ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗРЫВОВ

Е. В. Рязанов

(Москва)

В работе В. П. Коробейникова и Е. В. Рязанова[1] для получения точных разрывных решений было использовано частное решение уравнений одномерной газовой динамики, найденное Л. И. Седовым[2].

Считая, что ударная волна распространяется по покоящемуся газу с переменной начальной плотностью $\rho_1 = \rho_1(r)$ и постоянным давлением p_1, авторы показали, что основная трудность данной задачи заключается в нахождении решения следующего дифференциального уравнения первого порядка типа Риккати:

$$\frac{dy}{d\mu} = \nu y^2 + \frac{1}{\mu}\left[\nu - 1 + \frac{\nu(\gamma-1)}{2}\,\frac{\mu^{\nu(\gamma-1)}}{\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}}\right] y + \frac{\nu\varkappa(1-\gamma^2)}{4\mu^2[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]} \quad \left(\varkappa = \frac{A}{B}\right) \tag{1}$$

Обозначения такие же, как в работе[1]. В работах[1,3] были рассмотрены частные случаи уравнения (1), когда $\varkappa = 0$, $B = 0$, $\gamma = 1$.

В настоящей заметке дается решение задачи в общем случае для любых значений $\varkappa$ и γ. Используя частное решение $y = -(\gamma+1)/2\mu$, можно получить общее решение уравнения (1) вида:

$$y = -\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{1}{\mu} + \frac{[(\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)})]^{1/2}}{\mu^{\nu\gamma+1}[C_1 - J_1(\mu)]}, \qquad J_1(\mu) = \nu\int \frac{[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}}{\mu^{\nu\gamma+1}}\, d\mu \tag{2}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Для $r_2(\mu)$ получим

$$r_2(\mu) = C_2 \mu^{-1/2(\gamma+3)} (C_1 - J_1)^{-1/\nu}$$

где C_2 — постоянная интегрирования. Следуя методу, изложенному в работах[1,3], легко получить все интересующие нас зависимости

$$q(\mu) = \frac{2[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}}{2[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} - (\gamma+1)\mu^{\nu\gamma}(C_1 - J_1)}, \qquad p_2(\mu) = p_1\left\{1 - \frac{\gamma\mu^{\nu\gamma}(C_1 - J_1)}{[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}}\right\}$$

$$\rho_1(\mu) = \frac{2\gamma p_1}{BC_2^2}\,\frac{\mu^{2\nu\gamma+\gamma-1}(C_1 - J_1)^{2(\nu+1)/\nu}}{[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{3/2}\{2[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} - (\gamma+1)\mu^{\nu\gamma}(C_1 - J_1)\}}$$

$$\rho_2(\mu) = \frac{2\gamma p_1}{BC_2^2}\,\frac{\mu^{2\nu\gamma+\gamma-1}(C_1 - J_1)^{2(\nu+1)/\nu}}{[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{3/2}\{2[\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} - (\gamma-1)\mu^{\nu\gamma}(C_1 - J_1)\}}$$

$$v_2(\mu) = \mp B^{1/2} C_2 \mu^{1/2(1-\gamma)} [\varkappa + \mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} (C_1 - J_1)^{-1/\nu}$$

Произвольная функция $P(x)$ будет иметь в этом случае такой вид:

$$P(x) = \frac{2(s+2)}{B\nu(\gamma-1)}\left\{\frac{p_1}{\mu(x)^{\nu\gamma}}\left[1 - \frac{\gamma\mu^{\nu\gamma}(x)[C_1 - J_1(x)]}{[\varkappa + \mu(x)^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}}\right] - C\right\}$$

где $\mu(x)$ находится из уравнения

$$x^{\nu/(2+s)}\mu^{1/2\nu(\gamma-1)}[C_1 - J_1(\mu)] - C_2^{\nu} = 0$$

Интеграл $J_1(\mu)$ может быть выражен в элементарных функциях только в двух случаях (исключая разобранные ранее случаи [1])

$$\gamma = \frac{n_0+2}{n_0+1} \qquad \text{или} \qquad \gamma = \frac{2n_0+3}{2n_0+1} \qquad (n_0 = 0, 1, 2, \ldots)$$

Построенное здесь решение может быть получено и другим методом[4].

Поступила 4 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. Построение точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики и их приложения. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.
2. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. ДАН СССР, т. 90, № 5, 1953.
3. Коробейников В. П. Точное решение нелинейной задачи о взрыве в газе при переменной начальной плотности. ДАН СССР, т. 117, № 6, 1957.
4. Шишкин И. С. О точных решениях уравнений одномерной газодинамики с ударными и детонационными волнами, ДАН СССР, т. 122, № 1, 1958.