Таблица

№ варианта	Система уравнений	Периодические решения по методу малого параметра
I	$\dot{x} = -y + \mu x f(r^2)$ $\dot{y} = x + \mu y f(r^2)$	$x = A^* \cos t,\ y = A^* \sin t$ $f(A^{*2}) = 0$
II	$\dot{x} = \mu[-y + xf(r^2)]$ $\dot{y} = \mu[x + yf(r^2)]$	Не найдены
III	$\dot{x} = -y + xr^2(r^2 - \mu^2 A_1^2)$ $\dot{y} = x + yr^2(r^2 - \mu^2 A_1^2)$	$x = \mu A_1 \cos t, \quad y = \mu A_1 \sin t$
IV	$\dot{x} = -y + x(r^2 - \mu^2)(r^2 - A_1^2)$ $\dot{y} = x + y(r^2 - \mu^2)(r^2 - A_1^2)$	$x = \mu \cos t, \quad y = \mu \sin t$ $x = A_1 \cos t, \quad y = A_1 \sin t$
V	$\dot{x} = -y + xr^2[r^2 - (A_1 + \mu)^2]$ $\dot{y} = x + yr^2[r^2 - (A_1 + \mu)^2]$	$x = (A_1 + \mu)\cos t,\ y = (A_1 + \mu)\sin t$
VI	$\dot{x} = -y + \frac{xr^2}{c^2}[(c-\mu)^2 r^2 - c^2 A_1^2]$ $\dot{y} = x + \frac{yr^2}{c^2}[(c-\mu)^2 r^2 - c^2 A_1^2]$ $c > 0$	$x = \frac{A_1}{1 - \mu / c} \cos t$ $y = \frac{A_1}{1 - \mu / c} \sin t$ $\mu < c$

шением или даже нулевым решением, то параметр μ должен быть введен таким образом, чтобы удалось построить семейство периодических решений, зависящих от этого параметра, с достаточно большим радиусом сходимости ряда, представляющего это семейство решений.

Поступила 12 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. К построению периодических решений автономных систем с одной степенью свободы. ПММ, т. XXI, вып. 4, 1957, стр. 585—590.

О СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ

Е. А. Девянин

(Москва)

Метод осреднения, возникший при решении некоторых проблем небесной механики, к задачам теории нелинейных колебаний был впервые применен Ван дер Полем [1,2]. Дальнейшее свое развитие метод получил в трудах П. Фату[3], Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси[4], Б. В. Булгакова[5,6], Н. Н. Боголюбова[7].

В настоящей работе рассматриваются квазилинейные колебательные системы, содержащие одну нелинейную зависимость от одной из неизвестных координат. Исследуются свойства осредненных («укороченных», первого приближения) уравнений движения. В основу работы положен один из вариантов метода осреднения, разработанный Б. В. Булгаковым. Показано, что при весьма широких предположениях осредненные уравнения могут быть приведены к специальной форме, которая позволяет установить некоторые их свойства, а также оказывается полезной при решении ряда конкретных задач.

§ 1. Пусть некоторый колебательный процесс в системе с n степенями свободы определяется уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, y_k = \psi_j(y_l, t) \qquad (j = 1, \ldots, n), \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right) \tag{1.1}$$

где y_k — неизвестные координаты, $f_{jk}(D)$ — полиномы с постоянными коэффициентами. Лишь одна из функций ψ_j, именно $\psi_m(y_l, t)$, зависящая от одной координаты y_l и, может быть, от времени, отлична от нуля. Пусть $f(D) = \| f_{jk}(D) \|$ — матрица системы (1.1), $F(D) = \| F_{jk}(D) \|$ — к ней присоединенная, так что $F_{kj}(D)$ — алгебраическое дополнение элемента $f_{jk}(D)$.

Обозначим через $\Delta(D) = \det f(D)$ определителъ системы (1.1), имеющий θ действительных корней $\varkappa_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, \theta)$ и ϑ пар комплексных сопряжений корней $\varepsilon_h \pm i\omega_h$ $(h = 1, \ldots, \vartheta)$.

Введем следующие предположения:

(а) определитель $\Delta(D)$ имеет лишь простые корни;

(б) определитель коэффициентов при старших производных в (1.1) отличен от нуля;

в) каждая координата входит в (1.1) хотя бы с одной своей производной.

При сделанных предположениях возможно пресбразование системы (1.1) к нормальным координатам, полученное в более общем случае Б. В. Булгаковым[6].

Формулы преобразования имеют вид: (1.2)

$$\frac{d^\nu y_j}{dt^\nu} = \sum_{\sigma=1}^{\theta} v_{j\sigma}^{\nu} \xi_\sigma + \sum_{h=1}^{\vartheta} N_{jh}^{(\nu)} a_h \cos(u_h + \gamma_{jh} + \nu\zeta_h) \qquad (j = 1, \ldots, n, \ \nu = 0, 1, \ldots, m_j - 1)$$

Здесь m_j — порядок старшей производной координаты y_j в (1.1), ξ_σ, a_h, u_h — новые неизвестные («нормальные» координаты), удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_\sigma}{dt} &= \varkappa_\sigma \xi_\sigma + \frac{w_{\sigma m}}{\Delta'(\varkappa_\sigma)} \psi_m(y_l, t) \\ \frac{da_h}{dt} &= \varepsilon_h a_h + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu_h}}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} W_{\theta+h,m}\, \psi_m(y_l, t) \right] \\ \frac{du_h}{dt} &= \omega_h + \frac{2}{a_h} \mathrm{Im}\left[\frac{e^{-iu_h}}{\Delta'(\varepsilon_h + i\omega_h)} W_{\theta+h,m}\, \psi_m(y_l, t) \right] \\ &(\sigma = 1, \ldots, \theta, \qquad h = 1, \ldots, \vartheta) \end{aligned} \tag{1.3}$$

В этих уравнениях y_l предполагается замененным при помощи (1.2). Величины, входящие в (1.2), (1.3), имеют следующий смысл:

$$v_{j\sigma}^{(\nu)} = v_{j\sigma} \varkappa_\sigma^{\nu}, \qquad N_{jh}^{(\nu)} = N_{jh} \rho_h^{\nu}, \qquad \rho_h e^{i\zeta_h} = \varepsilon_h + i\omega_h$$

$$v_{j\sigma} = s_\sigma \frac{F_{j,l(\sigma)}(\varkappa_\sigma)}{F_{k(\sigma),l(\sigma)}(\varkappa_\sigma)}, \qquad w_{\sigma m} = \frac{1}{s_\sigma} F_{k(\sigma),m}(\varkappa_\sigma)$$

$$N_{jh} e^{i\gamma_{jh}} = s_h \frac{F_{j,l(h)}(\varepsilon_h + i\omega_h)}{F_{k(h),l(h)}(\varepsilon_h + i\omega_h)}, \qquad W_{\theta+h,m} = \frac{1}{s_h} F_{k(h),m}(\varepsilon_h + i\omega_h) \tag{1.4}$$

так что

$$v_{j\sigma} w_{\sigma m} = F_{jm}(\varkappa_\sigma), \qquad N_{jh} e^{i\gamma_{jh}} \quad W_{\theta+h,m} = F_{jm}(\varepsilon_h + i\omega_h)$$

Здесь s_σ, s_h — произвольные коэффициенты, $F_{k(\sigma),l(\sigma)}(\varkappa_\sigma)$, $F_{k(h),l(h)}(\varepsilon_h + i\omega_h)$ — элементы матрицы $F(D)$, не обращающиеся в нуль при данных σ, h.

Уравнения (1.3) являются точными. Чтобы получить более простые приближенные уравнения, мы к условиям (а), (б), (в), принятым ранее, добавим новые. Предположим, что:

(г) частоты ω_h таковы, что соотношение $g_1\omega_1+g_2\omega_2+\ldots+g_\vartheta\omega_\vartheta=0$ не выполняется ни при каких целых g_h, не равных нулю одновременно;

(д) величины $\varkappa_\sigma\xi_\sigma, \varepsilon_h a_h$ малы в сравнении с $\omega_h a_h$;

(е) функция $\psi_m(y_l, t)$ мала (квазилинейные системы);

(ж) при изменении t, если оно входит явно, ψ_m меняется медленно в сравнении с изменением, происходящим от аргументов u_h.

При этих условиях уравнения (1.3) имеют «стандартную» форму и допускают осреднение по всем входящим в них угловым переменным. Проводя осреднение, получаем

$$\frac{d\xi_\sigma}{dt}=\varkappa_\sigma\xi_\sigma+\frac{w_{\sigma m}}{\Delta'(\varkappa_\sigma)}\frac{1}{(2\pi)^\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\psi_m(y_l,\ t)\,du_1\ldots du_\vartheta \tag{1.5}$$

$$\frac{da_h}{dt}=\varepsilon_h a_h+\frac{2}{(2\pi)^\vartheta}\operatorname{Re}\left[\frac{W_{\theta+h,m}}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\psi_m e^{-iu_h}du_1\ldots du_\vartheta\right]$$

$$\frac{du_h}{dt}=\omega_h+\frac{2}{a_h(2\pi)^\vartheta}\operatorname{Im}\left[\frac{W_{\theta+h,m}}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\psi_m e^{-iu_h}du_1\ldots du_\vartheta\right]$$

$$(\sigma=1,\ldots,\theta,\quad h=1,\ldots,\vartheta)$$

При осреднении ξ_σ, a_h, t считаются постоянными.

Уравнения первых двух групп, не содержащие u_h, интегрируются независимо от уравнений третьей группы, после чего u_h могут быть найдены квадратурами.

§ 2. Предположим, что ни одна из величин $v_{l\sigma}(\sigma=1,\ldots,\theta)$, $N_{lh}(h=1,\ldots,\vartheta)$ в (1.2) не сбращается в нуль. Очевидно, это ограничение несущественно, так как при его невыполнении часть уравнений первых двух групп интегрируется и задача лишь облегчается. Введем новые неизвестные по формулам

$$x_\sigma=v_{l_\sigma}\xi_\sigma,\qquad z_h=N_{lh}a_h \tag{2.1}$$

тогда выражение (1.2) для y_l принимает вид:

$$y_l=\sum_{\sigma=1}^{\theta}x_\sigma+\sum_{h=1}^{\vartheta}z_h\cos(u_h+\gamma_{lh}) \tag{2.2}$$

а уравнения (1.5) с учетом (1.4) дают

$$\frac{dx_\sigma}{dt}=\varkappa_\sigma x_\sigma+\frac{F_{lm}(\varkappa_\sigma)}{\Delta'(\varkappa_\sigma)}\frac{1}{(2\pi)^\vartheta}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\psi_m(y_l,t)\,du_1\ldots du_\vartheta$$

$$\frac{dz_h}{dt}=\varepsilon_h z_h+\frac{2}{(2\pi)^\vartheta}\operatorname{Re}A_h,\qquad \frac{du_h}{dt}=\omega_h+\frac{2}{z_h(2\pi)^\vartheta}\operatorname{Im}A_h \tag{2.3}$$

$$(\sigma=1,\ldots,\theta,\qquad h=1,\ldots,\vartheta)$$

где

$$A_h=\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}e^{-i\gamma_{lh}}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iu_h}\psi_m(y_l,\ t)\,du_1\ldots du_\vartheta \tag{2.4}$$

Легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\sin(u_h+\gamma_{lh})\,\psi_m(y_l,t)\,du_1,\ldots,du_\vartheta=0$$

и, следовательно,

$$A_h=\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u_h+\gamma_{lh})\,\psi_m(y_l,\ t)\,du_1\ldots du_\vartheta \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в уравнения (2.3), получим

$$\frac{dx_\sigma}{dt}=\varkappa_\sigma x_\sigma+\frac{F_{lm}(\varkappa_\sigma)}{\Delta'(\varkappa_\sigma)}\frac{1}{(2\pi)^\vartheta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi_m(y_l,t)\,du_1\ldots du_\vartheta$$

$$\frac{dz_h}{dt}=\varepsilon_h z_h+\frac{2}{(2\pi)^\vartheta}\operatorname{Re}\left[\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(u_h+\gamma_{lh})\,\psi_m(y_l,t)\,du_1\ldots du_\vartheta \tag{2.6}$$

$$\frac{du_h}{dt}=\omega_h+\frac{2}{z_h\,(2\pi)^\vartheta}\operatorname{Im}\left[\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(u_h+\gamma_{lh})\,\psi_m(y_l,t)\,du_1\ldots du_\vartheta$$

$$(\sigma=1,\ldots,\theta,\quad h=1,\ldots,\vartheta)$$

Рассмотрим функцию (2.7)

$$\Phi(x_1,\ldots,x_\theta,z_1,\ldots,z_\vartheta,t)=\frac{1}{(2\pi)^\vartheta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\int\limits_0^{y_l}\psi_m(y_l,t)\,dy\right]du_1\ldots du_\vartheta$$

которая получается осреднением первообразной для $\psi_m(y_l,t)$. Найдем частные производные этой функции по ее аргументам $x_\sigma\,(\sigma=1,\ldots,\theta)$, $z_h\,(h=1,\ldots,\vartheta)$. Если в некоторой области изменения переменных x_σ, z_h, u_h выполнены следующие условия: функция

$$\varphi_m(y_l,t)=\int\limits_0^{y_l}\psi_m(y,t)\,dy$$

интегрируема по u_h при любых x_σ, z_h, существуют ограниченные частные производные $\partial\varphi_m/\partial x_\sigma$, $\partial\varphi_m/\partial z_h$, также интегрируемые по u_h, то производные функции Φ могут быть найдены посредством дифференцирования под знаком интеграла.

Очевидно, указанные условия выполнены для достаточно широкого класса функций $\psi_m(y_l,t)$, в частности для кусочно-непрерывных функций, часто встречающихся в приложениях. Это позволяет записать уравнения (2.6) в виде

$$\frac{dx_\sigma}{dt}=\varkappa_\sigma x_\sigma+\frac{F_{lm}(\varkappa_\sigma)}{\Delta'(\varkappa_\sigma)}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\sigma}$$

$$\frac{dz_h}{dt}=\varepsilon_h z_h+2\operatorname{Re}\left[\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial z_h} \tag{2.8}$$

$$\frac{du_h}{dt}=\omega_h+\frac{2}{z_h}\operatorname{Im}\left[\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial z_h}$$

$$(\sigma=1,\ldots,\theta,\ h=1,\ldots,\vartheta)$$

где функция $\Phi=\Phi(x_1,\ldots,x_\theta,z_1,\ldots,z_\vartheta,t)$ дается формулой (2.7). Для решения ряда задач полученный вид уравнений является более удобным, чем исходный. Однако путем дальнейших преобразований уравнениям (2.8) удается придать несколько иную форму, которая может оказаться полезной как при решении конкретных задач, так и главным образом для исследования общих свойств осредненных уравнений.

Предположим, что ни одна из величин

$$r_\sigma=\frac{F_{lm}(\varkappa_\sigma)}{\Delta'(\varkappa_\sigma)},\qquad r_{\theta+h}=2\operatorname{Re}\left[\frac{F_{lm}(\varepsilon_h+i\omega_h)}{\Delta'(\varepsilon_h+i\omega_h)}\right]\qquad(\sigma=1,\ldots,\theta,h=1,\ldots\vartheta)$$

не обращается в нуль. Если это не имеет места, то задача исследования уравнений (2.8) лишь облегчается, так как в этом случае часть уравнения интегрируется и подстановка результата интегрирования в оставшиеся приводит вновь к уравнениям типа (2.8) с меньшим числом неизвестных. Введем функцию

$$\Psi(x_1, \ldots, x_\theta, z_1, \ldots, z_\vartheta, t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\sigma=1}^{\theta} p_\sigma x_\sigma^2 + \sum_{h=1}^{\vartheta} q_\sigma z_h^2\right] + \Phi(x_1, \ldots, x_\theta, z_1, \ldots z_\vartheta, t) \quad (2.9)$$

где

$$p_\sigma = \frac{\varkappa_\sigma}{r_\sigma}, \qquad q_h = \frac{\varepsilon_h}{r_{\theta+h}}$$

тогда первые две группы уравнений (2.8) примут вид:

$$\frac{dx_\sigma}{dt} = r_\sigma \frac{\partial\Psi}{\partial x_\sigma}, \qquad \frac{dz_h}{dt} = r_{\theta+h} \frac{\partial\Psi}{\partial z_h} \qquad (\sigma = 1, \ldots, \theta, h = 1, \ldots, \vartheta) \qquad (2.10)$$

В симметричных обозначениях

$$x_i = x_\sigma, \quad r_i = r_\sigma \quad (\sigma = 1, \ldots, \theta, \quad i = 1, \ldots, \theta)$$

$$x_i = z_h, \quad r_i = r_{\theta+h} \quad (h = 1, \ldots \vartheta, \ i = \theta + 1, \ldots, \theta + \vartheta)$$

уравнения (2.10) приобретают особенно компактную форму:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, \theta + \vartheta) \qquad (2.11)$$

которую заменой переменных

$$x_i = x_i' \sqrt{|r_i|}$$

можно привести также к виду:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \operatorname{sign} r_i \frac{\partial\Psi'}{\partial x_i'} \qquad (i = 1, \ldots \theta + \vartheta) \qquad (2.12)$$

где

$$\Psi'(x_1', \ldots, x'_{\theta+\vartheta}, t) = \Psi(x_1' \sqrt{|r_1|}, \ldots, x'_{\theta+\vartheta} \sqrt{|r_{\theta+\vartheta}|}, t)$$

§ 3. Форма (2.12), к которой приведены осредненные уравнения (1.5), позволяет установить некоторые свойства решений этих уравнений. Характер интегральных кривых системы (2.12) существенным образом зависит от знаков величин r_i. Вопрос о зависимости этих знаков от свойств исходной системы (1.1) может быть частично решен при помощи следующего предложения.

Для того чтобы знаки r_i были одинаковы, необходимо, чтобы целая часть дроби $DF_{lm}(D) / \Delta(D)$ была отлична от нуля, либо чтобы сама эта дробь не обращалась в нуль при $D = 0$.

В дальнейшем будем рассматривать главным образом системы с одинаковыми знаками r_i и не зависящей явно от времени функцией Ψ'. В этом случае уравнения (2.12) принимают вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, \theta + \vartheta) \qquad (3.1)$$

для $r_i > 0$, для $r_i < 0$ та же форма получается изменением знака функции Ψ или времени t. (Штрих здесь опущен, чтобы не усложнять обозначения.) Функция Ψ в (3.1) является потенциалом скоростей.

Для таких систем справедлива доказанная Е. А. Барбашиным [8] теорема: если динамическая система обладает однозначным потенциалом скоростей, то каждая из точек пространства M, на котором она задана, будет либо блуждающей, либо точкой покоя.

Отсюда следует, в частности, важный вывод: среди интегральных кривых системы (3.1) не может быть замкнутых, т. е. предельных, циклов.

Рассмотрим теперь поведение интегральных кривых системы (3.1) в окрестности особой точки: в качестве таковой, не нарушая общности, мы можем рассматривать начало координат.

Пусть функция Ψ такова, что в окрестности начала координат она может быть разложена в ряд Маклорена:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_{\theta+\vartheta}) = \Psi(0, \ldots 0) + \sum_{i=1}^{\theta+\vartheta} \Psi'_{x_i}(0, \ldots, 0)\, x_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\theta+\vartheta} \Psi''_{x_i x_k}(0, \ldots, 0)\ x_i x_k + o(x_1, \ldots, x_{\theta+\vartheta})$$

Так как точка $[0, \ldots, 0]$ особая, $\Psi'_{x_i}(0, \ldots, 0) = 0$ и движение вблизи нее определяется уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{\theta+\vartheta} \Psi''_{x_i x_k}(0, \ldots, 0)\, x_k \qquad (i = 1, \ldots, \theta + \vartheta) \tag{3.2}$$

Предположим, как обычно, что определитель правой части (3.2) отличен от нуля. Очевидно, корни характеристического определителя системы (3.2) являются собственными значениями симметрической матрицы $\|\Psi''_{x_i x_k}(0, \ldots, 0)\|$ и, следовательно, все действительны. Общее решение (3.2) имеет вид:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\theta+\vartheta} A_{ik} C_k e^{\lambda_k t} \quad (i = 1, \ldots, \theta + \vartheta)$$

где C_k — произвольные постоянные, A_{ik} — постоянные или полиномы от t и все λ_k действительны. Отсюда следует, что в случае двух переменных особая точка может быть узлом или седлом, но не фокусом.

К уравнениям (3.1) возможен геометрический подход. Действительно, из них следует, что вектор dn с координатами $dx_1, \ldots, dx_{\theta+\vartheta}$ коллинеарен вектору grad Ψ, вектор же grad Ψ ортогонален поверхностям уровня $\Psi = C$ функции Ψ. Таким образом, траектории системы (3.1) ортогональны поверхностям $\Psi = C$. Заметим, кроме того, что особые точки системы (3.1), определяемые системой уравнений $\partial\Psi / \partial x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, \theta + \vartheta)$, являются стационарными точками поверхности Ψ. Указанные обстоятельства позволяют свести изучение траекторий системы (3.1) к изучению свойств поверхности Ψ. Найдем теперь полную производную функции Ψ. В силу уравнений (3.1)

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{i=1}^{\theta+\vartheta} \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{\theta+\vartheta} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant 0$$

Поэтому при движении по траектории функция Ψ может лишь возрастать и ее производная обращается в нуль только в особых точках. Экстремумы Ψ являются узлами, седловые точки — седлами системы (3.1).

Рассмотренные свойства системы (3.1) дают возможность для построения интегральных кривых предложить приближенный метод, заключающийся в построении семейства поверхностей $\Psi = C$ для разных C и затем ортогональных траекторий к этому семейству. Такой метод, очевидно, не может дать сколько-нибудь значительной точности, однако позволяет сразу получить достаточно полную качественную картину расположения траекторий во всем фазовом пространстве.

Отметим еще одну, могущую оказаться полезной наглядную аналогию В случае двух переменных, рассматривая поверхность $\Psi(x_1, x_2)$ в трехмерном пространстве, легко установить, что уравнения (3.1) определяют перемещение в горизонтальной плоскости $[x_1, x_2]$ проекции материальной точки, движущейся по поверхности, $\Psi(x_1, x_2)$ под действием силы тяжести и большого вязкого трения.

§ 4. В качестве примера применения изложенной теории рассмотрим малые колебания гироскопического маятника вблизи положения равновесия при действии по одной из осей малого момента сил сухого трения.

Уравнения движения в этом случае имеют вид [9]:

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + L\alpha = F \operatorname{sign} \dot{\alpha}, \qquad B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + M\beta = 0$$

Вводя обозначения

$$\rho=\sqrt{\frac{L}{A}},\qquad \sigma=\sqrt{\frac{M}{B}},\qquad \varkappa=\frac{H}{A},\qquad \lambda=\frac{H}{B},\qquad q=\sqrt{\varkappa\lambda}=\frac{H}{\sqrt{AB}}$$

$$\dot\alpha=\Omega,\qquad h=\frac{F}{A}$$

запишем их в форме

$$\dot\Omega+\varkappa\dot\beta+\rho^2\alpha=h\operatorname{sign}\Omega,\qquad \ddot\beta-\lambda\Omega+\sigma^2\beta=0,\qquad \dot\alpha-\Omega=0 \tag{4.1}$$

Определитель системы (4.1) имеет две пары чисто мнимых корней:

$$D_{1,2}=\pm i\omega_1,\qquad D_{3,4}=\pm i\omega_2$$

$$\omega_{1,2}{}^2=\frac{1}{2}(\rho^2+\sigma^2+q^2\mp f^2),\qquad f^2=\sqrt{(\rho^2+\sigma^2+q^2)^2-4\rho^2\sigma^2}$$

Преобразование (2.2) для Ω и уравнения (2.8) в новых неизвестных имеют вид:

$$\Omega=z_1\cos(u_1+\gamma_1)+z_2\cos(u_2+\gamma_2)$$

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\omega_1{}^2-\sigma^2}{f^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z_1},\qquad \frac{dz_2}{dt}=\frac{\sigma^2-\omega_2{}^2}{f^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z_2},\qquad \frac{du_1}{dt}=\omega_1,\qquad \frac{du_2}{dt}=\omega_2 \tag{4.2}$$

где

$$\Phi(z_1,z_2)=\frac{h}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^{\Omega}\operatorname{sing}\Omega d\Omega\right]du_1du_2=\frac{4h}{\pi^2}z_1[2E(k)-(1-k^2)K(k)] \tag{4.3}$$

$$k=\frac{z_2}{z_1},\qquad z_1\geqslant z_2\geqslant 0\qquad \left(\Phi(z_1,z_2)=\Phi(z_2,z_1)=\Phi(z_1,-z_2)=\Phi(-z_1,z_2)=\Phi(-z_1,-z_2)\right)$$

$E(k)$, $K(k)$ — полные эллиптические интегралы.

Из двух последних уравнений (4.2) следует изохронность колебаний.

Рассмотрим первые два уравнения для амплитуд. Легко видеть, что

$$r_1=\omega_1{}^2-\sigma^2<0,\quad r_2=\sigma^2-\omega_2{}^2<0$$

следовательно, мы имеем систему, для которой может быть получен потенциал скоростей и справедливы выводы § 3. Функция Φ в рассматриваемом случае является линейчатой поверхностью и близка к прямому круговому конусу.

Для построения интегральных кривых может быть применен предложенный метод. При больших H, как легко показать, $|\omega_1{}^2-\sigma^2|\ll|\sigma^2-\omega_2{}^2|$, поэтому все траектории касаются оси z_1 и колебания частоты ω_2 (нутация) затухают быстрее колебаний частоты ω_1 (прецессия).

Из (4.3) следует, что $\partial\Phi/\partial z_1$, $\partial\Phi/\partial z_2$ всегда конечны и колебания затухают в конечное время. Если от (4.2), (4.3) перейти к полярным координатам, то уравнения для амплитуд могут быть проинтегрированы в квадратурах.

В отличие от[9] решение получается во всей фазовой плоскости.

Поступила 15 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Appleton E. V. and van der Pol B. On a type of oscillation — hysteresis in a simple triode generator. Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. XLIII, 6, No 253, 1922.
2. Van der Pol B. On a oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom. Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. XLIII, 6, No. 256, 1922.
3. Fatou P. Sur le mouvement d'un systéme soumis a des forces courte période. Bulletin de la Société mathematique de France, 56, 1928.
4. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. IV, вып. 2, 1934.
5. Bulgakov B. V. Sur le mouvement troublé par des forces de haute fréquence. Compositio mathematica. t. 7, 3, 1940.
6. Булгаков Б. В. О нормальных координатах. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
7. Боголюбов И. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1954.
8. Барбашин Е. А. О динамических системах, обладающих потенциалом скоростей. Докл. АН СССР, т. XI, № 2, 1948.
9. Булгаков Б. В. Колебания. ГИТТЛ, 1954.