Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

А. А. Богоявленский

(Москва)

1. Приведение задачи к решению двух дифференциальных уравнений, если центр тяжести тела лежит на одной из главных осей инерции. Задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при условии, что центр тяжести тела лежит на одной из главных осей инерции (например, $y_0 = z_0 = 0$), приводится [1] к дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = -\nu(\tau - h)^2 + 4Q\left[Q(\nu - \rho^2) + k\rho(\tau - h) - Qk^2\right] \tag{1.1}$$

$$A^2BC\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = -A^2\nu^2 + AJ\nu\rho^2 + A^2B_1\nu\tau + P'\rho^4 + AN\rho^2\tau - A^2BC\tau^2$$

$$(\rho^2 - A\tau)\frac{d\nu}{dt} + A\left[\rho(\tau - h) - 2Qk\right]\frac{d\rho}{dt} + A(\nu - \rho^2)\frac{d\tau}{dt} = 0$$

Здесь

$$\nu = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2, \qquad \rho = \frac{1}{R_0}(Ax_0p + By_0q + Cz_0r) = Ap$$

$$\tau = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{1.2}$$

$$B_1 = B + C, \qquad J = 2A - B - C, \qquad N = 2BC - AB - AC$$

$$P' = (A - B)(C - A), \quad Q = Mgx_0$$

k, h — постоянные интеграла момента количества движения относительно вертикальной оси и интеграла живой силы — определены формулами (1.3) и (2.6) в статье [1]; остальные обозначения общепринятые.

Переменные γ_1, γ_2, γ_3 определяются в статье [1] уравнениями (2.9)

$$H_0\gamma_1 = \sqrt{H}W_{\gamma_1} - H_kAp - H_\mu$$

$$H_0\gamma_2 = \sqrt{H}W_{\gamma_2} - H_kBq \tag{1.3}$$

$$H_0\gamma_3 = \sqrt{H}W_{\gamma_3} - H_kCr$$

где согласно (2.6), (2.7) и (2.8) из статьи [1]

$$H_0 = \nu - \rho^2 \neq 0, \qquad \sqrt{H} = \frac{1}{2Q}\frac{d\nu}{dt}$$

$$H_k = \rho\mu - k = \frac{1}{2Q}\left[\rho(\tau - h) - 2Qk\right], \quad H_\mu = k\rho - \nu\mu = -\frac{1}{2Q}\left[\nu(\tau - h) - 2Qk\rho\right]$$

$$W_{\gamma_1} = 0, \qquad W_{\gamma_2} = Cr, \qquad W_{\gamma_3} = -Bq$$

Уравнения (1.3) принимают вид

$$2Q\gamma_1 = \tau - h$$

$$2Q(\nu - \rho^2)\gamma_2 = Cr\frac{d\nu}{dt} - Bq\left[\rho(\tau - h) - 2Qk\right] \tag{1.4}$$

$$2Q(\nu - \rho^2)\gamma_3 = -Bq\frac{d\nu}{dt} - Cr\left[\rho(\tau - h) - 2Qk\right]$$

Исключая dt из уравнений (1.1), можно получить

$$\left(\frac{d\nu}{d\rho}\right)^2 = f(\nu, \rho, \tau, k, h) \tag{1.5}$$

$$(\rho^2 - A\tau)\frac{d\nu}{d\rho} + A(\nu - \rho^2)\frac{d\tau}{d\rho} + A[\rho(\tau - h) - 2Qk] = 0$$

Подставляя в уравнения (1.4) из первого уравнения Эйлера

$$\frac{d\nu}{dt} = (B - C)\, qr\, \frac{d\nu}{d\rho}$$

принимая во внимание соотношения

$$\nu - \rho^2 = -\frac{B}{A}(\rho^2 - A\tau) - C(B - C)\, r^2$$

$$\nu - \rho^2 = -\frac{C}{A}(\rho^2 - A\tau) + B(B - C)\, q^2$$

и второе уравнение (1.5), получим

$$\begin{aligned} 2Q\gamma_1 &= \tau - h \\ 2Q\gamma_2 &= q\left(-\frac{d\nu}{d\rho} + B\frac{d\tau}{d\rho}\right) \\ 2Q\gamma_3 &= r\left(-\frac{d\nu}{d\rho} + C\frac{d\tau}{d\rho}\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Систему дифференциальных уравнений (1.5), где f — известная функция, можно интегрировать частным образом так: задавая выражения ν, τ в виде полиномов от ρ и сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях ρ, определять эти полиномы. Величины p, q, r согласно формулам (1.2) можно также выразить в явном виде как функции ρ (при определенных условиях).

Задача сведется к одной квадратуре, находимой из второго дифференциального уравнения (1.1), в котором ν, τ заменены через ρ.

При этой квадратуре введется единственная произвольная постоянная t_0, просто приданная к t.

Будем считать, что выполняется одно из необходимых условий для частных случаев интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона $k = 0$, полученное в статье [1].

Из этого условия или из второго равенства (1.5) можно получить тогда выражение

$$2Q\gamma_1 = -\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\rho^2}{A} - \tau\right)\frac{d\nu}{d\rho} + (\nu - \rho^2)\frac{d\tau}{d\rho}\right] \tag{1.7}$$

Таким образом, γ_1, γ_2, γ_3 выразятся как функции ρ в явном виде посредством формул (1.6), (1.7).

2. Получение второго случая В. А. Стеклова. Для того чтобы упростить вычисления, воспользуемся некоторыми результатами статьи [1].

Предположим, что ν и τ можно представить в виде полиномов n степени от ρ с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \nu &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_n\rho^n \\ \tau &= b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + \ldots + b_n\rho^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

В § 4 статьи [1] найдены выражения начальных коэффициентов разложения функций $\nu(t)$, $\tau(t)$ в окрестности полюса второго порядка и $\rho(t)$

в окрестности полюса первого порядка

$$\begin{aligned} \nu &= t^{-2}(\nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 t^2 + \ldots) \\ \rho &= t^{-1}(\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \ldots) \\ \tau &= t^{-2}(\tau_0 + \tau_1 t + \tau_2 t^2 + \ldots) \end{aligned} \tag{2.2}$$

На основании этого разложения получено одно из необходимых условий для частных случаев интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона $k = 0$. Будем считать выполненным это условие и коэффициенты разложения имеющими значение

$$\begin{gathered} \nu_0 = -A^2, \quad \rho_0 = iA\sqrt{\frac{(A-2B)(A-2C)}{(A-B)(A-C)}} \qquad \tau_0 = -2A \\ \nu_1 = \rho_1 = \tau_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставляя ряды (2.2) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, при значениях (2.3) получим

$$a_2 = \frac{(A-B)(A-C)}{(A-2B)(A-2C)}, \quad a_0 = \nu_2 - 2iA\sqrt{\frac{(A-B)(A-C)}{(A-2B)(A-2C)}}\rho_2,$$

$$b_2 = \frac{2(A-B)(A-C)}{A(A-2B)(A-2C)}, \quad b_0 = \tau_2 - 4i\sqrt{\frac{(A-B)(A-C)}{(A-2B)(A-2C)}}\rho_2$$

$$a_1 = b_1 = 0, \quad a_i = b_i = 0 \quad (i = 3, 4, 5, \ldots)$$

Таким образом, формулы (2.1) имеют вид

$$\nu = a_0 + \frac{(A-B)(A-C)}{(A-2B)(A-2C)}\rho^2, \quad \tau = b_0 + \frac{2(A-B)(A-C)}{A(A-2B)(A-2C)}\rho^2 \tag{2.4}$$

Подставляя выражения (2.4) в (1.6) и (1.7), получим

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \frac{(A-B)(A-C)}{QA(A-2B)(A-2C)}[B(A-2B)q^2 + C(A-2C)r^2] \\ \gamma_2 = \frac{(A-B)(A-C)}{Q(2C-A)}pq, \quad \gamma_3 = \frac{(A-B)(A-C)}{Q(2B-A)}pr \end{gathered} \tag{2.5}$$

Если подставить полученные полиномы для ν, τ по формулам (2.4) в первое и третье выражения (1.2) с учетом того, что $\rho = Ap$, и полученные два равенства разрешить относительно p^2, q^2, то получим выражения p^2, q^2 через r^2, которые были найдены В. А. Стекловым.

Мы получили второй случай В. А. Стеклова [2]. При этом, кроме В. А. Стеклова, интеграцией уравнений и выяснением различных возможностей движения занимались Филд [3], Горлисс [4], Фаббри [5,6,7], П. А. Кузьмин [8,9].

3. Получение второго случая Д. Н. Горячева. В уравнениях (1.1) сделаем преобразование независимой переменной

$$t = \xi^2 \tag{3.1}$$

Тогда система (1.1) запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} \left(\frac{d\nu}{d\xi}\right) = 4\xi^2\{-\nu(\tau-h)^2 + 4Q[Q(\nu-\rho^2) + k\rho(\tau-h) - Qk^2]\} \\ A^2BC\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2 = 4\xi^2[-A^2\nu^2 + AJ\nu\rho^2 + A^2B_1\nu\tau + P'\rho^4 + AN\rho^2\tau - A^2BC\tau^2] \\ (\rho^2 - A\tau)\frac{d\nu}{d\xi} + A[\rho(\tau-h) - 2Qk]\frac{d\rho}{d\xi} + A(\nu-\rho^2)\frac{d\tau}{d\xi} = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Эта система уравнений допускает другое, отличное от (2.2) полярное разложение функций $\nu(\xi)$, $\rho(\xi)$, $\tau(\xi)$, а именно

$$\begin{aligned}
\nu &= \xi^{-4}(u_0 + u_1\xi + u_2\xi^2 + \ldots) && (u_0 \neq 0)\\
\rho &= \xi^{-1}(v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \ldots) && (v_0 \neq 0)\\
\tau &= \xi^{-4}(w_0 + w_1\xi + w_2\xi^2 + \ldots) && (w_0 \neq 0)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя указанные ряды в систему (3.2), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ и считая выполненным условие $k = 0$, найдем последовательно следующие системы уравнений для определения коэффициентов рядов (3.3):

1. $$4u_0 + w_0^2 = 0, \qquad u_0(u_0 - B_1 w_0) + BCw_0^2 = 0 \tag{3.4}$$

Третье уравнение удовлетворяется тождественно.

2. $$u_1 + w_1 w_0 = 0, \qquad u_1 Y_0 - w_1 \Gamma_0 = 0, \qquad \Omega_1 = 0$$

3. $$8w_2 u_0 w_0 + 9u_1^2 + 4w_1(\Omega_1 + 3u_1 w_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
4Au_2Y_0 - 2Aw_2(2B_1u_0 - BCw_0) + 4Au_1(u_1 - B_1w_1) +\\
+ ABCw_1^2 - v_0^2(4\Sigma_0 - ABC) = 0
\end{aligned}$$

$$2A\Omega_2 + (-4u_0 + 3Aw_0)v_0^2 = 0$$

4. $$-2u_3u_0 + 2w_3u_0w_0 + u_2(3u_1 + 2w_1w_0) + 2w_2\Xi_1 + u_1w_1^2 = 0$$

$$Au_3Y_0 - Aw_3\Gamma_0 + Au_2Y_1 - Aw_2\Gamma_1 - Ju_1v_0^2 - 2v_1\Sigma_0v_0 - Nw_1v_0^2 = 0$$

$$3A\Omega_3 - Au_2w_1 + 3Aw_2u_1 - u_1(3v_0^2 + Aw_0) + v_1(-8u_0 + 7Aw_0)v_0 + 2Aw_1v_0^2 = 0$$

5. $$\begin{aligned}
2u_4w_0^2 + 4(w_4 - h)u_0w_0 + u_3(3u_1 + 4w_1w_0) + 4w_3\Xi_1 + 2u_2\Sigma +\\
+ 2w_2(w_2u_0 + 2u_1w_1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2A^2u_4Y_0 - 2A^2w_4\Gamma_0 + 2A^2u_3Y_1 - 2A^2w_3\Gamma_1 + 2A^2u_2Y_2 -\\
- 2AJu_2v_0^2 - Av_2(4v_0\Sigma_0 + ABCv_0) + 2Aw_2(ABCw_2 - Nv_0^2) -\\
- 4AJu_1v_1v_0 - 2Av_1^2\Sigma_0 - 4ANv_1w_1v_0 - 2P'v_0^4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4A\Omega_4 - 2Au_3w_1 + 2Aw_3u_1 - 2u_2v_0^2 - 8v_2(u_0 - Aw_0)v_0 +\\
+ Aw_2v_0^2 - 6u_1v_1v_0 - 4v_1^2(u_0 - Aw_0) + 5Av_1w_1v_0 = 0
\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}
-6u_5u_0 + 2w_5u_0w_0 + 2(u_4w_1 + w_4u_1)w_0 + 2(w_4 - h)w_1u_0 +\\
+ u_3\Sigma + 2w_3\Xi_2 + 2u_2w_2w_1 + w_2^2u_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^2u_5Y_0 - A^2w_5\Gamma_0 + A^2u_4Y_1 - A^2w_4\Gamma_1 + Au_3(2Au_2 - AB_1w_2 - Jv_0^2) -\\
- Av_3(2\Sigma_0 + ABC)v_0 - Aw_3(AB_1u_2 - 2ABCw_2 + Nv_0^2) - 2AJu_2v_1v_0 -\\
- 2Av_2(\Sigma_1v_0 + v_1\Sigma_0) - 2ANw_2v_1v_0 - Av_1^2\Sigma_1 - 4P'v_1v_0^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5A\Omega_5 - 3A(u_4w_1 - w_4u_1) - u_3(v_0^2 + Aw_2) - v_3(8u_0 - 9Aw_0)v_0 -\\
- Aw_3u_2 - 4u_2v_1v_0 - v_2[6u_1v_0 + v_1(8u_0 - 9Aw_0) - 6Aw_1v_0] +\\
+ 3Aw_2v_1v_0 - 3v_1^2(u_1 - Aw_1) = 0
\end{aligned}$$

. . . .

Здесь положено для краткости

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = B_1u_0 - 2BCw_0, && \Gamma_1 = B_1u_1 - 2BCw_1\\
&\Xi_1 = u_1w_0 + w_1u_0, && \Xi_2 = u_2w_0 + w_2u_0 + u_1w_1\\
&\Sigma = u_2 + 2w_2w_0 + w_1^2, && \Sigma_0 = Ju_0 + Nw_0, \quad \Sigma_1 = Ju_1 + Nw_1\\
&Y_0 = 2u_0 - B_1w_0, && Y_1 = 2u_1 - B_1w_1, \quad Y_2 = u_2 - B_1w_2\\
&\Omega_s = -u_sw_0 + w_su_0 && (s = 1, \ldots, 5)
\end{aligned}$$

Решением первой системы (3.4) служат значения

$$u_0 = -4B^2, \qquad w_0 = -4B \quad \text{или} \quad u_0 = -4C^2, \qquad w_0 = -4C$$

Для определенности возьмем первые значения u_0, w_0. Вторая система (3.4) дает решение $u_1 = w_1 = 0$. Третья система (3.4) принимает вид

$$w_2 = 0$$
$$16A(B-C)u_2 - (16AB - 15AC - 16B^2 + 16BC)v_0^2 = 0$$
$$2Au_2 - (3A - 4B)v_0^2 = 0$$

Если исключить условие $A = C = \frac{4}{3}B$, которое было получено ранее (статья [1], § 5), то для того, чтобы $v_0 \neq 0$, должен равняться нулю пределитель системы двух последних уравнений. Это дает необходимое условие, которое может быть записано в одной из следующих форм:

$$8AB - 9AC - 16B(B-C) = 0, \quad AC = 8(A-2B)(B-C),$$
$$C = \frac{8B(A-2B)}{9A-16B} \tag{3.5}$$

откуда следует, что $A \neq 2B$, $B \neq C$. При этом

$$u_2 = \frac{3A-4B}{2A} v_0^2 \tag{3.6}$$

Четвертая система (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} u_3 + 4Bw_3 &= 0 \\ Au_3 - ABw_3 - 2(A-B)v_1v_0 &= 0 \\ 3A(u_3 - Bw_3) - (7A - 8B)v_1v_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

В силу условий (3.5) решением системы будет

$$u_3 = w_3 = v_1 = 0$$

Пятая система (3.4) может быть приведена, в силу ранее полученных соотношений, к виду

$$16B^2(u_4 + 2Bw_4 - 2Bh) + \frac{(3A-4B)^2}{4A^2} v_0^4 = 0 \tag{3.8}$$
$$8A^2B(u_4 - Bw_4 - v_2v_0) - \frac{1}{2(B-C)}(A^2 - 6AB + 2AC + 8B^2 - 4BC)v_0^4 = 0$$
$$8B[A(u_4 - Bw_4) - 2(A-B)v_2v_0] - \frac{(3A-4B)}{2A} v_0^4 = 0$$

Два последних уравнения в силу третьего равенства (3.5) дают

$$\frac{v_2}{v_0^3} = \frac{9A^3 - 57A^2B + 108AB^2 - 64B^3}{16AB(A-2B)(9A-16B)(B-C)}$$

Явные выражения u_4, w_4 не выписываем.

Шестая система (3.4) также может быть приведена к виду

$$3u_5 + 4Bw_5 = 0 \tag{3.9}$$
$$A(u_5 - Bw_5) - 2Bv_3v_0 = 0$$
$$5A(u_5 - Bw_5) - (9A - 8B)v_3v_0 = 0$$

Определитель системы относительно величин u_5, w_5, v_3 в силу (3.5) не равен нулю, следовательно, должно быть $u_5 = w_5 = v_3 = 0$ и т. д.

Предположим, как и раньше, что

$$\begin{aligned} \nu &= m_0 + m_1\rho + m_2\rho^2 + \ldots + m_n\rho^n \\ \tau &= n_0 + n_1\rho + n_2\rho^2 + \ldots + n_n\rho^n \end{aligned} \tag{3.10}$$

Подставляя (3.3) при найденных значениях u_i, v_i, w_i в левую и правую части (3.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получаем систему алгебраических уравнений для определения значений m_i, n_i. Подставляя в эти уравнения найденные значения u_0, w_0, u_2, v_2, находим

$$
\begin{gathered}
Bn_4 - m_4 = 0, \quad Cn_4 - m_4 = \frac{4B(B-C)}{v_0^4} \\
Bn_2 - m_2 = -\frac{u_2}{v_0^2} = \frac{4B-3A}{2A} \\
Cn_2 - m_2 = -\frac{16B(B-C)v_2}{v_0^3} - \frac{u_2}{v_0^2} = -\frac{(3A-4B)(3A-8B)(5A-8B)}{2A(A-2B)(9A-16B)} \\
m_1 = m_3 = n_1 = n_3 = 0, \qquad m_s = n_s = 0 \quad (s = 5, 6, 7, \ldots)
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

Подставляя в формулы (1.6) значения ν, τ из (3.10), где m_i, n_i выражены через формулы (3.11), можно определить

$$
Q\gamma_2 = \frac{4B-3A}{2} pq
$$

$$
Q\gamma_3 = \left[-\frac{(3A-4B)(3A-8B)(5A-8B)}{2(A-2B)(9A-16B)} + \frac{8AB(B-C)}{v_0^4} p^2 \right] rp
$$

В дальнейших выкладках нет необходимости, чтобы убедиться в том, что получили второй случай Д. Н. Горячева [10].

4. Другие способы получения исходных условий второго случая В. А. Стеклова и второго случая Д. Н. Горячева. Исходные условия второго случая В. А. Стеклова и второго случая Д. Н. Горячева могут быть получены и были после получены другими способами, отличными от тех, которыми пользовались авторы. При этом были исследованы возможности различных дополнений как самих условий, так и интегрирования получаемых уравнений.

Филд в первой своей статье [3], обозначая главные моменты инерции через J_1, J_2, J_3, находит частное решение при условиях

$$
\begin{gathered}
f = g = 0, \qquad k = 0 \\
J_3^2 = 2J_1J_2, \qquad T = -\frac{2MghJ_3(J_1 + J_2 - J_3)}{(J_1 - J_3)(J_2 - J_3)}
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

при добавочном ограничении $J_1 > 2J_2$ или $J_2 > 2J_1$, где h, f, g — координаты центра тяжести, T — постоянная интеграла живой силы.

Горлисс в первой своей статье [4], пользуясь теми же обозначениями, как и Филд, находит исходные условия для частного решения в виде

$$
\begin{gathered}
f = g = 0, \qquad k = 0 \\
E = \frac{Mgh(2J_1J_2 - 2J_1J_3 - 2J_2J_3 + J_3^2)}{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}, \quad 2J_2 < J_3 < J_1
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Здесь E — постоянная интеграла живой силы.

Если в условиях (4.2) положим $J_3^2 = 2J_1J_2$, то получим условия (4.1) при первом добавочном ограничении $J_1 > 2J_2$.

Чтобы иметь возможность сличить условия, введем подстановку S. Для этого сделаем циклическую перестановку переменных и перейдем к принятым нами обозначениям, которые расположим в первой строке. Во второй строке поставим обозначения В. А. Стеклова, в третьей —

Филда, в четвертой — Горлисса, в пятой — Р. Фаббри, в шестой — П. А. Кузьмина.

$$S\begin{cases}(A, & B, & C, & x_0, & y_0, & z_0, & h, & k, & p, & q, & r, & \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3)\\ (A, & B, & C, & \alpha, & 0, & 0, & —, & —, & p, & q, & r, & \xi, & \eta, & \zeta)\\ (J_3, & J_1, & J_2, & h, & 0, & 0, & T, & k, & \omega_3, & \omega_1, & \omega_2, & -\gamma_3, & -\gamma_1, & -\gamma_2)\\ (J_3, & J_1, & J_2, & h, & f, & g, & E, & k, & \omega_3, & \omega_1, & \omega_2, & -\gamma_3, & -\gamma_1, & -\gamma_2)\\ (C, & A, & B, & z_0, & 0, & 0, & m_1, & K_\xi & r, & p, & q, & \gamma_3, & \gamma_1, & \gamma_2)\\ (A, & B, & C, & x_0, & 0, & 0, & —, & —, & p, & q, & r, & -\gamma_1, & -\gamma_2, & -\gamma_3)\end{cases}$$

В этой подстановке последние три столбца обозначают направляющие косинусы силы тяжести в подвижной системе координат,

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \quad m_1 = 2G\omega_0^2$$

Применяя подстановку S, условия (4.2) можно записать в виде

$$2C < A < B, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad x_0 \neq 0, \quad k = 0$$

$$h = \frac{Q(A^2 - 2AB - 2AC + 2BC)}{(A-B)(A-C)} \tag{4.3}$$

Постоянная интеграла площадей во втором случае В. А. Стеклова $k = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3$ согласно формулам (2.5) имеет величину, равную нулю, так как она пропорциональна интегралу, который получил В. А. Стеклов в виде

$$Ap^2 + (2B - A)q^2 + (2C - A)r^2 = 0 \tag{4.4}$$

В самом деле, из формул, найденных им

$$\begin{aligned} Q\gamma_2 &= \frac{(B-A)(C-A)}{2C-A}pq \\ Q\gamma_3 &= \frac{(B-A)(C-A)}{2B-A}pr \\ Q\gamma_1 &= \frac{(B-A)(C-A)}{(2B-A)(2C-A)}\left[Cp^2 - \frac{(2B-A)(B-C)}{A}q^2\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

или

$$Q\gamma_1 = \frac{(B-A)(C-A)}{(2B-A)(2C-A)}\left[Bp^2 + \frac{(2C-A)(B-C)}{A}r^2\right]$$

получается

$$k = \frac{(A-B)(A-C)Cp}{Q(2B-A)(2C-A)}[Ap^2 + (2B-A)q^2 + (2C-A)r^2]$$

что в силу (4.4) дает $k = 0$.

Выражение γ_1, полученное В. А. Стекловым в силу (4.4), может быть представлено в виде

$$Q\gamma_1 = -\frac{(B-A)(C-A)}{A(2B-A)(2C-A)}[B(2B-A)q^2 + C(2C-A)r^2] \tag{4.6}$$

совпадающим со значением γ_1 из (2.5). В. А. Стекловым был получен еще один интеграл в виде

$$A^2p^2 + B(2B-A)q^2 + C(2C-A)r^2 = K_1 \tag{4.7}$$

где постоянная K_1 определяется из соотношения

$$\frac{K_1^2(B-A)^2(C-A)^2}{Q^2A^2(2B-A)^2(2C-A)^2} = 1$$

Постоянная интеграла живой силы $h = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Q\gamma_1$ согласно (4.4), (4.6) и (4.7) имеет значение

$$h = \varepsilon_0 \frac{Q(A^2 - 2AB - 2AC + 2BC)}{(B-A)(C-A)} \qquad (\varepsilon_0 = \pm 1) \tag{4.8}$$

Сравнивая условие (4.8) и ограничения, наложенные на значения A, B, C, y_0, z_0, k, с условиями (4.3), видим их совпадение (при $\varepsilon_0 = +1$).

Горлисс во второй своей статье [4], обобщая свои предыдущие случаи (включая случай Филда) и случай Н. Ковалевского, находит исходные условия для другого частого решения в виде

$$\begin{gathered} f = g = 0, \qquad k = 0, \qquad J_2 = \frac{J_1(16J_1 - 8J_3)}{16J_1 - 9J_3} \\ E = \frac{4Mgh(J_3 - 2J_1)(64J_1^2 - 56J_1J_3 - 9J_3^2)}{(4J_1 - 3J_3)(64J_1^2 - 64J_1J_3 + 15J_3^2)} \end{gathered} \tag{4.9}$$

Применяя подстановку S, условия (4.9) можно записать в виде

$$\begin{gathered} C = \frac{8B(A-2B)}{9A-16B}, \qquad y_0 = z_0 = 0, \qquad k = 0 \\ h = \frac{4Q(A-2B)(9A^2 - 56AB + 64B^2)}{(3A-4B)(15A^2 - 64AB + 64B^2)} \end{gathered} \tag{4.10}$$

Постоянная интеграла площадей $k = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3$ во втором случае Д. Н. Горячева согласно формулам, полученным им для γ_1, γ_2, γ_3, имеет величину, равную нулю (как коэффициент при p в нулевой степени).

В силу полученных Д. Н. Горячевым [10] соотношений

$$\begin{gathered} \frac{B-C}{A} r^2 - \frac{A-B+\chi}{C} p^2 = L \\ Q\gamma_1 = 4l_2 \frac{A-B+\chi}{C} p^4 + \left(\chi + 3l_2L + 2\lambda \frac{A-B+\chi}{C}\right) p^2 + L\lambda \\ l_2\left(1 + \frac{\chi}{B} - 4\frac{A-B+\chi}{C}\right)p^4 + \left(\lambda \frac{C-2A+2B-2\chi}{C} - \chi \frac{B+C-A-\lambda}{B} - \right. \\ \left. - 3l_2L\right)p^2 - \chi \frac{B-C}{A} q^2 - L\lambda = 0 \end{gathered} \tag{4.11}$$

где

$$\begin{gathered} L = \frac{QBC}{(3A-4B)(2B-C)(2B-3C)}, \qquad \chi = \frac{4B-3A}{2} \\ \lambda = \frac{(3A-4B)(2B-C)(2B-3C)}{BC} \end{gathered} \tag{4.12}$$

постоянная интеграла живой силы выражается в виде полинома 4-й степени от p. Приравнивая в этом тождестве нулю коэффициент при p в нулевой степени, получаем

$$h = \left[-\frac{AB\lambda}{(B-C)\chi} + \frac{AC}{B-C} - 2\lambda\right] L$$

Постоянная h в силу третьего соотношения (3.5) и (4.12) принимает значение, указанное в (4.10).

Ограничения на A, B, C, y_0, z_0, h, полученные Горлиссом, те же, что и во втором случае Д. Н. Горячева.

5. Получение случая Н. Ковалевского. Систему уравнений (1.1) преобразованием независимой переменной $t = \eta^{3/2}$ можно привести к виду

$$\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2 = \frac{9\eta}{4}\{-\nu(\tau-h)^2 + 4Q[Q(\nu-\rho^2) + k\rho(\tau-h) - Qk^2]\}$$
$$A^2BC\left(\frac{d\rho}{d\eta}\right)^2 = \frac{9\eta}{4}(-A^2\nu^2 + AJ\nu\rho^2 + A^2B_1\nu\tau + P'\rho^4 + AN\rho^2\tau - A^2BC\tau^2) \qquad (5.1)$$
$$(\rho^2 - A\tau)\frac{d\nu}{d\eta} + A[\rho(\tau-h) - 2Qk]\frac{d\rho}{d\eta} + A(\nu-\rho^2)\frac{d\tau}{d\eta} = 0$$

Этой системе формально удовлетворяют ряды вида

$$\nu = \eta^{-3}(e_0 + e_1\eta + e_2\eta^2 + \ldots) \qquad (e_0 \neq 0)$$
$$\rho = \eta^{-1}(s_0 + s_1\eta + s_2\eta^2 + \ldots) \qquad (s_0 \neq 0) \qquad (5.2)$$
$$\tau = \eta^{-3}(\varkappa_0 + \varkappa_1\eta + \varkappa_2\eta^2 + \ldots) \qquad (\varkappa_0 \neq 0)$$

Подставляя ряды (5.2) в уравнения (5.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η левых и правых частей, считая выполненным одно из необходимых условий существования однозначных решений $k = 0$, полученное в работе [1], находим следующие системы для определения коэффициентов рядов (5.2):

1. $4e_0 + \varkappa_0^2 = 0, \qquad e_0^2 - B_1e_0\varkappa_0 + BC\varkappa_0^2 = 0$

Третье уравнение удовлетворяется тождественно.

2. $e_1(16e_0 + 3\varkappa_0^2) + 6\varkappa_1e_0\varkappa_0 = 0$

$$9Ae_1(2e_0 - B_1\varkappa_0) - 9A\varkappa_1(B_1e_0 - 2BC\varkappa_0) + s_0^2[4ABC - 9(Je_0 + N\varkappa_0)] = 0$$
$$A(e_1\varkappa_0 - \varkappa_1e_0) + 3e_0s_0^2 - 2As_0^2\varkappa_0 = 0$$

3. $3e_2(8e_0 + 3\varkappa_0^2) + 18\varkappa_2e_0\varkappa_0 + 16e_1^2 + 18e_1\varkappa_1\varkappa_0 + 9\varkappa_1^2e_0 = 0$

$$A^2e_2(2e_0 - B_1\varkappa_0) - A^2\varkappa_2(B_1e_0 - 2BC\varkappa_0) + A^2e_1^2 - Ae_1(AB_1\varkappa_1 + Js_0^2) -$$
$$- 2As_1(Je_0 + N\varkappa_0)s_0 + A^2BC\varkappa_1^2 - AN\varkappa_1s_0^2 - P's_0^4 = 0$$
$$2A(e_2\varkappa_0 + \varkappa_2e_0) - 2e_1s_0^2 - s_1(6e_0 - 5A\varkappa_0)s_0 + A\varkappa_1s_0^2 = 0 \qquad (5.3)$$

. . . .

Решением первой системы (5.3) служат значения

$$e_0 = -4B^2, \quad \varkappa_0 = -4B \quad \text{или} \quad e_0 = -4C^2, \quad \varkappa_0 = -4C$$

Для определенности возьмем первые значения.

Вторая система (5.3) принимает вид

$$e_1 - 6B\varkappa_1 = 0$$
$$9A(B-C)(e_1 - B\varkappa_1) - (9AB - 8AC - 9B^2 + 9BC)s_0^2 = 0$$
$$A(e_1 - B\varkappa_1) - (2A - 3B)s_0^2 = 0$$

Для того чтобы $s_0 \neq 0$, должен равняться нулю определитель системы относительно e_1, $\varkappa_1$, s_0, что дает

$$A = \frac{18B(B-C)}{9B - 10C} \qquad (5.4)$$

Тогда значения e_1 и $\varkappa_1$ будут

$$e_1 = \frac{6(2A - 3B)s_0^2}{5A}, \qquad \varkappa_1 = \frac{(2A - 3B)s_0^2}{5AB}$$

Дальнейшее вычисление коэффициентов можно не делать. Предположим, как и раньше

$$\nu = \chi_0 + \chi_1\rho + \chi_2\rho^2 + \ldots + \chi_n\rho^n, \quad \tau = \psi_0 + \psi_1\rho + \psi_2\rho^2 + \ldots + \psi_n\rho^n \qquad (5.5)$$

Подставляя ряды (5.2) в (5.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η левых и правых частей, получаем систему алгебраических уравнений для определения χ_i, ψ_i.

Положив в этих уравнениях $e_0 = -4B^2$, $\varkappa_0 = -4B$, получим

$$\begin{gathered}
B\psi_3 - \chi_3 = 0, \qquad C\psi_3 - \chi_3 = \frac{4B(B-C)}{s_0^2} \\
B\psi_2 - \chi_2 = \frac{3B-2A}{A}, \qquad C\psi_2 - \chi_2 = \frac{(2A-3B)(C-6B)}{5AB} - \frac{12B(B-C)s_1}{s_0^3} \\
B\psi_1 - \chi_1 = \frac{B\varkappa_2 - e_2}{s_0} + \frac{2(2A-3B)s_1}{A} \\
C\psi_1 - \chi_1 = \frac{C\varkappa_2 - e_2}{s_0} - 2(C\psi_2 - \chi_2)s_1 - 3(C\psi_3 - \chi_3)(s_2 s_0 + s_1^2) \\
\psi_i = \chi_i = 0 \qquad (i = 4, 5, 6, \ldots)
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Подставляя выражения ν, τ из (5.5) в формулы (1.6), получим

$$\begin{aligned}
2Q\gamma_2 &= q\,[B\psi_1 - \chi_1 + 2(B\psi_2 - \chi_2)\rho + 3(B\psi_3 - \chi_3)\rho^2] \\
2Q\gamma_3 &= r\,[C\psi_1 - \chi_1 + 2(C\psi_2 - \chi_2)\rho + 3(C\psi_3 - \chi_3)\rho^2]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Н. Ковалевский [11] нашел для своего случая условие на A, B, C, которое выражается равенством (5.4), и выражения γ_2 и γ_3 в виде

$$\begin{aligned}
2Q\gamma_2 &= -C\left[\beta_1 + 2\left(\beta_2 - \frac{A-B}{C}\right)p\right]q \\
2Q\gamma_3 &= B\left[\alpha_1'\beta_1 + 2\left(\alpha_2 - \frac{C-A}{B}\right)p + 3\alpha_3'\beta_1^{-1}p^2\right]r
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Сравним, для примера, коэффициенты при pq в выражении γ_2 из формул Н. Ковалевского (5.8) и из формул (5.7).

Из формулы (5.8) этот коэффициент в силу (5.4) равен

$$\frac{B(9B-6C)}{Q(9B-10C)} \tag{5.9}$$

Тот же коэффициент из формул (5.7) в силу (5.4) и (5.6) равен тому же выражению с обратным знаком. Различие в знаке объясняется тем, что уравнения Эйлера в сравниваемых случаях различаются знаком у множителя Q. Таким образом, формулы (5.4) и (5.7) характеризуют собой случай Н. Ковалевского [11].

6. Получение второго случая Чаплыгина. Рассмотрим преобразование переменных ρ и t для системы (1.1)

$$\rho = z^{3/2}, \qquad t = \zeta^{3/2}$$

и пусть будет выполнено условие $k = 0$.

После преобразования система (1.1) переходит в следующую:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{d\nu}{d\zeta}\right)^2 = \frac{9\zeta}{4}\,[-\nu(\tau - h)^2 + 4Q^2(\nu - z^3)] \\
A^2BCz\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 = \zeta\,[-A^2\nu^2 + AJ\nu z^3 + A^2B_1\nu\tau + P'z^6 + ANz^3\tau - A^2BC\tau^2] \\
(z^3 - A\tau)\frac{d\nu}{d\zeta} + \frac{3}{2}A(\tau - h)z^2\frac{dz}{d\zeta} + A(\nu - z^3)\frac{d\tau}{d\zeta} = 0
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Этой системе формально удовлетворяют ряды вида

$$\begin{aligned}
\nu &= \zeta^{-3}(g_0 + g_1\zeta + g_2\zeta^2 + \ldots) \qquad (g_0 \neq 0) \\
z &= \zeta^{-1}(h_0 + h_1\zeta + h_2\zeta^2 + \ldots) \qquad (h_0 \neq 0) \\
\tau &= \zeta^{-3}(l_0 + l_1\zeta + l_2\zeta^2 + \ldots) \qquad (l_0 \neq 0)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Подставляя ряды (6.2) в уравнения (6.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ левых и правых частей, находим следующие системы для определения коэффициентов рядов (6.2):

1.
$$4g_0 + l_0^2 = 0$$
$$A^2g_0^2 - Ag_0(Jh_0^3 + AB_1l_0) - P'h_0^6 - Ah_0^3(Nl_0 - ABC) + A^2BCl_0^2 = 0$$
$$2g_0 - Al_0 = 0$$

2.
$$g_1l_0^2 - 6l_1g_0l_0 = 0$$
$$Ag_1(2Ag_0 - Jh_0^3 - AB_1l_0) - h_1(3AJg_0 + 6P'h_0^3 + 3ANl_0 - A^2BC)h_0^2 - \\ - Al_1(AB_1g_0 + Nh_0^3 - 2ABCl_0) = 0$$
$$2g_1(2h_0^3 + Al_0) + 6h_1(3g_0 - 2Al_0)h_0^2 - Al_1(2g_0 + h_0^3) = 0$$

3.
$$3g_2l_0^2 + 18l_2g_0l_0 + 16g_1^2 + 18g_1l_1l_0 + 9l_1^2g_0 = 0$$
$$Ag_2(2Ag_0 - Jh_0^3 - AB_1l_0) - h_2(3AJg_0 + 6P'h_0^3 + 3ANl_0 + A^2BC)h_0^2 - \\ - Al_2(AB_1g_0 + Nh_0^3 - 2ABCl_0) + A^2g_1^2 - Ag_1(3Jh_1h_0^2 + AB_1l_1) - \\ - h_1^2(3AJg_0 + 15P'h_0^3 + 3ANl_0)h_0 + A^2BCl_1^2 - 3ANh_1l_1h_0^2 = 0$$
$$2g_2(h_0^3 + 2Al_0) + 3h_2(6g_0 - 5Al_0)h_0^2 - Al_2(4g_0 - h_0^3) + \\ + 12g_1h_1h_0^2 + 3h_1^2(6g_0 - 5Al_0)h_0 - 6Ah_1l_1h_0^2 = 0 \qquad (6.3)$$

. . . .

Решением первой системы (6.3) служат значения

$$g_0 = -A^2, \qquad h_0^3 = -\frac{A^2(A-2B)(A-2C)}{(A-B)(A-C)}, \qquad l_0 = -2A \qquad (6.4)$$

Вторая система (6.3) принимает вид

$$g_1 - 3Al_1 = 0$$
$$Ag_1[Jh_0^3 + 2A^2(A - B - C)] + h_1[6P'h_0^3 - 6A^4 + 9A^3B_1 - 13A^2BC]h_0^2 + \\ + l_1[Nh_0^3 - A^3B_1 + 4A^2BC] = 0$$
$$4g_1(h_0^3 - A^2) + 6A^2h_1h_0^2 - Al_1(h_0^3 - 2A^2) = 0$$

Пусть определитель системы относительно величин g_1, h_1, l_1 не равен нулю, тогда

$$g_1 = h_1 = l_1 = 0 \qquad (6.5)$$

Третья система (6.3) принимает вид

$$g_2 + 3Al_2 = 0$$
$$Ag_2[Jh_0^3 + 2A^2(A - B_1)] + h_2(6P'h_0^3 - 6A^4 + 9A^3B_1 - 11A^2BC)h_0^2 + \\ + Al_2(Nh_0^3 - A^3B_1 + 4A^2BC) = 0$$
$$2g_2(h_0^3 - 4A^2) + 12A^2h_2h_0^2 + Al_2(h_0^3 + 4A^2) = 0$$

Определитель системы относительно величин g_2, h_2, l_2 в силу значения h_0^3 из (6.4) равен

$$\Delta = 7A^4 \sqrt[3]{\frac{A^4(A-2B)^2(A-2C)^2}{(A-B)^5(C-A)^5}}(AB_1 - 3BC)(9A^2 - 18AB_1 + 32BC)$$

Положим $l_2 \neq 0$, тогда необходимо $\Delta = 0$, что дает условие

$$4BC = 9(A - 2B)(A - 2C) \qquad (6.6)$$

Не вычисляя дальше коэффициенты, предположим, как и раньше

$$\nu = \lambda_0 + \lambda_1z + \lambda_2z^2 + \ldots + \lambda_nz^n, \qquad \tau = \pi_0 + \pi_1z + \pi_2z^2 + \ldots + \pi_nz^n \qquad (6.7)$$

Подставляя ряды (6.2) в (6.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ левых и правых частей, получаем систему алгебраических уравнений для определения λ_i, π_i.

При значениях коэффициентов (6.5) из этих уравнений в силу (6.4) получаем

$$B\pi_3 - \lambda_3 = \frac{(A-B)(C-A)}{A(A-2C)}, \qquad C\pi_3 - \lambda_3 = \frac{(A-B)(C-A)}{A(A-2B)}$$

$$B\pi_1 - \lambda_1 = \frac{Bl_2 - g_2}{h_0} - 3\frac{(A-B)(C-A)}{A(A-2C)}h_2h_0 \tag{6.8}$$

$$C\pi_1 - \lambda_1 = \frac{Cl_2 - g_2}{h_0} - 3\frac{(A-B)(C-A)}{A(A-2B)}h_2h_0$$

$$\lambda_2 = \pi_2 = 0, \ \lambda_i = \pi_i = 0 \qquad (i = 4, 5, 6, \ldots)$$

Подставляя выражения ν, τ из (6.7) в формулы (1.6), получим

$$\begin{aligned} 2Q\gamma_2 &= q\,[B\pi_1 - \lambda_1 + 2(B\pi_2 - \lambda_2)z + 3(B\pi_3 - \lambda_3)z^2]\frac{dz}{d\rho} \\ 2Q\gamma_3 &= r\,[C\pi_1 - \lambda_1 + 2(C\pi_2 - \lambda_2)z + 3(C\pi_3 - \lambda_3)z^2]\frac{dz}{d\rho} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Коэффициент, например, при pq, если перейти к старым переменным, в выражении γ_2 из (6.9) в силу (6.8) равен

$$\frac{(A-B)(C-A)}{Q(A-2C)}$$

и совпадает с тем значением, которое получено для него во втором случае Чаплыгина [12].

В дальнейшем подсчете и сравнении коэффициентов нет необходимости для того, чтобы сказать, что формулы (6.9) характеризуют собой второй случай Чаплыгина [12].

Поступила 27 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Богоявленский А. А. О частных случаях движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, т. XXII, вып. 5, 1958.
2. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, т. 10, № 1, стр. 1—3, 1899.
3. Field. On the unsummetrical top. Acta math., vol. 56, pp. 355—362, 1930; vol. 62, pp. 313—316, 1934.
4. Gorliss J. On the unsummetrical top. Acta math., vol 59, pp. 423—441, 1932; vol. 62, pp. 301—312, 1934.
5. Fabbri R. Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso. Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei vol. XIX, pp.407—415, 1934.
6. Fabbri R. Sopra un particolare movimento di un solido pesante intorno a un punto fisso (Limiti di variabilità). Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XIX, pp. 495—502, 1934.
7. Fabbri R. Sui coni di Poinsot in una particolare rotazione dei solide pesanti. Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XIX, pp. 872—873, 1934.
8. Кузьмин П. А. Дополнение к случаю В. А. Стеклова движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, т. XVI, вып. 2, стр. 243—245, 1952.
9. Кузьмин П. А. Частные виды движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (в трудах русских ученых). Тр. Казанского авиационного института, т. XXVII, стр. 91—121, 1953.
10. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тр. отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, т. 10, вып. 1, стр. 23—24, 1899.
11. Kowalewski N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann., Bd. 65, S. 528—537, 1908.
12. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки. Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, т. 11, 1903. Собр. соч., т. 1, стр. 246—251, Л., 1933; Собр. соч., т. 1, стр. 125—132, М. — Л., 1948.