$. Тогда $|z''| = \{z''\} > 0$ и

$$|f_m(z'')| \geqslant (\nu - 2\varepsilon)^m\,|z''|, \qquad |f_m(z'')| = |T^{-1}\,g_m(y'')\,| \leqslant \|T^{-1}\|\,|g_m(y'')|, \qquad |y''| \leqslant \|T\|\,|z''|$$

Полагая $L_1 = (\|T\|\,\|T^{-1}\|)^{-1}$ и заменяя 2ε на ε, получим отсюда правое неравенство (2.3) Левые неравенства (2.2) и (2.3) получаются сразу, если правые неравенства (2.2) и (2.3) применить к обратному преобразованию

$$y = I^{-1}\,y^* + o\,(|y^*|)$$

Таким образом справедливость неравенств (2.2) и (2.3) доказана.

Неравенство (2.2) будет использовано далее в § 5. Здесь же заметим, что из неравенств (2.2) и (2.3) сразу вытекает известный критерий устойчивости неподвижной точки[1]: неподвижная точка $y = 0$ точечного преобразования $y^* = g(y)$ асимптотически устойчива, если $\nu < 1$, и неустойчива, если $\nu > 1$.

[1] Иное доказательство критерия при помощи функций Ляпунова содержится в [3].

§ 3. Уравнения в вариациях. Пусть $z(t,\mu)$ — произвольное однопараметрическое семейство решений системы (0.1), обращающееся в $z^\circ(t)$ при $\mu = 0$. Пусть функция $z(t,\mu)$ дифференцируема при $\mu = 0$ и $t \geqslant 0$. Обозначим через x первую вариацию[1] для решения $z^\circ(t)$ системы (0.1):

$$x = \delta z = \left(\frac{\partial z(t,\mu)}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} \delta\mu$$

Если в (0.1) заменить z на $z(t,\mu)$ и затем почленно продифференцировать по μ при $\mu = 0$, то получим линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=z^\circ(t)} x \tag{3.1}$$

которой удовлетворяет вариация $x(t)$ в каждом из интервалов

$$t_{\alpha-1} \leqslant t \leqslant t_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ldots;\ \ t_0 = 0)$$

Поскольку интегральная кривая $z^\circ(t)$ в моменты t_α имеет изломы, то вариация $x(t)$ при $t = t_\alpha$ имеет разрывы. Найдем величины этих разрывов. Обозначим через $t(\mu)$ момент времени, соответствующий пересечению кривой $z(t,\mu)$ с поверхностью $F_\alpha(z,t) = 0$, так что $t(0) = t_\alpha$. Тогда точка $z\,[t(\mu),\mu]$ при любом μ расположена на поверхности $F_\alpha = 0$. Дифференциал этой функции $z\,[t(\mu),\mu]$ при $\mu = 0$, вычисленный при подходе из области H_α или из области $H_{\alpha-1}$, равен[2]

$$\delta z = f^+{}_\alpha \delta t(\mu) + x^+{}_\alpha = f^-{}_\alpha \delta t(\mu) + x^-{}_\alpha$$

Отсюда

$$x^+{}_\alpha - x^-{}_\alpha = -\,\xi_\alpha \delta t\,(\mu) \qquad (\xi_\alpha = f^+{}_\alpha - f^-{}_\alpha) \tag{3.2}$$

С другой стороны, дифференцируя почленно (при $\mu = 0$) тождество $F_\alpha\{z\,[t(\mu),\ \mu],\ t(\mu)\} = 0$, получим

$$\left(\frac{dF_\alpha}{dt}\right)^{\pm} \delta t(\mu) + \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right)_{M_\alpha} x_\alpha^{\pm} = 0 \tag{3.3}$$

где $(dF_\alpha / dt)^{\pm}$ — полная производная от $F_\alpha\ [z^\circ(t),\ \ t]$ при $t = t_\alpha \pm 0$, а $(\partial F_\alpha / \partial z)$ — строка, составленная из $\partial F_\alpha / \partial z_i$ $(i = 1,\ldots,\ n)$. Определяя отсюда $\delta t(\mu)$ и подставляя в (3.2), мы окончательно найдем[3]

$$x^+{}_\alpha = S_\alpha x^-{}_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ldots) \tag{3.4}$$

где постоянные $n \times n$-матрицы S_α определяются равенствами

$$S_\alpha = E + \xi_\alpha h_\alpha^- = (E - \xi_\alpha h^+{}_\alpha)^{-1}, \qquad h_\alpha^{\pm} = \frac{(\partial F_\alpha / \partial z)_{m_\alpha}}{(dF_\alpha / dt)^{\pm}} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ldots) \tag{3.5}$$

Здесь E — единичная матрица.

Линейную систему (3.1) + (3.4) будем называть уравнениями в вариациях для решения $z^\circ(t)$ системы (1.1). В случае, когда $f(z,t)$ — непрерывная функция, условия разрывов (3.4) отсутствуют и остаются только обычные уравнения в вариациях, справедливые уже для всех $t \geqslant 0$.

---

[1] В дальнейшем нам удобно будет под вариацией δz понимать производную $(\partial z / \partial \mu)_{\mu=0}$, т. е. полагать $\delta\mu = 1$.

[2] Здесь $f^+{}_\alpha$, $x^+{}_\alpha$ (соответственно $f^-{}_\alpha$, $x^-{}_\alpha$) — значение функции $f(z,t)$ в точке интегральной кривой $z^\circ(t)$ и значение вариации $x_\alpha^{\pm}(t)$ при $t > t_\alpha + 0$ (соответственно при $t = t_\alpha - 0$). Области $H_{\alpha-1}$ и H_α примыкают к поверхности разрыва в окрестности точки M_α; в каждой из этих областей функция $f(z,t)$ непрерывна.

[3] Условия разрыва (3.4), (3.5) были получены в работах [1,2] иным путем.

§ 4. Распространение теоремы Ляпунова об устойчивости периодических решений на «разрывный» случай. Рассмотрим $n\times n$-матрицу $X(t)$, столбцами которой являются решения уравнений в вариациях (3.1) + + (3.4). Для определителя $|X(t)|$ имеет место формула (обобщение формулы Якоби для «непрерывного» случая)

$$|X(t)| = |X(0)|\,|S_1|\ldots|S_{\alpha-1}| \exp\int\limits_0^t \mathrm{Sp} P(t)dt \qquad \begin{pmatrix} t_{\alpha-1}\leqslant t\leqslant t_\alpha \\ \alpha=1,2,\ldots;t_0=0\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Здесь $P(t) = (\partial f / \partial z)_{z=z^\circ(t)}$ — матрица коэффициентов линейной системы дифференциальных уравнений (3.1)[1].

Так как согласно (3.5) каждая матрица S_α неособенная $|S_\alpha| \neq 0$, то $|X(t)|$ отличен от нуля при всех $t>0$, если он отличен от нуля при $t=0$. В этом случае матрица $X(t)$ является фундаментальной, т. е. ее столбцами являются n линейно независимых решений системы (3.1)+(3.4). Всякая другая фундаментальная матрица представляется в виде $X(t)C$, где C — произвольная неособенная постоянная $n\times n$-матрица. В силу периодичности системы (3.1) + (3.4) фундаментальной является не только матрица $X(t)$, но и матрица $X(t+\tau)$. Поэтому

$$X(t+\tau) = X(t)U \tag{4.2}$$

где U — неособенная постоянная матрица. Матрица U определяется системой (3.1) + (3.4) с точностью до подобия[2].

Как и в «непрерывном» случае, уравнение $|U-\lambda E| = 0$ называется характеристическим уравнением системы (0.1). Покажем теперь, что одной из матриц U является якобиевая матрица $J = (\partial\varphi(\tau,y) / \partial y)_{y=0}$. Действительно, столбцами матрицы $X(t) = (\partial\varphi(t,y) / \partial y)_{y=0}$ являются вариации[3], которые, как уже было показано, удовлетворяют системе (3.1) + + (3.4). Кроме того, $X(0) = (\partial\varphi(0,y) / \partial y)_{y=0} = \partial y / \partial y = E$. Следовательно, $|X(0)| = 1$ и $X(t)$ — фундаментальная матрица. Подставляя $t=0$ в тождество (4.2) и используя равенство $X(0) = E$, найдем

$$U = X(\tau) = \left(\frac{\partial\varphi(\tau,y)}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{y=0} = J \tag{4.3}$$

Таким образом, характеристические числа матрицы J совпадают с корнями характеристического уравнения системы (0.1). Поэтому критерий устойчивости неподвижной точки из § 3 можно непосредственно связать с уравнениями в вариациях (3.1) + (3.4). Это сразу приводит к следующей теореме, являющейся аналогом теоремы Ляпунова об устойчивости периодического движения в непрерывном случае.

Теорема 1. Если ν — наибольший из модулей корней характеристического уравнения $|U-\lambda E|=0$, то периодическое решение $z^\circ(t)$ системы (0.1) асимптотически устойчиво при $\nu<1$ и неустойчиво при $\nu>1$.

---

[1] Формула (4.1) получается, если обычную формулу Якоби применить к каждому из интервалов $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ и затем учесть соотношения (3.4).

[2] Если вместо $X(t)$ взять фундаментальную матрицу $X(t)C$, то матрица U заменится на $C^{-1}UC$.

[3] В k-м столбце матрицы $(\partial\varphi(t,y) / \partial y)_{y=0}$ стоит $(\partial\varphi(t,y) / \partial y_k)_{y=0}$ при нулевых значениях всех y_j.

§ 5. **Автономные системы.** Если система (0.1) — автономная, т. е. $f(z, t)$ не зависит явно от t $((\partial f/\partial t) \equiv 0)$ и уравнения поверхностей разрыва $F_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ не содержат явно времени t, то в этом случае система (0.1) имеет семейство периодических решений $z^\circ(t + \mu)$ и потому вектор-скорость

$$\dot{z}^\circ(t) = \left(\frac{\partial z^\circ(t+\mu)}{\partial \mu}\right)_{\mu=0}$$

удовлетворяет уравнениям в вариациях (3.1) + (3.4). Поскольку уравнения в вариациях имеют периодическое решение $\dot{z}^\circ(t)$, то, как и в «непрерывном» случае, характеристическое уравнение $|U - \lambda E| = 0$ имеет единицу своим корнем. Поэтому критерий асимптотической устойчивости к автономному случаю неприменим. Мы покажем, что установленную для «непрерывного» случая теорему Андронова и Витта [4] можно распространить и на «разрывной» случай, если под уравнениями в вариациях понимать комбинированную систему (3.1) + (3.4).

Рассмотрим n-мерное z-пространство. Без нарушения общности выводов принимаем[1] $z^\circ(0) = 0$, $\dot{z}_1^\circ(0) = 1$, $\dot{z}_2^\circ(0) = \ldots = \dot{z}_n^\circ(0) = 0$. Выбирая начальную точку y (с координатами $y_2, \ldots, y_n$) в гиперплоскости $z_1 = 0$, обозначим через $\varphi(t, y)$ соответствующее решение системы (0.1). Составим матрицу[2]

$$X(t) = \left\| \dot{z}^\circ(t), \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)_{y=0}, \ldots, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\right)_{y=0} \right\| \tag{5.1}$$

Она является нормированной фундаментальной матрицей для уравнений в вариациях, так как столбцы (5.1) удовлетворяют системе (3.1) + (3.4) и $X(0) = E$. Поэтому [см. (4.3)]

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & V \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

где $V = (\partial\Phi/\partial y)_{\substack{y=0\\ t=\tau}}$, а Φ есть $n-1$-мерный вектор-столбец с координатами $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Поскольку в фазовом z-пространстве интегральная кривая $z^\circ(t)$ пересекает гиперплоскость $z_1 = 0$ при $t = m\tau$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то и близкая интегральная кривая $z = \varphi(t, y)$ (при малом $|y|$) будет пересекать эту гиперплоскость при значениях $t = t_m(y)$, где $t_m(y)$ — корни уравнения $\varphi_1(t, y) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots; t_m(0) = m\tau)$

Рассмотрим точечное преобразование

$$y^* = k(y) \qquad (k(y) = \varphi(t_1(y), y)) \tag{5.3}$$

осуществляемое интегральными кривыми и преобразующее окрестность точки O в гиперплоскости $z_1 = 0$ в другую такую же окрестность. Кривая $z^\circ(t) = \varphi(t, 0)$ определяет неподвижную точку $y = 0$ этого преобразования. Преобразование (5.3) назовем [в отличие от преобразования (1.1)] усеченным точечным преобразованием.

---

[1] Направляем скорость $\dot{z}^\circ(0)$ по оси z_1 и надлежащим выбором масштаба делаем величину скорости равной единице; при этом в качестве гиперплоскости $z_1 = 0$ можно взять произвольную гиперплоскость, пересекающую в точке O цикл $z^\circ(t)$.

[2] В обозначении (5.1) справа указываются столбцы, составляющие матрицу.

Вычислим якобиеву матрицу усеченного точечного преобразования:

$$J' = \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\Phi\left[t_1(y),\ y\right]\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\Phi(\tau,\ y)}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial\Phi(t,\ 0)}{\partial t}\right)_{t=0}\left(\frac{\partial t_1(y)}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Так как $V = (\partial\Phi(\tau,\ y)/\partial y)_{y=0}$, а «усеченная» начальная скорость $(\partial\Phi(t,\ 0)/\partial t)_{t=0}$ по условию равна нулю, получаем $J' = V$.

Таким образом, в силу критерия устойчивости неподвижной точки и (5.2) имеет место следующее предложение.

Если, помимо корня, равного единице, остальные $n-1$ корней характеристического уравнения $|U - \lambda E| = 0$ все по модулю меньше единицы, то неподвижная точка усеченного точечного преобразования (5.3) асимптотически устойчива.

Имеет место[1] следующая теорема.

Теорема 2. Если, помимо одного корня, равного единице, все остальные $n-1$ корней характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то периодическое решение $z^\circ(t)$ системы устойчиво по Ляпунову и, более того, оно «асимптотически устойчиво с точностью до фазы», т. е. для каждого близкого к $z^\circ(t)$ решения $z(t)$ системы (0.1) ($|z(0) - z^\circ(0)| < \delta_0$, δ_0 — фиксированное число) существует α, непрерывно зависящее от $z(0)$, такое, что

$$\lim\left[z(t+\alpha) - z^\circ(t)\right] = 0 \quad \text{при } t\to\infty, \qquad \lim\alpha = 0 \quad \text{при } z(0)\to z^\circ(0) \tag{5.4}$$

Докажем сначала существование конечного предела:

$$\lim\left[t_m(y) - m\tau\right] = \beta(y) \quad \text{при } m\to\infty \tag{5.5}$$

Для этого заметим, что

$$t_m(y) - m\tau = \sum_{q-1}^{m}\{t_1\left[k_{q-1}(y)\right] - \tau\} \qquad (k_0(y)\equiv y) \tag{5.6}$$

Но в силу дифференцируемости (при $y=0$) функции $t_1(y)$ и неравенств (2.2)

$$|t_1\left[k_{q-1}(y)\right] - \tau| \leqslant M\,|k_{q-1}(y)| \leqslant N(\nu+\varepsilon)^{q-1}|y| \tag{5.7}$$

где $M>0$, $N>0$ — постоянные, ν — наибольший из модулей корней характеристического уравнения, отличных от единицы, а $\varepsilon>0$. Считая в (5.8) $\nu+\varepsilon<1$, заключаем из (5.6) и (5.7), что разность $t_m(y) - m\tau$ является m-й частной суммой равномерно сходящегося ряда и потому

$$\lim\left[t_m(y) - m\tau\right] = \beta(y) \quad \text{при } m\to\infty$$

где $\beta(y)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\beta(y)| \leqslant \Gamma|y| \qquad \left(\Gamma = \frac{N}{1-\nu-\varepsilon}\right) \tag{5.8}$$

Отсюда сразу следует асимптотическая устойчивость с точностью до фазы решения $z^\circ(t)$ при начальных отклонениях, взятых в гиперплоскости $z_1 = 0$.

Действительно, пусть $m\tau \leqslant t < (m+1)\tau$. В силу автономности системы (0.1) выбор начального момента отсчета времени произволен. Поэтому,

[1] Для случая, когда $f(z,\ t)$ — непрерывная функция, эта теорема в несколько видоизмененной формулировке была установлена Андроновым и Виттом в 1933 г. [4].

смещая время на t_m, имеем тождество

$$\varphi(t+\beta,\ y) = \varphi(\bar{t},\ \varphi(t_m,\ y)) = \varphi(\bar{t},\ k_m(y)) \tag{5.9}$$

где $\bar{t} = t + \beta - t_m$.

Но величина $\bar{t}$ в силу (5.5) изменяется в конечном интервале. Поэтому, используя непрерывную зависимость на конечном интервале решений системы (0.1) от начальных условий, имеем

$$\lim\,[\varphi(\bar{t},\ k_m(y)) - \varphi(\bar{t},\ 0)] = 0 \text{ при } m \to \infty \tag{5.10}$$

С другой стороны, в силу периодичности, $\varphi(\bar{t},\ 0) = \varphi(\bar{t} + m\tau,\ 0)$, а поэтому

$$\lim\,[\varphi(\bar{t},\ 0) - \varphi(t,\ 0)] = 0 \text{ при } m \to \infty \tag{5.11}$$

поскольку $\bar{t} + m\tau - t \to 0$ при $m \to \infty$.

Складывая почленно (5.10) и (5.11) и используя (5.9), получаем

$$\lim\,[\varphi(t+\beta,\ y) - \varphi(t,\ 0)] = 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{5.12}$$

так как из $t \to \infty$ следует и $m \to \infty$.

Пусть теперь начальная точка $z(0)$ не лежит в гиперплоскости $z_1 = 0$ и определяется равенством $z(0) = \varphi(\mu,\ y)$, где $|\mu| < \Delta$, $|y| < \Delta\ (\Delta > 0)$. Пусть при этих неравенствах (с достаточно малым Δ) якобиан

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial\mu},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right| \neq 0$$

При $\mu = 0$, $y = 0$ этот якобиан равен $|X(0)| = 1$ [см. (5.1)].

Тогда все точки $\varphi(\mu,\ y)$ при $|\mu| < \Delta_1$, $|y| < \Delta$ покрывают некоторую n-мерную окрестность точки O и $\varphi(\mu,\ y) \to 0$ лишь при $\mu \to 0$ и $y \to 0$. Если $z(0) = \varphi(\mu,\ y)$, то $z(t) = \varphi(t + \mu,\ y)$. Поэтому, заменяя в (5.12) $\varphi(t+\beta,\ y)$ на $z(t+\beta-\mu)$ и полагая $\alpha = \beta - \mu$, получим (5.4).

Из проведенных рассуждений видно, что предельный переход в равенстве (5.4) осуществляется равномерно относительно всех начальных значений $z(0)$, удовлетворяющих неравенству $|z(0) - z^\circ(0)| < \delta_0$. Отсюда легко следует, что решение $z^\circ(t)$ устойчиво по Ляпунову.

Теорема доказана.

Поступила 10 VI 1958

Московский физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодических решений системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Докл. АН СССР, т. CXVI, № 4, 1957.
2 Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, т. XXI, вып. 5, 1957.
3. Неймарк Ю. И., Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний I, Известия Высших учебных заведений, Радиофизика, № 1, 1958.
4. Андронов А. А., Витт А. А. Об устойчивости по Ляпунову. Собр. трудов Андронова. Изд. АН СССР, 1956.