

## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ОПОРЫ

В. Д. Андреев

(Москва)

Рассматривается задача о малых колебаниях около положения относительного равновесия симметричного физического маятника с точкой опоры, движущейся вблизи земной поверхности, в случае, когда параметры маятника выбраны так, что в положении относительного равновесия ось его динамической симметрии совпадает с направлением к центру Земли.

В работе [1] найдены следующие условия, которым должно удовлетворять тяжелое твердое тело, имеющее ось динамической симметрии и закрепленное в одной из точек этой оси (маятник), чтобы ось его симметрии совпадала с направлением к центру Земли при произвольном движении точки опоры по земной поверхности.

1°. Равенство приведенной длины маятника радиусу Земли:

$$\frac{A}{ma} = R_0. \quad (0.1)$$

Условие (0.1) является известным условием Шулера [2].

2°. Выполнение одного из двух требований: либо проекция абсолютной угловой скорости маятника на направление к центру Земли (в положении относительного равновесия совпадающее с осью динамической симметрии маятника) в момент начала движения  $\omega_{z_0}(0) = 0$ , либо момент инерции маятника вокруг оси его динамической симметрии  $C = 0$ .

При выполнении условий 1°, 2° ось динамической симметрии маятника будет всегда совпадать с направлением к центру Земли, если только они совпадали в момент начала движения.

В настоящей работе рассматриваются малые колебания оси динамической симметрии маятника около направления к центру Земли (около положения относительного равновесия) в случае, если в момент начала движения ось динамической симметрии не совпадает с направлением к центру Земли. Изучение этих колебаний позволяет судить о степени устойчивости найденного в [1] положения относительного равновесия. При этом вначале, как и в [1], рассмотрение проводится в предположениях, что точка опоры маятника движется по поверхности Земли, принимаемой за сферу, а поле тяготения Земли центрально. Далее (п.4) рассматривается случай произвольного движения точки опоры вблизи земной поверхности и учитывается нецентральность поля тяготения Земли; в этом случае определяются также компенсирующие моменты, которые необходимо приложить к маятнику дополнительно к условиям 1°, 2°, чтобы положение относительного равновесия существовало.

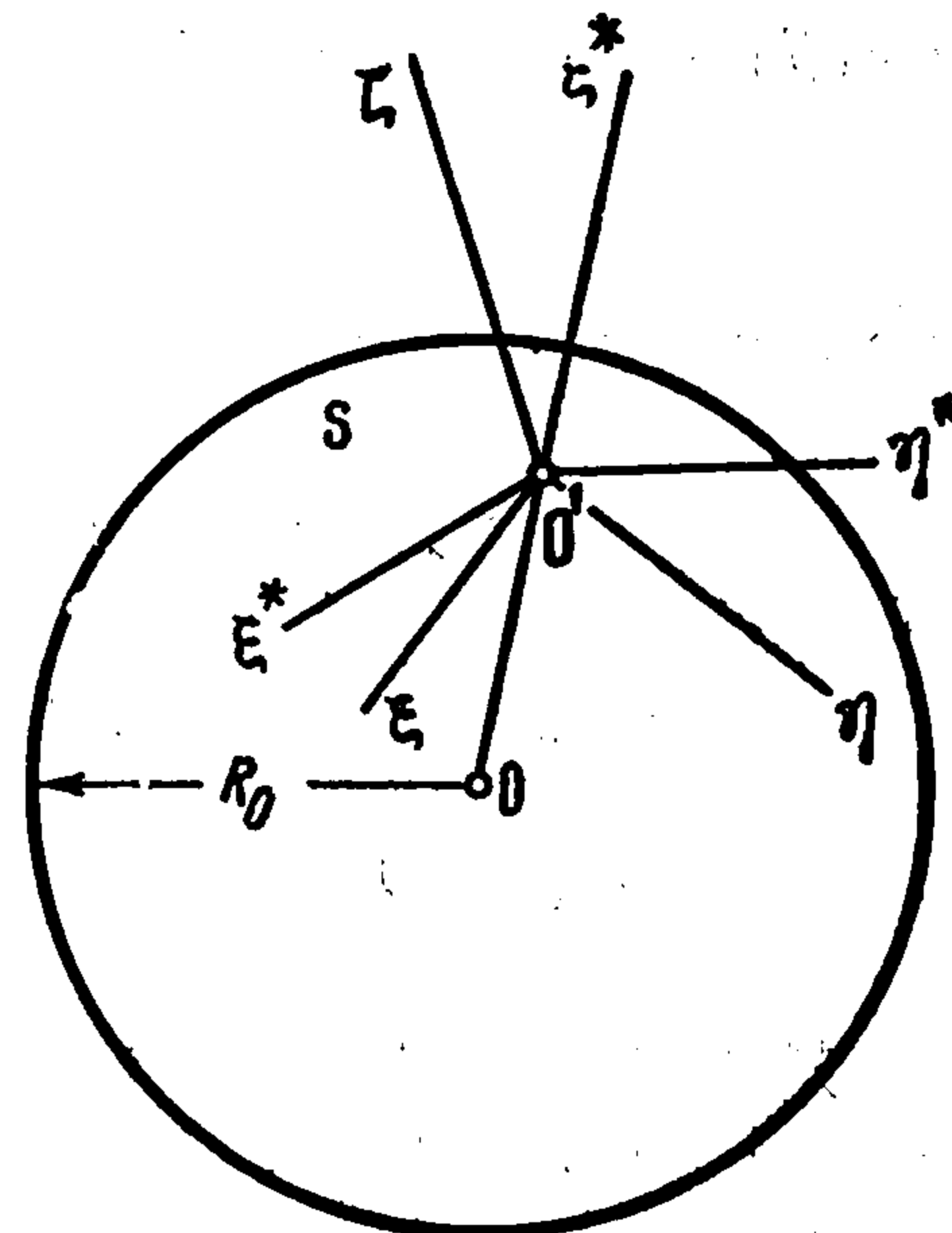
1. Введем следующие правые прямоугольные системы координат:  $O'\xi^*\eta^*\zeta^*$ , начало которой  $O'$  совпадает (фиг. 1) с точкой подвеса маятника и движется произвольно по неподвижной сфере  $S$  радиуса  $R_0$ , concentрической с поверхностью Земли, а ориентация осей сохраняется неизменной по отношению к неподвижным звездам. Система координат  $O'\xi^*\eta^*\zeta^*$ , таким образом, движется относительно неподвижных звезд поступательно.

Систему  $O'x_0y_0z_0$ , связанную с маятником (фиг. 2) в его невозмущенном движении в положении относительного равновесия; ось  $O'z_0$  этой системы координат

нат совпадает с осью динамической симметрии маятника и направлена по радиусу Земли от центра; оси  $O'x_0$  и  $O'y_0$  лежат в плоскости, касательной к сфере  $S$ , а следовательно, и к Земле. Система  $O'x_0y_0z_0$  является, таким образом, трехгранником Дарбу на земной поверхности, связанным с точкой  $O'$ .

Систему  $O'xyz$ , связанную с телом маятника (фиг. 2) в его возмущенном движении около положения относительного равновесия; положение системы координат  $O'xyz$  относительно системы  $O'x_0y_0z_0$  определяется двумя углами  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — малые) согласно таблице направляющих косинусов<sup>1</sup>:

	$x_0$	$y_0$	$z_0$	
$x$	1	0	$-\beta$	(1.1)
$y$	0	1	$\alpha$	
$z$	$\beta$	$-\alpha$	1	



Фиг. 1

Ось  $O'z$  является осью динамической симметрии маятника, и центр тяжести с маятника имеет координаты

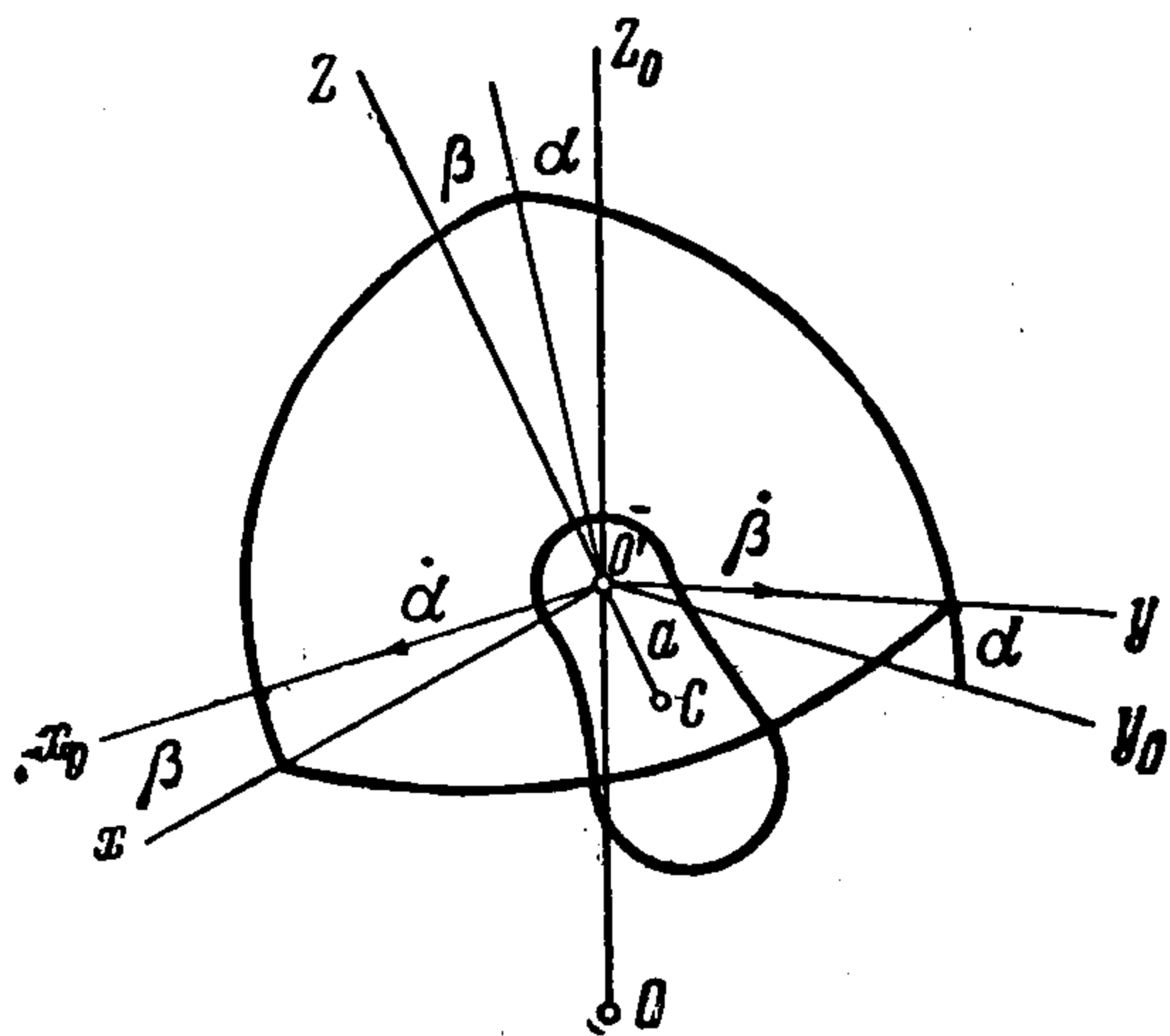
$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = -a \quad (1.2)$$

Оси системы координат  $O'xyz$  направлены по главным осям эллипсоида инерции маятника, являющегося эллипсоидом вращения, поэтому

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0, \quad I_{xx} = I_{yy} = A, \quad I_{zz} = C \quad (1.3)$$

2. Составим уравнения движения маятника относительно системы координат  $O'\xi^*\eta^*\zeta^*$  в проекциях на оси  $O'xyz$ , для чего воспользуемся уравнениями Эйлера, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{aligned} A d\omega_x / dt + (C - A) \omega_y \omega_z &= M_x \\ A d\omega_y / dt - (C - A) \omega_x \omega_z &= M_y \\ C d\omega_z / dt &= M_z \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Если  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции абсолютной угловой скорости системы координат  $O'x_0y_0z_0$  на ее оси, то, принимая во внимание (1.1), имеем следующие выражения для проекций абсолютной угловой скорости маятника на связанные с ним оси  $xyz$ :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x_0} - \omega_{z_0} \beta + d\alpha / dt \\ \omega_y &= \omega_{y_0} + \omega_{z_0} \alpha + d\beta / dt \\ \omega_z &= \omega_{z_0} - \omega_{y_0} \alpha + \omega_{x_0} \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для вычисления моментов  $M_x, M_y, M_z$  заметим, что в рассматриваемом случае они состояются из моментов сил земного притяжения и сил инерции переносного движения системы координат  $O'\xi^*\eta^*\zeta^*$ , в которой

<sup>1</sup> Возмущенное положение маятника определено здесь двумя углами, так как нас интересует только движение (отклонение от направления к центру Земли) оси динамической симметрии маятника.

составляются уравнения движения маятника. Полагая, что притяжение Землей элементарных масс маятника приводится только к силе  $F$ , направленной по радиусу Земли к ее центру<sup>1</sup> и имеющей величину  $F = mg_0$ , где  $m$  — масса маятника, а  $g_0$  — сила гравитационного притяжения Землей единичной массы, помещенной на ее поверхности, а также принимая во внимание, что проекции абсолютной скорости трехгранника Дарбу  $O'x_0y_0z_0$  на его оси<sup>2</sup>

$$v_{x_0} = R_0\omega_{y_0}, \quad v_{y_0} = -R_0\omega_{x_0}, \quad v_{z_0} = 0 \quad (2.3)$$

получаем, учитывая (1.2) и (1.3):

$$M_x = -mag_0\alpha + maR_0 \left( \frac{d\omega_{x_0}}{dt} - \omega_{y_0}\omega_{z_0} \right) + maR_0 (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \alpha \quad (2.4)$$

$$M_y = -mag_0\beta + maR_0 \left( \frac{d\omega_{y_0}}{dt} + \omega_{x_0}\omega_{z_0} \right) + maR_0 (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \beta$$

$$M_z = 0$$

Подставляя теперь соотношения (2.2) и (2.4) в (2.1) и отбрасывая члены второго порядка малости, можем после соответствующих группировок записать уравнения движения следующим образом:

$$\begin{aligned} & (A - maR_0) \left( \frac{d\omega_{x_0}}{dt} - \omega_{y_0}\omega_{z_0} + \omega_{y_0}^2\alpha \right) + C\omega_{y_0} (\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta) + \\ & + C\omega_{z_0} \left( \frac{d\beta}{dt} + \omega_{z_0}\alpha \right) + A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + (mag_0 - maR_0\omega_{x_0}^2 - A\omega_{z_0}^2) \alpha = \\ & = A \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} + \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \beta + 2A\omega_{z_0} \frac{d\beta}{dt} \\ & (A - maR_0) \left( \frac{d\omega_{y_0}}{dt} + \omega_{x_0}\omega_{z_0} + \omega_{x_0}^2\beta \right) - C\omega_{x_0} (\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta) - \\ & - C\omega_{z_0} \left( \frac{d\alpha}{dt} - \omega_{z_0}\beta \right) + A \frac{d^2\beta}{dt^2} + (mag_0 - maR_0\omega_{y_0}^2 - A\omega_{z_0}^2) \beta = \\ & = A \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} - \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \alpha - 2A\omega_{z_0} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.5) \\ & C \frac{d}{dt} (\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta) = 0 \end{aligned}$$

Из третьего уравнения (2.5) следует, что

$$C (\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta) = C (\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta) |_{t=0} = CH = \text{const}$$

С учетом этого первые два уравнения (2.5) приобретают вид:

$$\begin{aligned} & (A - maR_0) \left( \frac{d\omega_{x_0}}{dt} - \omega_{y_0}\omega_{z_0} + \omega_{y_0}^2\alpha \right) + CH \left( \omega_{y_0} + \frac{d\beta}{dt} + \omega_{z_0}\alpha \right) + \\ & + A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + (mag_0 - maR_0\omega_{x_0}^2 - A\omega_{z_0}^2) \alpha = A \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} + \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \beta + 2A\omega_{z_0} \frac{d\beta}{dt} \\ & (A - maR_0) \left( \frac{d\omega_{y_0}}{dt} + \omega_{x_0}\omega_{z_0} + \omega_{x_0}^2\beta \right) - CH \left( \omega_{x_0} + \frac{d\alpha}{dt} - \omega_{z_0}\beta \right) + \\ & + A \frac{d^2\beta}{dt^2} + (mag_0 - maR_0\omega_{y_0}^2 - A\omega_{z_0}^2) \beta = A \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} - \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \alpha - 2A\omega_{z_0} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.6) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Частые случаи плоской задачи о малых колебаниях физического маятника с учетом результирующего момента сил тяготения рассмотрены в работах [3,4].

<sup>2</sup> Центр Земли полагается неподвижной точкой.

Из (2.6) сразу следует, что уравнения движения имеют тривиальное решение  $\alpha = \beta \equiv 0$ , т. е. что указанное выше положение относительного равновесия существует только в том случае, если

$$A = maR_0, \quad CH = 0$$

причем, как легко видеть, условие  $H = 0$  равносильно второму условию 2°:  $\omega_{z_0} = 0$  при  $t = 0$ .

При  $C = 0$  и  $A = maR_0$  получаем из (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha &= (\omega_{x_0}^2 + \omega_{z_0}^2)\alpha + \left(\omega_{x_0}\omega_{y_0} + \frac{d\omega_{z_0}}{dt}\right)\beta + 2\omega_{z_0}\frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \omega_0^2\beta &= (\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2)\beta + \left(\omega_{x_0}\omega_{y_0} - \frac{d\omega_{z_0}}{dt}\right)\alpha - 2\omega_{z_0}\frac{d\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\omega_0^2 = g_0/R_0$ .

При  $H = 0$  и  $A = maR_0$ , отбрасывая малые второго порядка, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha &= \omega_{x_0}^2\alpha + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\beta \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \omega_0^2\beta &= \omega_{y_0}^2\beta + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\alpha \end{aligned} \quad \left(\omega_0^2 = \frac{g_0}{R_0}\right) \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7), (2.8) описывают движение трехгранника  $Q'xyz$  относительно трехгранника  $O'x_0y_0z_0$ , т. е. малые колебания маятника, удовлетворяющего условиям 1°, 2°, около положения относительного равновесия.

3. Легко убедиться, что уравнения (2.7) инвариантны относительно преобразования

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos \varepsilon + \beta \sin \varepsilon \\ \beta' &= -\alpha \sin \varepsilon + \beta \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

При переходе от переменных  $\alpha$  и  $\beta$  к переменным  $\alpha'$  и  $\beta'$  в коэффициентах (2.8)  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$  и  $\omega_{z_0}$  заменяются соответственно на

$$\omega'_{x_0} = \omega_{x_0} \cos \varepsilon + \omega_{y_0} \sin \varepsilon, \quad \omega'_{y_0} = -\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon, \quad \omega'_{z_0} = \omega_{z_0} + \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.2)$$

Если положить  $d\varepsilon/dt = -\omega_{z_0}$ , то уравнения (2.7) превращаются в (2.8); в этом случае малые колебания рассматриваются относительно трехгранника  $O'x_0'y_0'z_0$ , не вращающегося вокруг оси  $O'z_0$  (не вращающегося в азимуте, азимутально свободного). Поэтому в дальнейшем можно рассматривать только систему уравнений (2.8).

К уравнениям (2.7), (2.8) сводится исследование малых колебаний довольно широкого класса приборов, определяющих вертикаль места на движущейся по поверхности Земли платформе; например, к системе (2.7), если в ней положить  $\omega_{x_0} = 0$  или  $\omega_{y_0} = 0$ , сводятся уравнения малых колебаний идеального гироскопа [5].

Выяснение свойств решений уравнений (2.7), (2.8), особенно пределов возможной расходимости решения по отношению к начальным условиям («раскачки» маятника), представляет поэтому известный практический интерес.

Системы уравнений (2.7), (2.8) являются в общем случае системами с переменными коэффициентами. Только в частных случаях выбора трех-

гранника Дарбу  $O'x_0'y_0'z_0$  и закона движения точки подвеса маятника по поверхности Земли эти уравнения могут быть приведены к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Например, если ось  $O'x_0'$  направлена на восток по параллели, ось  $O'y_0'$  на север по меридиану и движение точки подвеса происходит на постоянной широте  $\varphi_0$  с постоянной скоростью  $v_0$ , то в системе (2.7) все коэффициенты становятся постоянными. В этом случае

$$\omega'_{x_0} = -\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \omega'_{y_0} = \left(u + \frac{v_0}{R_0}\right) \cos \varphi_0, \quad \omega_{z_0} = \left(u + \frac{v_0}{R_0}\right) \sin \varphi_0$$

где  $u$  — угловая скорость вращения Земли.

Если движение точки подвеса происходит со скоростью  $v$  по большому кругу сферы  $S$ , то, расположив оси  $O'x_0'$  и  $O'z_0$  в плоскости этого круга, получаем из системы (2.7) или (2.8)

$$\frac{d^2\alpha'}{dt^2} + \omega_0^2\alpha' = 0, \quad \frac{d^2\beta'}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \frac{v^2}{R_0^2}\right)\beta' = 0 \quad (3.3)$$

Любопытно, что в этом случае восстанавливающий момент по углу  $\alpha'$  не зависит от скорости движения точки подвеса.

В случае, если  $v = v_0 = \text{const}$ , решением (3.3) являются гармонические колебания с амплитудами, определяемыми начальными условиями. В противном случае возможно увеличение амплитуды по углу  $\beta'$  при параметрическом резонансе.

Для получения оценок пределов возможной расходимости решений системы уравнений (2.7) или (2.8) по отношению к начальным условиям на конечном отрезке времени  $[0, T]$  в общем случае движения точки подвеса построим решение системы (2.8) методом последовательных приближений. Определим связь  $n$ -го и  $(n-1)$ -го приближений следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_{(n)}}{dt^2} + \omega_0^2\alpha_{(n)} &= \omega_{x_0}^2\alpha_{(n-1)} + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\beta_{(n-1)} \\ \frac{d^2\beta_{(n)}}{dt^2} + \omega_0^2\beta_{(n)} &= \omega_{y_0}^2\beta_{(n-1)} + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\alpha_{(n-1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

За нулевое приближение можно принять решение уравнений <sup>1</sup>

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} + \omega_0^2\beta = 0$$

Взяв для простоты

$$\alpha|_{t=0} = \beta|_{t=0} = a_0, \quad \frac{d\alpha}{dt}|_{t=0} = \frac{d\beta}{dt}|_{t=0} = 0$$

получаем из (3.4)

$$\begin{aligned} \alpha_{(n)} &= a_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [\omega_{x_0}^2\alpha_{(n-1)} + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\beta_{(n-1)}] \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \\ \beta_{(n)} &= a_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [\omega_{y_0}^2\beta_{(n-1)} + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\alpha_{(n-1)}] \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup> В работе [5] это нулевое приближение было получено комплексно-значными подстановками из системы, которая может быть приведена к (2.8).

Сходимость и единственность решения, определяемого приближениями (3.5) при ограниченных и непрерывных  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ , очевидны [6].

Для решения, определяемого приближениями (3.5), легко построить на отрезке времени  $[0, T]$  мажорантные оценки.

Пусть

$$\max \{ \omega_{x_0}^2, \omega_{y_0}^2, |\omega_{x_0}, \omega_{y_0}| \} < \mu$$

Тогда из (3.5) следует, что<sup>1</sup>

$$|\alpha_{(n)}| \leq a_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{3\mu}{\pi\omega_0} T \right)^k$$

Откуда

$$|\alpha| \leq a_0 \exp \frac{3\mu T}{\pi\omega_0} \quad (3.6)$$

Аналогичная оценка получается для  $|\beta|$ .

Выражение (3.6) может быть использовано для оценки расходимости  $\alpha$  и  $\beta$  со временем по отношению к их начальным значениям, если вид функций  $\omega_{x_0}$  и  $\omega_{y_0}$  неизвестен. В противном случае для уточнения оценок лучше непосредственно интегрировать приближения (3.5). Так как при возможных скоростях  $v$  движения точки подвеса по поверхности Земли

$$\frac{\mu}{\omega_0} \leq \frac{(v + uR_0)^2}{R_0 \sqrt{g_0 R_0}} \ll 1 \quad (3.7)$$

то приближения (3.5) сходятся весьма быстро. Обычно оказывается достаточным ограничиться при оценке вторым приближением.

4. Рассмотрим случай произвольного движения точки опоры маятника вблизи земной поверхности и учтем также нецентральность поля тяготения Земли. (Близость движения к поверхности Земли имеется в виду в том смысле, что ускорение силы земного тяготения можно в пределах этого движения считать постоянным по величине.) В этом случае в (2.1)  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , как и ранее, определяются формулами (2.2), а для скоростей и моментов имеем

$$v_{x_0} = R\omega_{y_0}, \quad v_{y_0} = -R\omega_{x_0}, \quad v_{z_0} = \frac{dR}{dt} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} M_x = & -mag_0' \alpha + ma \left[ R \left( \frac{d\omega_{x_0}}{dt} - \omega_{y_0} \omega_{z_0} \right) - 2 \frac{dR}{dt} \omega_{x_0} \right] + \\ & + maR (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \alpha + M_x^{(1)} + M_x^{(2)} \\ M_y = & -mag_0' \beta + ma \left[ R \left( \frac{d\omega_{y_0}}{dt} + \omega_{x_0} \omega_{z_0} \right) + 2 \frac{dR}{dt} \omega_{y_0} \right] + \\ & + maR (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \beta + M_y^{(1)} + M_y^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где через  $M_x^{(1)}$ ,  $M_y^{(1)}$  обозначены моменты от горизонтальной составляющей силы земного тяготения, через  $M_x^{(2)}$ ,  $M_y^{(2)}$  — дополнительные компенсационные моменты, накладываемые на маятник,  $g_0'$  — радиальное ускорение силы тяготения Земли на расстоянии  $R$  от ее центра.

<sup>1</sup> Строго говоря, эта оценка справедлива для  $\pi(l + 1/2) / \omega_0 > T > \pi l / \omega_0$ , где  $l$  — целое число; при  $T \gg 2\pi / \omega_0$  этим условием можно пренебречь. От него можно также и освободиться, если разбить интервал интегрирования  $[0, T]$  на отрезки, равные  $\pi / 2\omega_0$ .

Для того, чтобы определить моменты  $M_x^{(1)}$ ,  $M_y^{(1)}$ , введем дополнительно к рассмотренным ранее системам координат трехгранник Дарбу  $O'\xi\eta\zeta$ , ориентированный таким образом, что ось  $O'\xi$  направлена по параллели на восток, а ось  $O'\eta$  — по меридиану на север. Тогда, считая Землю эллипсоидом вращения [7], можем написать

$$\begin{aligned} M_x^{(1)} &= -ab \sin 2\varphi \cos(\eta y_0) \\ M_y^{(1)} &= -ab \sin 2\varphi \cos(\eta x_0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $\varphi$  — географическая широта точки  $O'$ ;

$$b = \frac{e^2 g_0 - u^2 d}{2}$$

где  $d$  и  $e$  — малая полуось и эксцентриситет земного эллипсоида Красовского.

При

$$C = 0, \quad A = maR \quad (A = \text{const}) \quad (4.4)$$

из (2.1), (2.2), (4.2) и (4.3) получаем уравнения малых колебаний в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left( \frac{g_0'}{R} + \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dt^2} \right) \alpha &= (\omega_{x_0}^2 + \omega_{z_0}^2) \alpha + \\ + \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} + \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \beta + 2\omega_{z_0} \frac{d\beta}{dt} + \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} \omega_{x_0} - \frac{b}{R} \sin 2\varphi \cos(\eta y_0) + \frac{M_x^{(2)}}{maR} \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \left( \frac{g_0'}{R} + \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dt^2} \right) \beta &= (\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) \beta + \\ + \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} - \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \alpha - 2\omega_{z_0} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} \omega_{y_0} - \frac{b}{R} \sin 2\varphi \cos(\eta x_0) + \frac{M_y^{(2)}}{maR} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) имеют тривиальное решение, если компенсирующие моменты  $M_x^{(2)}$ ,  $M_y^{(2)}$  сформированы согласно равенствам

$$\begin{aligned} M_x^{(2)} &= ma \left( -2 \frac{dR}{dt} \omega_{x_0} + b \sin 2\varphi \cos(\eta y_0) \right) \\ M_y^{(2)} &= ma \left( 2 \frac{dR}{dt} \omega_{y_0} + b \sin 2\varphi \cos(\eta x_0) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

т. е. ось динамической симметрии маятника, если учесть нецентральность поля тяготения Земли и вертикальную составляющую скорости платформы, только в том случае будет в положении относительного равновесия совпадать с направлением к центру Земли, если к маятнику по осям  $O'x$  и  $O'y$  приложены моменты  $M_x^{(2)}$  и  $M_y^{(2)}$ , определяемые равенствами (4.6).

Если корректирующие моменты на маятник подавать извне, то уравнения его малых колебаний будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left( \frac{g_0'}{R} + \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dt^2} \right) \alpha &= (\omega_{x_0}^2 + \omega_{z_0}^2) \alpha + \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} + \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \beta + 2\omega_{z_0} \frac{d\beta}{dt} + \Delta_\alpha \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \left( \frac{g_0'}{R} + \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dt^2} \right) \beta &= (\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) \beta + \left( \omega_{x_0}\omega_{y_0} - \frac{d\omega_{z_0}}{dt} \right) \alpha - 2\omega_{z_0} \frac{d\alpha}{dt} + \Delta_\beta \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $\Delta_\alpha$  и  $\Delta_\beta$  — некомпенсированные остатки возмущающих моментов.

Особый интерес представляет случай, когда компенсирующие моменты  $M_x^{(2)}$ ,  $M_y^{(2)}$  формируются с использованием координат текущего местоположения объекта, которые может дать сам маятник.

В этом случае, учитывая также возможную ошибку в выполнении второго условия (4.4) на величину  $\Delta R$  и возможную ошибку  $\Delta dR/dt$  во введении  $dR/dt$  для формирования компенсирующих моментов, получаем, пренебрегая малыми вариациями поправки на нецентральность поля тяготения Земли, вводя замену переменных (3.1) и полагая  $d\varepsilon/dt = -\omega_z$ , следующие уравнения малых колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(R\alpha') + \frac{g_0'}{R}(R\alpha') &= \omega_{x_0}'^2(R\alpha') + \omega_{x_0}'\omega_{y_0}'(R\beta') - \Delta R \frac{d\omega_{x_0}'}{dt} - 2\omega_{x_0}'\Delta \frac{dR}{dt} \\ \frac{d^2}{dt^2}(R\beta') + \frac{g_0'}{R}(R\beta') &= \omega_{y_0}'^2(R\beta') + \omega_{x_0}'\omega_{y_0}'(R\alpha') - \Delta R \frac{d\omega_{y_0}'}{dt} - 2\omega_{y_0}'\Delta \frac{dR}{dt} \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\omega_{x_0}'$ ,  $\omega_{y_0}'$ ,  $\omega_z'$  определены формулами (3.2).

При рассмотрении системы (4.8) можно принять  $g_0'/R = g_0/R_0 = \text{const}$ . Тогда для оценки возможной расходимости решений однородной системы (4.8) по отношению к начальным условиям могут быть использованы соотношения (3.5) или (3.6).

В виду того, что при обычных скоростях движения точки подвеса маятника эта расходимость согласно (3.6) и (3.7) мала, для оценки влияния правых частей (4.8) можно рассматривать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(R\alpha') + \frac{g_0}{R_0}(R\alpha') &= -\Delta R \frac{d\omega_{x_0}'}{dt} - 2\omega_{x_0}'\Delta \frac{dR}{dt} \\ \frac{d^2}{dt^2}(R\beta') + \frac{g_0}{R_0}(R\beta') &= -\Delta R \frac{d\omega_{y_0}'}{dt} - 2\omega_{y_0}'\Delta \frac{dR}{dt} \end{aligned} \quad (4.9)$$

В заключение отметим, что если не накладывать на маятник моменты, компенсирующие возмущающее воздействие горизонтальной составляющей силы земного тяготения, то ввиду того, что изменение этой составляющей за время  $2\pi/\omega_0$  мало, маятник при обычных скоростях движения точки подвеса с большой точностью устанавливается по направлению силы притяжения Земли.

Поступила 10 VI 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
2. Schuler M. Die Störung von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges. Physikalische Zeitschrift, 24 Jahrgang, № 16.
3. Schmiel E. Das beschleunigungunabhängige Pendel von einem Freiheitsgrad auf einer Kreisbahn. Luftforschung, Bd. 17, 1940.
4. Носч Н. Das physikalische Pendel im radialsymmetrischen Erdgewichtskraftfeld. Zeitschrift für ang. Mathematik und Physik, Bd. 24, H. 5/6, 1944.
5. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. ОГИЗ, Гостехиздат, 1953.
7. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. ГТТИ, 1939.
8. Су слов В. Г. Теоретическая механика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.