Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ТЕОРЕМЕ БОННЭ

В. А. Егоров
(Москва)

В статье обобщается теорема Оссиана Боннэ, позволяющая заключать о возможности движения точки по некоторой кривой под действием равнодействующей силы (сложное движение), если по этой кривой возможны движения под действием составляющих сил (частные движения). При помощи этого обобщения уточняются некоторые утверждения Боннэ[1], Лагранжа[2] и Таллькивиста[3], касающиеся движения по ветвям гипербол в задаче о двух неподвижных притягивающих центрах.

§ 1. Обобщение теоремы Боннэ. В 1844 г. Оссиан Боннэ ([1], стр. 13) доказал теорему: «Если несколько масс m, m', m'', ..., подверженных соответственно действию сил F, F', F'', ... и выходящих из точки A со скоростями v_0, v_0', v_0'', имеющими различные величины, но одинаковое направление, описывают одну и ту же кривую ACB, то некоторая масса M, подверженная действию равнодействующей сил F, F', F'', ..., выходящая из точки A со скоростью V, имеющей то же самое направление, что и скорости v_0, v_0', v_0'',..., будет описывать кривую ACB, если только силы F, F', F'', ... не зависят от времени и начальная живая сила MV_0^2 массы M равна сумме $mv_0^2+mv_0'^2+mv_0''^2+\ldots$ начальных живых сил масс m, m', m'', ...».

Обобщим эту теорему следующим образом.

Теорема. Пусть одна и та же кривая AB описывается каждой из масс m_1, m_2, ..., m_n под действием соответствующей силы F_i ($i=1, 2, \ldots, n$), зависящей только от положения массы на кривой, и пусть v_{i0} — скорости масс m_i в начальной точке A. Тогда:

1) некоторая масса M, подверженная действию силы

$$\mathbf{F}=a_1\mathbf{F}_1+\ldots+a_n\mathbf{F}_n$$

(где a_i — константы) и выходящая из точки A со скоростью V_0 того же направления, что и скорости v_{i0}, опишет ту же самую кривую AB или ее часть, если только

$$MV_0^2=a_1m_1v_{10}^2+\cdots+a_nm_nv_{n0}^2>0 \qquad (1.1)$$

2) обратно, если кривая AB описывается массой M со скоростью V под действием силы

$$\mathbf{F}=a_1\mathbf{F}_1+\ldots+a_n\mathbf{F}_n$$

то вдоль этой кривой

$$MV^2=a_1m_1v_1^2+\cdots+a_nm_nv_n^2 \qquad (1.2)$$

Таким образом, силы $\mathbf{F}_i$ и соответствующие движения как бы играют роль базисных. Теорема Боннэ получается из первой части обобщенной теоремы, когда все $a_i=+1$.

Вследствие линейности уравнений движения относительно масс и сил доказательство первой части обобщенной теоремы проводится почти так же, как и у Боннэ.

Назовем для краткости движение, вызываемое только одной из сил $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$, частным движением, а движение, вызываемое силой $\mathbf{F}$, — сложным движением.

Если масса M не описывает кривой AB в сложном движении, то приложим к ней такую силу $\mathbf{N}$, нормальную к кривой, чтобы под действием силы $\mathbf{F}+\mathbf{N}$ кривая AB все же описывалась точкой M. Тогда

$$
M d\mathbf{V}/dt = a_1\mathbf{F}_1 + \ldots + a_n\mathbf{F}_n + \mathbf{N} \qquad (1.3)
$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости массы M в произвольной точке C кривой AB. Умножив скалярно это уравнение на вектор $\mathbf{d}_s$ элементарного смещения вдоль кривой, получим

$$
dMV^2 = 2\,(a_1\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{d}_s + \ldots + a_n\mathbf{F}_n\cdot\mathbf{d}_s) \qquad (1.4)
$$

Если v_i — скорости масс $m_i\,(i=1, \ldots, n)$ в точке C в частных движениях, то для того же смещения $\mathbf{d}_s$ аналогично (1.4) получим

$$
dm_iv_i^2 = 2\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{d}_s \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.5)
$$

Заметим, что изменения времени, отвечающие фиксированному смещению $\mathbf{d}_s$, будут различны в частных и сложном движениях вследствие различия скоростей v_i, V. Однако силы $\mathbf{F}_i$, зависящие только от положения, одинаковы в (1.4) и (1.5), и соответствующие скалярные произведения из (1.4) и (1.5) равны в точке C.

Умножая уравнения (1.5) на a_i, складывая отдельно правые и левые части и подставляя правую часть результата в (1.4), получим

$$
dMV^2 = a_1 d\,(m_1v_1^2) + \ldots + a_n d\,(m_nv_n^2)
$$

Интегрируя, в силу условия (1.1) теоремы, получим для MV^2 в любой точке кривой AB выражение

$$
MV^2 = a_1m_1v_1^2 + \ldots + a_nm_nv_n^2 \qquad (1.6)
$$

положительное по крайней мере на части кривой AB вблизи точки A [в силу неравенства в условии (1.1)].

Докажем теперь, что сила $\mathbf{N}\equiv 0$ вдоль кривой. В плоскости π, нормальной к кривой, для частных движений имеем

$$
\frac{m_iv_i^2}{\rho}\,\mathbf{n} = (\mathbf{F}_i)_\pi \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.7)
$$

где $\mathbf{n}$ — орт главной нормали, ρ — радиус кривизны, а значок π означает проектирование на плоскость π. Проектируя (1.3) на π, получим

$$
\frac{MV^2}{\rho}\,\mathbf{n} = [a_1(\mathbf{F}_1)_\pi + \ldots + a_n(\mathbf{F}_n)_\pi] + \mathbf{N} \qquad (1.8)
$$

Пользуясь опять одинаковостью сил F_i в частных и сложном движениях, заменим первый член в правой части (1.8) при помощи (1.7). Получим тогда в силу (1.6) $\mathbf{N}=0$; из произвольности точки C следует тождественность этого равенства, что и требовалось доказать.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Проектируя уравнения частных и сложного движений на плоскость π, получим (1.7) и (1.8), причем в силу условия второй части теоремы $\mathbf{N} \equiv 0$. Пользуясь еще раз равенством сил $\mathbf{F}_i$ в (1.7) и (1.8), подставим из (1.7) силы, умноженные на a_i, в (1.8); затем, умножая (1.8) на ($\rho\mathbf{n}$), получим то, что требовалось доказать.

Первая часть теоремы не позволяет узнать, возможно ли вообще сложное движение по кривой AB из точки A, если условие (1.1) нарушено. Вторая же часть теоремы сразу дает отрицательный ответ, ибо если бы такое движение было возможно, то условие (1.1) выполнялось бы в любой точке кривой.

Заметим, что одной независимости сил $\mathbf{F}_i$ от времени, оговоренной Боннэ, для доказательства теоремы Боннэ и обобщенной теоремы недостаточно, а необходимо, чтобы силы $\mathbf{F}_i$ зависели только от положения C движущейся массы на кривой AB. Действительно, если силы $\mathbf{F}_i$ зависят от каких-либо факторов, отличающихся в положении C для частных и сложного движений, например от скорости движения, то доказательство не проходит. Но силы $\mathbf{F}_i$ не обязательно должны быть чисто позиционными. Например, силы, зависящие только от кривизны траектории или от направления скорости, не являются, вообще говоря, позиционными, но благодаря фиксированности кривой AB оказываются зависящими только от положения на этой кривой. Более того, силы $\mathbf{F}_i$ могут быть заданы только вдоль кривой AB и не определены вне этой кривой.

Если силы зависят не только от положения точки C, но и от массы, т. е. $\mathbf{F}_i = k_i(m)\,\mathbf{f}_i(C)$, то обобщенная теорема, как можно проверить, остается в силе, если в ее пунктах 1) и 2) заменить всюду m_i на $m_i k_i(M)/k_i(m_i)$. В случае массовых сил это дает одинаковость всех масс, и массы в условиях (1.1) и (1.2) сокращаются.

Обобщенную теорему можно доказать и для несвободного движения точки, когда по условию кривая A обязана принадлежать гладкой поверхности. Действительно, силы $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_{i0}$ реакций поверхности в частных и сложном движениях нормальны к плоскоси π_0, касательной к поверхности, и к траектории AB; силу же $\mathbf{N}$, заставляющую точку описывать на поверхности заданную кривую AB, здесь можно, очевидно, считать лежащей в плоскости π_0. Теперь вместо (1.3) получим

$$M d\mathbf{V}/dt = a_1\mathbf{F}_1 + \ldots + a_n\mathbf{F}_n + \mathbf{N} + \mathbf{N}_0 \tag{1.9}$$

Соотношения (1.4) и (1.6), очевидно, останутся в силе, а (1.7) заменится на

$$\frac{m_i v_i^2}{\rho}\mathbf{n} = (F_i)_\pi + \mathbf{N}_{i0} \tag{1.10}$$

Проектируя (1.9) на плоскость π, нормальную к кривой, получим

$$M\frac{V^2}{\rho}\mathbf{n} = a_1(\mathbf{F}_1)_\pi + \ldots + a_n(\mathbf{F}_n)_\pi + \mathbf{N} + \mathbf{N}_0 \tag{1.11}$$

Заменяя здесь $(\mathbf{F}_i)_\pi$ при помощи (1.10), получим

$$\left[\frac{MV^2}{\rho} - \frac{1}{\rho}(a_1 m_1 v_1^2 + \ldots + a_n m_n v_n^2)\right]\mathbf{n} = \mathbf{N} + \mathbf{N}_0 - (a_1\mathbf{N}_{10} + \ldots + a_n\mathbf{N}_{n0})$$

или, в силу (1.6)

$$0 = \mathbf{N} + \mathbf{N}_0 - (a_1\mathbf{N}_{10} + \ldots + a_n\mathbf{N}_{n0})$$

Поскольку сила $\mathbf{N}$ согласно ее выбору ортогональна $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{N}_{i0}$, имеем $\mathbf{N}=0$ и $\mathbf{N}_0=a_1\mathbf{N}_{10}+\ldots+a_n\mathbf{N}_{n0}$, т. е. кроме доказательства первой части обобщенной теоремы для несвободного движения получено еще и простое выражение нормальной реакции в сложном движении через нормальные реакции в частных движениях.

Доказательство второй части остается прежним, если вместо уравнений (1.7) и (1.8) пользоваться соответственно уравнениями (1.10) и (1.11).

Замечание. Нетрудно проверить, что обобщенную теорему можно сформулировать и доказать также в следующем симметричном виде.

Пусть одна и та же кривая AB (или ее часть) описывается какими-либо $(n-1)$ массами из n масс $m_1, \ldots, m_n$, выходящих из точки A с одинаковыми по направлению скоростями $v_{i,0}$ и подверженных соответственно действию сил $\mathbf{F}_i$ $(i=1,\ldots,n)$, зависящих только от положения массы на кривой. Тогда:

1) оставшаяся масса m_k опишет ту же самую кривую или ее часть, если только существуют действительные числа a_i $(i=1,\ldots,n)$ такие, что

$$a_1\mathbf{F}_1+\ldots+a_n\mathbf{F}_n=0, \qquad a_1m_1v_{10}^2+\ldots+a_nm_nv_{n0}^2=0 \tag{1.12}$$

и определяемая из (1.12) величина $m_kv_k^2>0$;

2) если кривая AB описывается оставшейся массой при условии, что

$$a_1\mathbf{F}_1+\ldots+a_n\mathbf{F}_n=0$$

где a_i — действительные числа, то в любой точке кривой

$$a_1m_1v_1^2+\ldots+a_nm_nv_n^2=0 \tag{1.13}$$

§ 2. Пример применения обобщенной теоремы. Пусть требуется узнать, возможно ли движение массы M по кривой AB под действием суммы данных сил $\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_n$.

В тех случаях, когда удается для каждой силы $\mathbf{\Phi}_i$ найти массу m_i и константу a_i такие, что кривая AB будет проходиться массой m_i под действием силы $\mathbf{F}_i=\mathbf{\Phi}_i/a_i$, поставленный вопрос полностью решается обобщенной теоремой, потому что движения масс m_i под действием сил $\mathbf{F}_i$ можно считать частными, а движение массы M под действием заданной равнодействующей $a_1\mathbf{F}_1+\ldots+a_n\mathbf{F}_n=\mathbf{\Phi}_1+\ldots+\mathbf{\Phi}_n$ — сложным. Видим, что сила, которая должна производить частное движение, может отличаться скалярным множителем от физически данной силы, входящей в равнодействующую, производящую сложное движение. Привлечение сил, отличающихся от заданных, позволяет изучать движения, к которым неприменима обычная теорема Боннэ. Проиллюстрируем это одним примером.

В задаче о движении точки под действием притяжения двух неподвижных масс α и β Лагранж[1], применив эллиптические координаты $s=r+q$ и $u=r-q$, где r и q — расстояние точки от масс α и β, свел задачу к квадратурам и указал, что $s=s_0$ и $u=u_0$ (s_0 и u_0 — кратные корни полиномов $S=S(s)$ и $U=U(u)$, стоящих под радикалами в знаменателях квадратур) — частные решения задачи. Решение $s=s_0$ есть эллипс с фокусами α и β, а решение $u_0=u_0$ — одна ветвь гиперболы с теми же фокусами. Далее Лагранж утверждает ([2], стр. 129): «Таким образом, частные решения, о которых мы выше говорили, дают эллипсы или гиперболы, описанные вокруг центров сил α/r^2 и β/q^2, взятых в качестве фокусов. А так как полиномы S и U содержат три произвольные постоянные A, B, C, зависящие от начальных направлений и скорости тела, то ясно, что эти элементы всегда можно взять такими, что тело вокруг данных фокусов опишет заданный эллипс или гиперболу». Мы при помощи обобщенной теоремы покажем, что, в отличие от эллипсов с фокусами α и β, отнюдь не всякая ветвь гиперболы с этими фокусами может быть описана при $\alpha \neq \beta$, и укажем все те ветви или их части, которые действительно могут быть решениями.

То, что произвольный эллипс с фокусами α и β является решением, доказал также Лежандр ([8], стр. 426) и, по-видимому, независимо от Лагранжа.

В цитированной уже работе [1] О.Боннэ утверждал (перед формулировкой своей теоремы), что отмеченные выше выводы Лагранжа и Лежандра представляют собой лишь следствия его теоремы.

Это утверждение Боннэ нуждается в исправлении, так как вывод Лагранжа относительно гиперболических решений $u = u_0$ из теоремы Боннэ непосредственно не следует. Действительно, фиксированная ветвь гиперболы с фокусами α и β не удовлетворяет условиям этой теоремы: она обращена вогнутостью лишь к одному притягивающему центру и потому не может описываться под действием другого притягивающего центра, когда он действует один.

На это обратил внимание в 1866 г. Сильвестр[4], отметивший также, что теорему Боннэ можно было бы применять и к таким случаям, если ввести в рассмотрение отрицательные живые силы и мнимые движения.

Однако доказанное в § 1 обобщение теоремы Боннэ может быть применено к движениям по гиперболам без рассмотрения мнимых движений. При помощи привлечения отталкивающих сил для частных движений оно позволяет полностью решить вопрос об определении области существования и о других свойствах чисто гиперболических движений. Поскольку центры всегда лежат в плоскости гиперболы, решить этот вопрос достаточно только на плоскости.

Рассмотрим в полярных координатах r, θ движение точки под действием центра, отталкивающего материальную точку с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Очевидно, здесь имеют место интегралы живых сил и площадей

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\mu}{r} + h \qquad (\mu < 0), \qquad\qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}$$

аналогично интегралам задачи с такой же по величине притягивающей массой $-\mu > 0$ Отличие их — только в знаке члена с μ.

Нетрудно проследить, что из этих интегралов точно так же, как и для случая притягивающей массы $-\mu > 0$, можно получить решения в форме

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

где p имеет знак μ.

Поскольку величина $\mu < 0$, положительные значения r, т. е. действительные траектории, могут отвечать только значениям $e > 1$, т. е. только гиперболическим движениям (при $e \leqslant 1$ в силу $p < 0$ имеем $r < 0$).

При этом отталкивающий центр, очевидно, является не ближним, а дальним фокусом для описываемой ветви, что как раз и нужно для решения задачи при помощи обобщенной теоремы.

Очевидно, выбором единиц длины, времени и массы можно добиться, чтобы расстояние между центрами равнялось единице, постоянная тяготения равнялась единице и было $\alpha+\beta=1$, т. е. $\alpha=1-\beta$. Пусть для определенности будет $\beta<\alpha$, т. е. $\beta<0.5$ (фиг. 1 отвечает $\beta=0.1$).

Поскольку ветвь гиперболы с фокусом β может быть описана не только под действием одной притягивающей к фокусу β силы $\mathbf{F}_\beta$ величиной β/r_β^2, но и под действием одной отталкивающей от фокуса α силы $\mathbf{F}_\alpha$ величиной α/r_α^2, и поскольку суммарная сила $\mathbf{F}$ в нашей задаче о двух притягивающих центрах выражается через $\mathbf{F}_\beta$ и $\mathbf{F}_\alpha$:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_\beta+(-1)\,\mathbf{F}_\alpha$$

можно считать первые два движения частными, а движение с силой $\mathbf{F}$ — сложным. Массы m_1, m_2, M будем считать равными, так как действующие силы — массовые. Мы можем теперь применить обобщенную теорему и узнать, всюду ли вдоль гипербол величина живой силы сложного движения положительна, т. е. всюду ли на плоскости действительно возможно движение по соответствующей гиперболе.

Применяя интегралы площадей и живых сил в частных движениях для точки C пересечения взятой ветви гиперболы с прямой $\alpha\beta$ и для бесконечности, получим (обозначив через d расстояние асимптоты гиперболы от фокуса, а через v_β и v_α — соответствующие скорости)

$$\frac{v_{\beta c}^2}{2}-\frac{\beta}{r_{\beta c}}=\frac{v_{\beta\infty}^2}{2}, \qquad r_{\beta c}v_{\beta c}=dv_{\beta\infty}$$

$$\frac{v_{\alpha c}^2}{2}+\frac{1-\beta}{r_{\alpha c}}=\frac{v_{\alpha\infty}^2}{2}, \qquad r_{\alpha c}v_{\alpha c}=dv_{\alpha\infty}$$

Вводя угол γ асимптоты с прямой $\alpha\beta$, получим

$$r_{\beta c}=\tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma), \qquad r_{\alpha c}=\tfrac{1}{2}(1+\cos\gamma), \qquad d=\tfrac{1}{2}\sin\gamma \tag{2.1}$$

Исключая $v_{\alpha c}$ и $v_{\beta c}$ при помощи интегралов площадей, учитывая (2.1) и применяя (1.2) для сложного движения, получим

$$\frac{v_{\beta\infty}^2}{2}=\frac{\beta}{\cos\gamma}, \qquad \frac{v_{\alpha\infty}^2}{2}=\frac{1-\beta}{\cos\gamma}, \qquad \frac{V_\infty^2}{2}=\frac{2\beta-1}{\cos\gamma} \tag{2.2}$$

Так как $\beta<{}^1/_2$, при $\gamma<{}^1/_2\pi$ будет ${}^1/_2V_\infty^2<0$ и, как следует из второй части теоремы, движение из бесконечности не будет возможно.

Так как при $\gamma>{}^1/_2\pi$ из (2.2) следует, что $V_\infty^2>0$, то при $\alpha\neq\beta$ движение из бесконечности возможно лишь по ветвям, огибающим бо́льшую массу. При этом с приближением такой ветви к прямой $r_\alpha=r_\beta$, т. е. при $\gamma\to{}^1/_2\pi$, величина V_∞ неограниченно возрастает. Определив живые силы для частных движений

$$T_\alpha=\frac{v_\alpha^2}{2}=-\frac{1-\beta}{r_\alpha}+\frac{1-\beta}{\cos\gamma}, \qquad T_\beta=\frac{v_\beta^2}{2}=\frac{\beta}{r_\beta}+\frac{\beta}{\cos\gamma}$$

найдем функцию:

$$T'=\frac{1}{2}\,[v_\beta^2+(-1)\,v_\alpha^2]=\frac{\beta}{r_\beta}+\frac{1-\beta}{r_\alpha}+\frac{2\beta-1}{\cos\gamma} \tag{2.3}$$

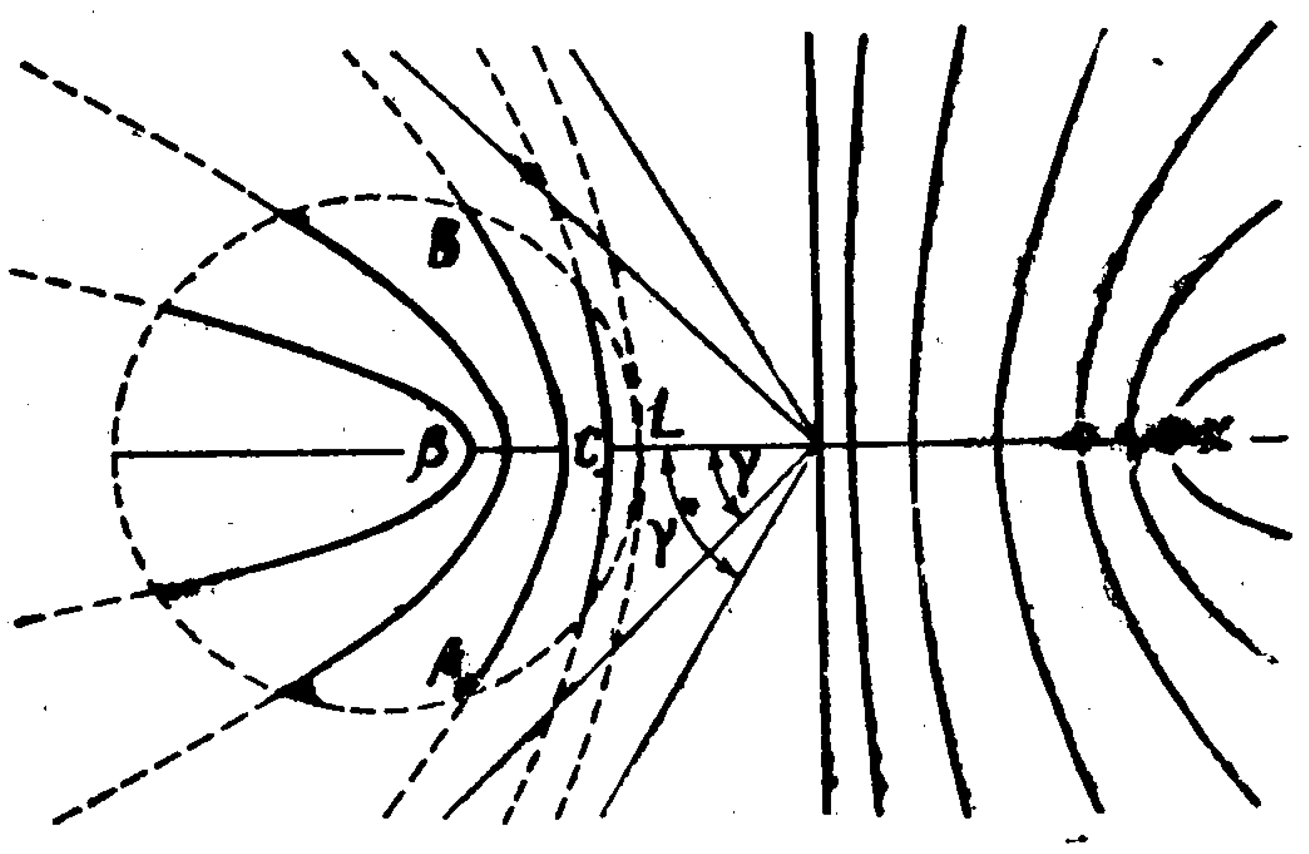
Очевидно, T, как функция точки гиперболы, симметрична относительно точки C и имеет в ней максимум. При помощи (2.1) найдем зависимость V_c от положения гиперболы:

$$T_c = \frac{V_c^2}{2} = \frac{2\beta(1+\cos^2\gamma)-(1-\cos\gamma)^2}{\cos\gamma\sin^2\gamma} \tag{2.4}$$

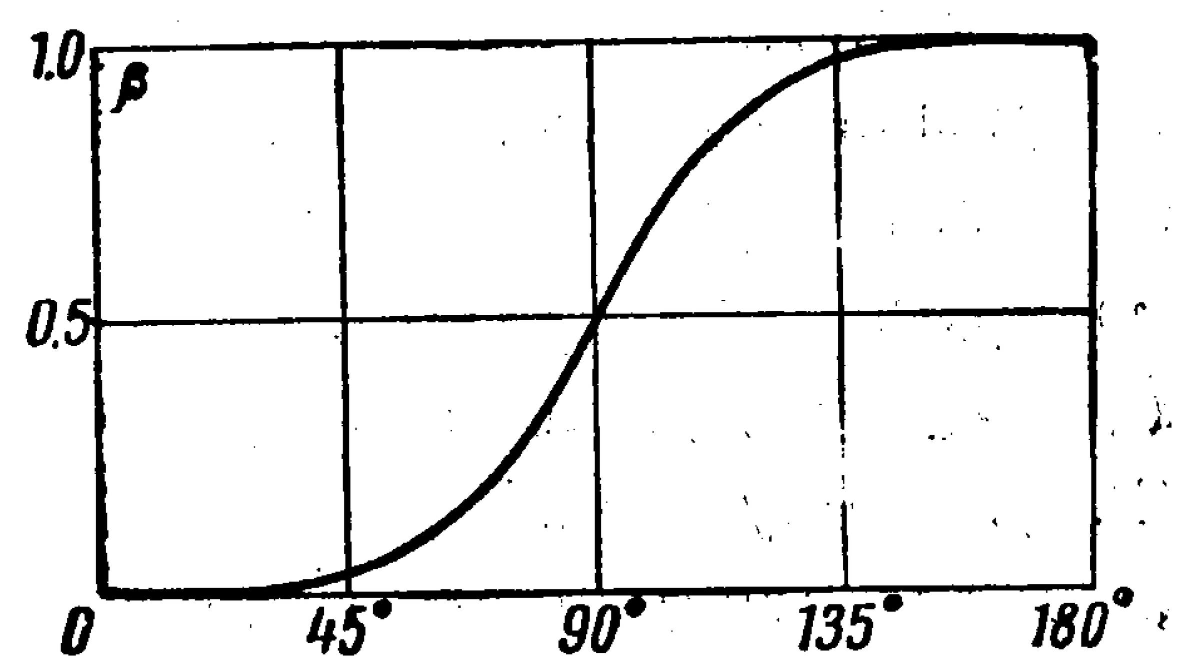
Для $\gamma < {}^1/_2\pi$ будет

$$T_c \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \beta \geqslant \frac{1}{2}\frac{(1-\cos\gamma)^2}{1+\cos^2\gamma}$$

Последнее условие для β выполняется при всех $\gamma < \gamma^*(\beta)$, где зависимость $\gamma^*(\beta)$ получается из условия $T_c = 0$. Эта зависимость между γ^* и β пред-



Фиг. 1



Фиг. 2

ставлена на фиг. 2, где γ^* является абсциссой. Видно, что γ^* монотонно возрастает, причем бесконечно быстро в окрестности точек $\beta=0$ и $\beta=1$. Очевидно, на ветви, отвечающей $\gamma < \gamma^*$, вблизи точки C существует область, где $T > 0$.

Покажем, что эта область ограничена точками

$$r_\alpha = a\cos\gamma, \qquad r_\beta = b\cos\gamma, \qquad a = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}, \qquad b = \frac{\beta+\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta} \tag{2.5}$$

Действительно, эта область должна быть ограничена точками, для которых $V=0$. Полагая в (2.3) $T=0$ и подставляя $r_\alpha = \cos\gamma + r_\beta$, что выполняется вдоль гиперболы, отвечающей углу γ, получим

$$(2\beta-1)(\cos\gamma+r_\beta)r_\beta + (1-\beta)r_\beta\cos\gamma + \beta\cos\gamma(\cos\gamma+r_\beta) = 0$$

Решая это квадратное уравнение, найдем r_β, а затем $r_\alpha = \cos\gamma + r_\beta$:

$$r_\beta = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta(1-\beta)}}{1-2\beta}\cos\gamma, \qquad r_\alpha = \frac{1-\beta\pm\sqrt{\beta(1-\beta)}}{1-2\beta}\cos\gamma$$

Если отбросить знак минус, дающий $r_\beta < 0$ при $\beta < {}^1/_2$ и $\gamma < {}^1/_2\pi$, и заменить $1-\beta=\alpha$, получим формулы (2.5).

Исключая из (2.5) $\cos\gamma$ и переходя к декартовым координатам, найдем, что кривая с параметрическими уравнениями (2.5) есть окружность радиуса $\sqrt{\alpha\beta}/(\alpha-\beta)$ с центром, удаленным от точки β по направлению $\alpha\beta$ на расстояние $\beta/(\alpha-\beta)$.

Следовательно, движение возможно лишь по участкам гиперболы расположенным внутри этой окружности.

Тело, помещенное с нулевой скоростью в точку A этой окружности, будет колебаться по гиперболе ACB около ее вершины C (фиг. 1).

Амплитуда, очевидно, максимальна при $\gamma = 0$ и убывает до нуля вместе с $\gamma^* - \gamma$. Покажем, что эта нулевая амплитуда отвечает точке либрации L — точке равновесия притяжений масс α и β (фиг. 1).

Действительно, точка либрации характеризуется условиями

$$r_\beta + r_\alpha = 1, \qquad \frac{\alpha}{r_\alpha^2} = \frac{\beta}{r_\beta^2} \quad \text{или} \quad \frac{r_\beta}{r_\alpha} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Но последнее есть как раз характерное свойство окружности (2.5), так что при $r_\beta + r_\alpha = 1$ эта окружность должна проходить через точку либрации. Нетрудно проверить, что эта окружность ограничивает область, внутри которой притяжение массы β сильнее притяжения массы α.

Итак, движение по гиперболам, проходящим между точкой либрации и прямой $r_\alpha = r_\beta$, т. е. по гиперболам с $\gamma^*(\beta) < \gamma < {}^1/_2\pi$, при $\beta < \alpha$ отвечает отрицательным живым силам и поэтому невозможно; движение по другим гиперболам с фокусами α и β возможно в полуплоскости $r_\beta \geqslant r_\alpha$ всюду, а в полуплоскости $r_\beta < r_\alpha$ — лишь внутри окружности (2.5). Полученный результат противоречит утверждению Лагранжа о возможности движения по любым ветвям гипербол.

Только в одном частном случае $\beta = \alpha = {}^1/_2$ движение возможно по обеим ветвям любой гиперболы с фокусами α и β. Причем в бесконечности скорость $V = 0$. Так как при $\beta \to \alpha$ окружность (2.5) приближается к прямой $r_\beta = r_\alpha$, область $T \geqslant 0$ делается неограниченной и все точки нулевой скорости, кроме точки либрации, уходят в бесконечность. При этом по прямой $r_\alpha = r_\beta$ вследствие симметрии сил оказываются возможными колебательные движения любой амплитуды, а также движения с любой по величине скоростью в бесконечности.

Замечания. 1. Боннэ дал в одной из последующих работ ([1], стр. 233) новое доказательство своей теоремы (в формулировке, впрочем, менее общей, чем цитированная в § 1), но и там не рассмотрел ее применения к гиперболическим решениям, не отметил возможности ее обобщения и уточнения.

Не отметил этого и Уиттекер в своей книге[5], где он дает свою формулировку теоремы Боннэ. В этой формулировке (§ 51) имеются в виду чисто позиционные силовые поля, и поэтому она не содержит неточности формулировки Боннэ.

Однако в § 53, переходя к задаче о двух неподвижных центрах, Уиттекер применяет теорему Боннэ к софокусным эллипсам и гиперболам, не замечая, как и Боннэ, что к гиперболам эта теорема не применима.

Аналогично пользуется теоремой Боннэ и Г. К. Бадалян[6,7], который, по-видимому, является последним из авторов, занимавшихся задачей о двух неподвижных притягивающих центрах.

2. Что касается движений в задаче о двух неподвижных центрах, то Г. К. Бадалян дает классификацию всех возможных движений, указывая, в частности, и два класса движений по гиперболам ($h > 0$ и $h < 0$, где h — постоянная живых сил). Однако области существования движений каждого из этих классов Г. К. Бадалян не определяет.

Заметим, что факт существования колебательных движений по гиперболам давно не является новым — его отметил еще Лежандр ([8], стр. 511), указавший также зависимость скорости от положения на прямой $\alpha\beta$ как условие возможности колебательных движений. Однако он не занимался анализом этой зависимости и не определил области возможности таких движений. Кроме того, Лежандр не заметил, что его условию удовлетворяют, кроме колебательных, еще движения, уводящие точку по гиперболе в бесконечность.

На оба типа гиперболических движений впервые указывает Шарлье[9] в своей классификации возможных движений, указывая также связь начальных энергии и положения. Однако и он этой связи не анализирует, отмечая лишь, что колебательные движения по гиперболам отвечают случаю $h < 0$, а уходящие в бесконечность — случаю $h > 0$.

3. Среди многих работ по проблеме двух неподвижных центров нам известна лишь одна работа, в которой делается попытка определения области возможности движений по гиперболам с фокусами α и β. Это — работа Таллькписта[3], посвятившего проблеме двух центров более 500 страниц. Получив в координатах λ и μ, введенных соотношениями $r_\alpha = \lambda + \mu$, $r_\beta = \lambda - \mu$, при $\mu_0 > 0$ связь начальной энергии $h < 0$ и положения для колебаний по гиперболе в виде

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0^2 = \frac{\lambda_0^2 - c^2}{\mu_0}\left\{-\frac{m_1}{(\lambda_0+\mu_0)^2} + \frac{m_2}{(\lambda_0-\mu_0)^2}\right\}$$

где $2c$ — расстояние между массами $m_1 = \alpha$ и $m_2 = \beta$, он правильно заключает, что такие движения возможны, когда

$$\frac{\lambda_0 - \mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} < \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tag{2.6}$$

случай Vkb в его классификации). Очевидно, при условии (2.6) гипербола должна проходить между L и β (фиг. 1), что и следовало ожидать.

Однако для случая (Vka'), отвечающего гиперболическим движениям с $h > 0$, $\mu_0 < 0$, Таллькквист приходит к ошибочной (по знаку) формуле

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0^2 = +\frac{\lambda_0^2 - c^2}{\mu_0}\left\{\frac{m_1}{(\lambda_0+\mu_0)^2} - \frac{m_2}{(\lambda_0-\mu_0)^2}\right\}$$

приводящей к его прежнему, для данного случая ошибочному условию (2.6) возможности движения (при $\mu_0 < 0$ левая часть (2.6) не может быть меньше правой).

Поступила 25 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Bonnet O. Notesur un theoreme de Mechanique, p. 133; Solution de quelques probleme de Mechanique p.2ö3. Journal de Mathematiques, pureset appliques, t.IX, 9, 1844 (Русский перевод первой из статей имеется в книге Лагранжа «Аналитическая механика», т. II, стр. 399).
2. Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. II, стр. 129, 1950.
3. Tallkvist H. J. Über die Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Zentren nach dem Newtonischen Gesetze angezogen wird. Acta Socientatis Scientiarum Fennicae t. 1, Nov. ser. A, Nr. 1, S. 42, 1927.
4. Sylvester J. J. The collected Mathematical Papers, vol. 2, p. 536. Cambridge, 1908.
5. Witteker E. T. Аналитическая динамика. ОНТИ, М.—Л., 1937.
6. Бадалян Г. К. О проблеме двух неподвижных центров, I. Астрономический журнал, т. XI, вып. 4, стр. 341—375, 1934.
7. Бадалян Г. К. О проблеме двух неподвижных центров, III. Бюллетень Армянской обсерватории, 1938.
8. Legendre A. M. Traite des fonctions elliptiques, t.I, Paris, 1825.
9. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels. Bd. I, S. 117—163, Leipzig, 1902.